В.В.Киселев, Д.Л.Осипов

Пространства симметрий в физике

Алгебры Ли генераторов симметрии и состояния представлений

Aspira ad optimum

– 2026 –

ББК В314
ISBN

Киселев В.В., Осипов Д.Л. **Пространства симметрий в физике**. Алгебры Ли генераторов симметрии и состояния представлений (Учебное пособие). — XXX, 20XX. — 332 с., библиогр.: 13.

Излагаются вопросы классификации простых компактных алгебр Ли по Дынкину с использованием языка и терминологии квантовой механики при введении генераторов бесконечно малых непрерывных преобразований квантовых состояний. Подробно рассмотрены алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$. Построен общий формализм неприводимых конечномерных представлений со старшим вектором состояния. Дано описание мультиплетов базисных состояний векторных пространств неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$. Теория представлений проиллюстрирована рассмотрением симметрий ароматов кварков и модели великого объединения с группой SU(5).

Построены схемы Юнга для разложения тензорного произведения неприводимых представлений группы SU(3) в прямую сумму по мультиплетам неприводимых представлений этой группы. Рассмотрено квантование спектров связанных состояний в кулоновском поле притяжения и трехмерного изотропного осциллятора с описанием пространств квантовых состояний в представлениях групп симметрии этих физических систем.

Групповые конструкции применяются для решения задачи о сумме двух моментов вращения, рассмотренной в рамках разложения тензорного произведения в прямую сумму неприводимых представлений и схем Юнга группы SU(2). Показано, что статическая составная кварковая модель адронов предсказывает значения магнитных моментов протона и нейтрона в хорошем согласии с экспериментом. Это показывает, что протоны и нейтроны не являются точечными частицами, в отличие от электрона, позитрона, нейтрино и кварков.

Пособие рассчитано на изучающих теоретическую физику студентов младших, старших курсов и аспирантов физических специальностей университетов, а также на преподавателей и научных работников.

Рецензент —

© Киселев В.В., Осипов Д.Л. 2026

Оглавление

Предисловие 4

Глава 1. Группа поворотов и спин 6
- План изложения . . . 6

§1. Трансляции и повороты 7
1.1. Генераторы инфинитезимальных преобразований . . . 7
- Сдвиг ≡ трансляция координат . . . 7
- Группа поворотов . . . 13
- Группа O(3) . . . 16
- Спин и общий вид генераторов поворотов при действии на поля . . . 16

§2. Генераторы спина как матрицы 20
2.1. Спин $s = 1$ . . . 20
- Векторы, ковекторы, линейные операторы и обозначения Дирака . . . 20
- Собственные векторы и собственные значения . . . 23
- Полнота базиса и измерение среднего значения . . . 27

2.2. Совместный базис собственных векторов двух эрмитовых матриц . . . 28

§3. Спиновые операторы и состояния 30
3.1. Квантование спина . . . 30
3.2. Тензорные поля . . . 33
- Сферические гармоники . . . 38

3.3. Разложение приводимых тензоров на неприводимые . . . 39
3.4. Поперечные векторные и тензорные поля . . . 40

§4. Спин $s = 1/2$ 41
- Группы $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$ . . . 44

4.1. Спинорная метрика . . . 46
- Сопряженный спинор . . . 48

§5. Тождественные частицы 53

Глава 2. Коммутатор и алгебра Ли 55

§1. Группа Ли и ее алгебра 55

§2. Представление группы Ли и генераторы 70
2.1. Присоединенное представление . . . 72
2.2. Метрика Киллинга и критерий Картана . . . 76
2.3. Операторы Казимира . . . 83

§3. Базис Картана–Вейля 88
3.1. Ранг алгебры Ли и веса базиса собственных состояний . . . 88
- Метрика Киллинга в подалгебре Картана и разложение по весовым векторам . . . 92

3.2. Веса и система корней алгебры Ли . . . 94
3.3. Корневое дополнение генераторов подалгебры Картана . . . 95
3.4. Набор генераторов Картана–Вейля . . . 101

§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина 106
4.1. Экспоненциальное представление и глобальная структура группы . . . 107
- Эрмитовость генераторов компактной группы . . . 108

4.2. Ранг группы и число простых положительных корней . . . 109
- Знак скалярного произведения двух простых положительных корней . . . 111

4.3. Последовательности корней, классы скалярных произведений простых положительных корней 112
- Элементы схем Дынкина . . . 115

4.4. Связные диаграммы . . . 116
- Запрещены замкнутые петли . . . 117
- Из корня исходит не более трех линий . . . 117
- На диаграмме может быть только одно двойное соединение . . . 118
- На диаграмме не могут быть одновременно звездочка и двойное соединение . . . 119
- На диаграмме может быть только одна звездочка . . . 119
- Ограничение на диаграмму с двойной линией . . . 120
- Ограничение на диаграмму с ветвлением . . . 122

§5. Классификация простых компактных алгебр Ли 123
§6. Другие схемы и алгебры 125
6.1. Соотношения Серра . . . 125
6.2. Алгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . . . 126
6.3. Алгебра Витта и Вирасоро . . . 127
6.4. Ассоциативные алгебры . . . 128
• Алгебра Клиффорда . . . 129
• Квантовые алгебры . . . 131

Глава 3. Алгебры Ли, неприводимые представления и физические идеи 132
§1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$ 132
1.1. $\mathfrak{su}(2)$ . . . 132
1.2. Масштаб и конформный фактор . . . 134
1.3. $\mathfrak{su}(3)$ . . . 135
• Корневое дополнение алгебры $\mathfrak{su}(3)$ и коммутаторы. . . . 136
1.4. Физическая традиция для генераторов $\mathfrak{su}(3)$ . . . 139
§2. Неприводимые представления 144
• Формула Рака . . . 145
• Веса базисных состояний неприводимого представления . . . 147
2.1. Допустимые значения старшего веса и фундаментальные представления . . . 148
2.2. Состояние старшего веса как тензорное произведение фундаментальных состояний . . . 151
2.3. Операция вейлевского отражения . . . 153
• Отражение состояния вырожденного веса . . . 155
• Дискретная группа Вейля . . . 158
2.4. Веса присоединенного представления . . . 159
§3. Представления $\mathfrak{su}(2)$ 164
3.1. Фундаментальное представление . . . 164
3.2. Матрицы Паули . . . 166
3.3. Представление с моментом вращения j . . . 167
• Орбитальный момент вращения . . . 169
• Модуль Верма . . . 172
3.4. Изотопическая инвариантность (спектроскопия) . . . 172
3.5. Слабый изоспин . . . 178
• Единичная длина корня и заряд в физике . . . 180
§4. Представления $\mathfrak{su}(3)$ 184
4.1. Фундаментальные представления . . . 184
4.2. Ароматы кварков и сильные взаимодействия: пространство внутренней симметрии . . . 187
4.3. Матрицы Гелл-Манна . . . 190
• Свойства матриц Гелл-Манна . . . 198
4.4. Представления $\mathsf{T}^{(p_1,p_2)}$ . . . 201
§5. Симметрия массовых мультиплетов адронов и ароматы кварков 210
• Составная модель мезонных состояний с нулевыми весами . . . 212
• Составная модель барионов и квантовое пространство цвета . . . 215
§6. Тензорный метод и схемы Юнга 218
• Стандартный вид неприводимого представления: изоморфизм базиса и компонент . . . 218
6.1. Тензорный базис неприводимого представления группы SU(3) . . . 221
• Действие генераторов на тензорное произведение . . . 221
• Тензоры как элементы неприводимого представления . . . 223
• Элементы схем Юнга . . . 228
• Независимые компоненты симметричного тензора: мультиплетность . . . 234
• Резюме техники тензоров и схем . . . 235
• Метод «шагов» и «крюков» . . . 235
6.2. Тензорные произведения неприводимых представлений и схемы Юнга . . . 237
§7. Генераторы, токи, составные состояния и калибровочная гипотеза 248
7.1. Взаимодействия как групповые преобразования состояний . . . 248
• Диаграммы с токами . . . 249
• Группы симметрий и самодействие калибровочных бозонов . . . 251
7.2. Великое объединение SU(5), векторные лептокварки и распад протона . . . 253

• Квинтет и калибровочные бозоны. Иерархия масштабов . . . 253
• Декуплет и изменение барионного числа . . . 255

Глава 4. Магнитные моменты барионов в составной кварковой модели 257
§1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов 257
1.1. Сложение моментов вращения . . . 257
• Суммарный момент вращения двух дублетов . . . 258
• Суммарный момент вращения трех дублетов . . . 259
• Правила сложения моментов вращения двух подсистем . . . 261
1.2. Неприводимые тензорные операторы и теорема Вигнера–Эккарта . . . 263
§2. Магнитные моменты системы трех кварков 268
2.1. Спиновая функция барионов в основном состоянии . . . 268
2.2. Магнитные дипольные моменты протона, нейтрона и странных гиперонов . . . 269

Глава 5. Симметрии эллиптических орбит 274
§1. Симметрия в атоме водорода 274
1.1. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа . . . 274
1.2. Скобки Пуассона и симметрия **SO(4)** . . . 276
1.3. Представления алгебры $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ и уровни энергии атома водорода . . . 279
§2. Изотропный гармонический осциллятор в 3D 282
2.1. Комплексная амплитуда колебаний и группа **SU(3)** . . . 282
2.2. Тензор Фрадкина . . . 284
2.3. Представления $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора . . . 287

Приложение 292
§1. Квантовые понятия и обозначения 292
1.1. Частица, траектория, амплитуда вероятности . . . 292
1.2. Наблюдаемые и состояния . . . 295
1.3. Эрмитово сопряжение состояний и операторов наблюдаемых . . . 296
1.4. Коммутатор и совместный базис из собственных векторов набора наблюдаемых . . . 298
1.5. Среднее значение, дисперсия и критерий вырождения . . . 300
1.6. Каноническое квантование . . . 302
§2. Формулы тензорного анализа 304
2.1. Евклидово пространство . . . 304
• Координатный подход . . . 304
• Векторы, ковекторы, тензоры . . . 304
• Связь координатного и инвариантного подходов . . . 309
• Метрический тензор . . . 310
2.2. Тензор Леви-Чивиты . . . 311
• Зеркальная инверсия пространства . . . 314
2.3. Изометрии евклидовой метрики . . . 317
2.4. Градиент, дивергенция, ротор . . . 319
• Ковекторный оператор $\boldsymbol{\nabla}$ . . . 319
• Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе . . . 321
§3. Проективные представления группы Ли 324

Предметный указатель 327
Литература 332

Предисловие

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант конспекта лекций, предлагаемых авторами студентам младших курсов Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета) в весеннем семестре в качестве дополнительной дисциплины, которую они могут включить в свой индивидуальный учебный план. Пререквизитом[1] к этому спецкурсу подразумевается читаемый осенью для студентов МФТИ семестровый курс по теоретической физике, в котором излагаются единые основы механики частиц и полей в фейнмановской формулировке и вводятся понятия, которые мы предполагаем хорошо усвоенными прежде, чем обращаться к материалу настоящего пособия. Именно в этом курсе осеннего семестра студенты знакомятся с основами как классической, так и квантовой механики в формализме действия для элементарных систем, допускающих полное описание своей динамики, и сталкиваются с такими инструментами описания характеристик движения, как векторный анализ, дифференциальная геометрия в криволинейных координатах и теория непрерывных групп для нерелятивистских частиц и полей со спином. Тогда же встает задача использования в физике языка теории представлений простых компактных групп Ли. Эту задачу решает данная книга.

Идея включить в начало этого пособия тезисы, связанные с введением в физику понятий теории групп Ли для описания трансляций и поворотов в евклидовом пространстве, квантования спина нерелятивистского поля, векторного поля спина 1 и спиноров со спином $s = {}^1/_2$, при своей практической реализации показала, что краткое резюме такого материала из предшествующего курса (см. пособие [1]) не является эффективным: многие рассмотренные в специальном предшествующем курсе важные понятия, опорные и физически обоснованные конструкции и операции с ними требуют не только их уверенного знания, но и свежего восприятия в логике предлагаемого читателю нового курса. Поэтому в качестве повторения для читателя, знакомого с пособием «Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии» [1], и в качестве введения в концепцию групп Ли в физике для читателя, не знакомого с указанным пособием, первые страницы данной книги составляют главу о трансляциях и поворотах, которая в значительной степени повторяет представление того же материала в книге [1]. И только после этой главы имеет смысл начинать изложение основ групп и алгебр Ли, при этом осознанно сужая характерную для математических курсов общность рассмотрения до приемлемой в физике степени логической замкнутости, что позволяет уверенно пройти по пути, на котором удалось сделать целый ряд основополагающих открытий в физике 20 века.

Мы излагаем классификацию простых компактных групп Ли по Дынкину с использованием языка квантовой механики для полного набора наблюдаемых величин в гильбертовом пространстве и связи этих физических терминов со стандартными математическими обозначениями. Детально рассматриваются алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$. Излагаются теория неприводимых представлений простых компактных алгебр Ли, вопросы построения представлений $\mathfrak{su}(2)$ с применением к изотопической инвариантности при классификации адронов и представлений, описывающих симметрии ароматов кварков. Для $\mathfrak{su}(3)$ мы вводим схемы Юнга и применяем их для вычисления разложения тензорного произведения представлений в прямую сумму неприводимых представлений. Построенная система понятий и инструментов позволяет нам сформулировать основы классификации фермионов первого поколения Стандартной модели калибровочных взаимодействий по мультиплетам фундаментальных представлений группы Великого объединения SU(5). В качестве одного из следствий такой классификации описывается возможность распада протона.

В отдельной главе мы вычисляем магнитные моменты протона и нейтрона в рамках простой составной кварковой модели адронов. Проводим параллель между задачей разложения тензорного произведения на прямую сумму неприводимых представлений группы поворотов с полуцелыми значениями момента вращения SU(2) и задачей сложения моментов вращения двух подсистем с использованием схем Юнга. Даем определение коэффициентов Клéбша–Гóрдана и затем вычисляем их в простых случаях, которые имеют прямое отношение к спиновому состоянию трех кварков в барионе. Сравнение результатов вычислений в рамках простой статической составной кварковой модели магнитных моментов барионов с экспериментом предоставляет убедительные свидетельства того, что эти барионы являются составными, а не элементарными, поскольку дираковские значения для магнитных моментов протона и нейтрона, если считать эти частицы локальными, как электроны, далеки от наблюдаемых на опыте величин.

В качестве иллюстрации больших возможностей синтеза механики и теории представлений мы описываем симметрии финитного движения частицы в кулоновском поле притяжения и в поле трехмерного гармонического осциллятора и определяем спектр энергий, а также выводим его свойства в отношении

[1]Под пререквизитом в общем смысле этого слова мы понимаем определенный объем знаний, который на момент изучения нового курса не только должен быть уже усвоен студентом на университетском уровне образования, но и необходим для понимания им нового курса.

типа неприводимых представлений алгебры Ли для этих систем и набора допустимых значений орбитального момента в заданном неприводимом представлении. Для решения этих вопросов нет надобности решать уравнение Шрёдингера, коль скоро мы не ставим задачу описания волновых функций: вполне достаточно использовать теорию представлений, применяя установленную Дираком связь скобок Пуассона в классической механике с коммутаторами наблюдаемых величин в квантовой механике.

Мы надеемся, что усвоение понятий и материалов настоящего курса позволит читателю приступить к изучению релятивистской теории как частиц в пространстве-времени Минковского, так и полей, базис которых строится в теории представлений алгебры группы Пуанкаре. Более того, есть надежда, что основы этого курса позволят студентам свободно войти в круг вопросов, связанный с математикой алгебр Ли и их представлений в более сложных построениях, которые актуальны в современной физике, например, алгебра Вирасоро с центральными зарядами, алгебры Каца–Муди и проч.

В. Киселев выражает признательность своим коллегам Р. Рогалеву и К. Рудакову за ценные наставления по теории групп в годы аспирантуры, а также студентам В. Шмидту, Т. Гладыш, А. Бернакевич и А. Новохатнему за замечания и вопросы, положительно повлиявшие на изложение материалов лекций на основе данной книги.

Просим читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу
`kiselev.vv@phystech.edu` с пометкой «`Спецкурс LieGen`».

Наконец, авторы рекомендуют при чтении этой книги держать в уме простую мысль: стройность идеи ускользает от внимания читателя, если с самого начала излагать эту идею скрупулезно и безукоризненно точно, так что претензии читателя по поводу строгости текста — это несомненный симптом того, что идея, описанная в книге, понята верно.

Глава 1

Группа поворотов и спин

Для иллюстрации идей, которые приводят к использованию понятий групп и алгебр Ли при описании симметрий физических систем, мы стартуем с описания преобразований в евклидовом пространстве, полагая, что основы тензорного анализа известны читателю в объеме, который представлен в **§ 2. Формулы тензорного анализа** Приложения на стр. 304. Опыт, полученный в данной главе, формирует логику изложения начал теории групп Ли, которое стартует в главе 2.

• План изложения

Общий порядок изложения вопроса о том, что из себя представляет спин, в этой главе состоит в следующем.

[A] Мы формулируем определение специальных преобразований базиса координат исходного метрического пространства – непрерывных изометрий и отмечаем групповой характер изометрий, включающих в себя тождественное преобразование, вводя при этом понятие бесконечно малого преобразования. Свойства бесконечно малых преобразований определяют алгебру генераторов группы Ли. Эти свойства принято выражать в форме коммутаторов генераторов. Поэтому алгебра становится центральным объектом исследования, поскольку классификация всех полей в исходном координатном пространстве — это определение свойств полей относительно преобразований, составляющих изометрии. Под свойствами полей мы имеем в виду следующее: вводятся новые конечномерные векторные пространства, отличные от исходного метрического координатного пространства, так, что непрерывные групповые преобразования изометрии в исходном метрическом координатном пространстве сопровождаются действием преобразований в новых векторных пространствах с точным соответствием всех законов группы преобразований в исходном координатном пространстве и в новых векторных пространствах. Такое соответствие – гомоморфизм – называется представлением группы. В частности, коммутаторы генераторов в любом таком точном представлении совпадают с коммутаторами в исходном метрическом координатном пространстве. Среди векторных пространств представлений группы выделяются неприводимые: векторное пространство неприводимого представления — это линейная оболочка всех образов действия группы на ненулевой элемент этого векторного пространства. Неприводимое представление принято называть полем, а весь набор неприводимых представлений — базисом всех возможных полей, что и решает задачу классификации полей в исходном метрическом координатном пространстве. Размерность пространства представления в общем случае не совпадает с размерностью исходного координатного пространства, определяемой количеством непрерывных координат, а в нашем случае с размерностью трёхмерного евклидова пространства. Размерности неприводимых представлений находятся в области допустимых значений, которую задают свойства генераторов алгебры Ли. К примеру, тензорное представление спина 2 — это 5-мерное пространство, т. е. тензорное поле имеет пять компонент, каждая из которых зависит от координат 3-мерного евклидова пространства.

[B] Определяющее представление группы, т. е. реализация преобразований изометрии координат пространства, задает алгебру коммутаторов, которая может совпадать с алгеброй другой группы. Такие алгебры называются изоморфными[1]. К примеру, алгебра генераторов поворотов пространства группы специальных ортогональных преобразований вещественных 3-мерных координат SO(3) изоморфна алгебре группы специальных унитарных преобразований двумерных комплекснозначных векторов SU(2). Поэтому представления алгебры генераторов могут включать в себя представления более общей группы, чем группа изометрии исходного евклидова пространства.

[C] Алгебра группы поворотов задает неприводимые представления, т. е. многокомпонентные поля, так что генераторы поворотов в неприводимом представлении — это и есть операторы спина поля в заданном неприводимом представлении. Установив все допустимые виды спиновых матриц, мы тем самым найдем все неприводимые представления группы поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве и, в частности, опишем поле полуцелого спина.

[1] Понятие изоморфизма строго определяется в **§ 1.Группа Ли и ее алгебра** главы 2 на стр. 59 в сноске 17. Здесь же отметим только, что изоморфные структуры, попросту говоря, одинаковы.

Отметим здесь особенность, слабо осознаваемую или мало обсуждаемую в литературе, использующей теорию групп и алгебр Ли в физических приложениях. Если неприводимое представление группы и алгебры Ли принято называть полем, то это означает, что физическая система, неважно, классическая или квантовая эволюционирует и проявлена сразу в целом пучке связанных пространств. И взаимодействие такой системы с другой может протекать сразу в нескольких пространствах, не только в координатном.

§1. Трансляции и повороты

Группа пространственных трансляций, генераторы непрерывных преобразований координат и полей, задача на собственные значения генератора трансляций и волновой вектор плоской волны, коммутатор генераторов, абелева группа трансляций, повороты и матрицы генераторов поворотов для вектора, некоммутативная алгебра генераторов группы поворотов $\mathfrak{so}(3)$, группа O(3), генератор орбитального поворота на примере скалярного поля, генератор поворота для векторного и тензорного полей.

1.1 Генераторы инфинитезимальных преобразований

Введение основных понятий начнем с трансляции.

• Сдвиг ≡ трансляция координат

Действие трансляции определяется преобразованием координат $\boldsymbol{r} \overset{\mathbb{T}}{\mapsto} \boldsymbol{r}_{\mathbb{T}}$ в покомпонентной записи

$$r^{\alpha}_{\mathbb{T}} = r^{\alpha} + a^{\alpha}, \tag{I.1.1}$$

где a^{α} — *глобальный* параметр преобразования, т. е. он не зависит от координат в любой точке пространства

$$\frac{\partial}{\partial r^{\beta}}\, a^{\alpha} \equiv \partial_{\beta} a^{\alpha} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{r}.$$

Это преобразование можно записать как действие оператора трансляции $\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})$, зависящего от многокомпонентного параметра a^{α},

$$r^{\alpha}_{\mathbb{T}} = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})\, r^{\alpha}.$$

Свойства трансляции:

1. Последовательное действие двух трансляций является трансляцией. Действительно,
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b})\, r^{\alpha} = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \left(r^{\alpha} + b^{\alpha}\right) = (r^{\alpha} + b^{\alpha}) + a^{\alpha} = r^{\alpha} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})^{\alpha} = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{r}^{\alpha},$$
или
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$
Более того, последовательное действие трех трансляций в силу
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{c}) \cdot \big(\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})\big) = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \big(\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{c}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b})\big) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})$$
не зависит от их группировки посредством скобок.

2. Существует тождественное преобразование $\mathbb{1} = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{0})$ такое, что
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{0})\, r^{\alpha} = r^{\alpha},$$
и
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{0}) = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{0}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}), \qquad \forall a.$$

3. Обратное преобразование $\hat{\mathbb{T}}^{-1}(\boldsymbol{a})$, сводящее действие двух трансляций к тождественному преобразованию, также является трансляцией, так как для любого $\boldsymbol{a}$
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\mathbb{T}}(-\boldsymbol{a}) = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{0}) = \mathbb{1} = \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\mathbb{T}}^{-1}(\boldsymbol{a}), \quad \text{при} \quad \hat{\mathbb{T}}^{-1}(\boldsymbol{a}) = \hat{\mathbb{T}}(-\boldsymbol{a}).$$

Такие свойства операторов преобразований являются характерными и представляют собой математическую конструкцию *группы*, понятие которой тесно связано с симметриями физических величин (здесь — с симметриями координатного пространства).

Определение. Группой называется множество G, обладающее следующими свойствами:

- на нем задана операция композиции (обозначаемая $\circ$)
$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists \; g_1 \circ g_2 = g_3 \in G,$$
обладающая свойством *ассоциативности*[2]
$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \equiv g_1 \circ g_2 \circ g_3,$$

- в этом множестве существует единичный элемент $\mathbb{1}$ так, что
$$\exists \; \mathbb{1} \in G: \quad \mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} = g, \quad \forall g \in G,$$
- для любого элемента группы задан обратный элемент так, что
$$\forall g \in G \quad \exists \; g^{-1} \in G: \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \mathbb{1}.$$

Как видим, *преобразования трансляции образуют группу.*

Представлением абстрактной группы G называют множество операторов $\hat{T}_G$ со всеми свойствами группы, элементы которого действуют на пространстве представления V. Что такое «свойства группы» нам еще предстоит уточнить, но к ним относится соответствие группового умножения в G последовательному применению операторов такое, что $g_1 \circ g_2 \mapsto \hat{T}_{g_1} \cdot \hat{T}_{g_2}$, т. е. гомоморфизм. Мы будем исследовать конечномерные векторные пространства (множества с конечномерным базисом с операциями суммы элементов и умножения элементов на вещественные (комплексные) числа с обычными дистрибутивными законами для выражений со скобками), т. е. линейные оболочки базисных векторов, $\dim(V) < \infty$. Соответствие элементов группы G и операторов представления группы $\hat{T}_G$ может быть взаимнооднозначным: тогда представление называют точным, а отображение группы на операторы — изоморфизмом. В рассматриваемом случае трансляций векторное пространство — это декартовы координаты евклидова пространства, $V = \mathrm{Span}(\{\boldsymbol{r}\})$, а элементы группы — $\hat{T}(\boldsymbol{a})$. Представление группы трансляций на евклидовом пространстве координат считают *определяющим представлением.* В дальнейшем для простоты изложения мы будем рассматривать именно представления группы на векторных пространствах. Тогда наряду с действием элементов группы как матриц на элементы пространства в нем также действуют сложение матриц преобразований и умножение матрицы преобразований на число. Количество параметров непрерывных преобразований, которое равно размерности вектора a^α, называют размерностью группы $\dim(G)$. Размерность группы $\dim(G)$,вообще говоря, не совпадает с размерностью координатного пространства $\dim(\boldsymbol{r})$. Это видно на примере преобразований, сохраняющих скалярное произведение 3-мерного евклидова пространства. Они состоят из трансляций и поворотов: 3 параметра трансляций и 3 угла поворотов в этом евклидовом пространстве. Вместе такие преобразования образуют 6-параметрическую группу, так что число параметров, 6 не равно числу координат евклидова пространства, трем.

Общая особенность как трансляций, так и поворотов заключается в том, что они зависят от непрерывного параметра. Группы, элементы которых параметризуются непрерывными величинами называются *группами Ли*[3].

Рассмотрим бесконечно малые (инфинитезимальные) трансляции координат в окрестности тождественного преобразования,
$$\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}) \approx \mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha, \qquad \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{0},$$
где в общем случае точного представления мы вводим понятие *генераторов* инфинитезимальных преобразований
$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i} \lim_{\boldsymbol{a}\to 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a}). \tag{I.1.2}$$

Так как здесь мы впервые использовали тензорные обозначения для свертки верхних индексов с нижними с использованием соглашения Эйнштейна о суммировании по «немым» индексам, то мы настоятельно

[2] В физических задачах свойство ассоциативности обычно выполняется по построению: преобразования физических величин *определяются* как последовательное действие соответствующих сложных функций от этих величин, например, $f_3[f_2[f_1(x)]] \equiv f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) \equiv (f_3 \circ f_2) \circ f_1(x) \equiv f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x)$. Однако к матричному умножению обратимых матриц, которое является ассоциативным, можно добавить операцию инверсии: $\mathfrak{Inv} \circ A = A^{-1}$. Присоединение инверсии матрицы к множеству операций, осуществляемых обратимыми матрицами тут же приводит к неассоциативности, поскольку $\mathfrak{Inv} \circ (A \circ B) = B^{-1} \circ A^{-1}$, а $(\mathfrak{Inv} \circ A) \circ B = A^{-1} \circ B \neq B^{-1} \circ A^{-1}$.

[3] В строгой формулировке определяют взаимнооднозначное непрерывное отображение (гомеоморфизм) между открытыми подмножествами вещественных n-мерных параметров и открытой областью элементов группы, т. е. задают локальные координатные сетки и свойства функций перехода от одной локальной координатной сетки параметров преобразований к другой в области их перекрытия, а также возможность введения непересекающихся окрестностей для двух различных точек (свойство Хаусдорфа).

рекомендуем читателю ознакомиться с **§2. Формулы тензорного анализа** в Приложении на стр. 304, даже если читатель привык к такому их использованию. В этом приложении мы аккуратно договариваемся о смысле таких обозначений, важных для физического понимания явлений, описываемых на языке групп и алгебр Ли.

Для закона преобразования скалярной, векторной или тензорной функции, т. е. поля $\Phi(\boldsymbol{r})$, важно помнить, что в случае трансляции

$$\frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^{\beta}} = \frac{\partial (r^{\alpha} + a^{\alpha})}{\partial r^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Поэтому при обратимом переходе от исходных координат к штрихованным в стандартном законе преобразования тензорных величин ранга n в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \, \Phi^{\beta_1 \ldots \beta_n}(\boldsymbol{r})$$

как ковариантный, так и контравариантный индекс свертывается с символом Кронекера, т. е. не меняется при рассмотрении трансляций, а значит, тензорные индексы у величин можно опустить. Преобразование трансляции вектора координат евклидова пространства позволяет определить другой оператор $\hat{\mathbb{T}}$ уже на полях Φ такой, что

$$\hat{\mathbb{T}} \circ \Phi(\boldsymbol{r}) \equiv \Phi_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{r}_{\mathbb{T}}) = \Phi'(\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r}' \equiv \boldsymbol{r}_{\mathbb{T}}, \quad \Phi' \equiv \Phi_{\mathbb{T}}.$$

Его действие на поле определено равенством

$$\Phi'(\boldsymbol{r}') = \Phi(\boldsymbol{r}),$$

т. е.

$$\Phi_{\mathbb{T}}(\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}) = \Phi(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \Phi(\hat{\mathbb{T}}(-\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}).$$

Обратим внимание читателя на то, что одним символом мы обозначили два разных оператора: первый оператор мы определили на пространстве координат, а второй действует на поля, скалярные, векторные и тензорные. Эти операторы мы будем считать разными представлениями одного оператора. Тот, который действует на пространстве координат, называется оператором в определяющем представлении группы трансляций.

Итак, преобразованная оператором трансляции функция есть та же функция от аргумента, преобразованного оператором обратной трансляции определяющего представления. Для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) \approx \Phi(\boldsymbol{r}) - a^{\alpha}\partial_{\alpha}\Phi(\boldsymbol{r}), \qquad \Phi_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{r}) = (\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_{\alpha}a^{\alpha})\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma_{\alpha} = -\mathrm{i}\partial_{\alpha} \equiv \hat{k}_{\alpha}.$$

Физический смысл генератора трансляций $\hat{k}_{\alpha}$ становится ясным, если рассмотреть его действие на произвольную функцию $f(\boldsymbol{r})$. Действительно, ряд Тейлора дает разложение

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!}\, a^{\alpha_1} \ldots a^{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\boldsymbol{r})}{\partial r^{\alpha_1} \ldots \partial r^{\alpha_n}} = \sum_n \frac{1}{n!} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\partial})^n f(\boldsymbol{r}) \\ &= e^{a^{\alpha}\partial_{\alpha}} f(\boldsymbol{r}) = e^{\mathrm{i}a^{\alpha}\hat{k}_{\alpha}} f(\boldsymbol{r}). \end{aligned}$$

В частности, для собственной функции генератора

$$f(\boldsymbol{r}) = e^{\mathrm{i}r^{\alpha}k_{\alpha}}, \qquad -\mathrm{i}\partial_{\alpha} f(\boldsymbol{r}) = \hat{k}_{\alpha} f(\boldsymbol{r}) = k_{\alpha} f(\boldsymbol{r}).$$

Заметим, что последнее из приведенных равенств — это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций. Таким образом, генератор $\hat{k}_{\alpha}$ с вещественным собственным значением задает волновой вектор плоской монохроматической волны[4].

[4]Отметим, что плоская монохроматическая волна задает амплитуду вероятности достоверности траектории свободной частицы. В общем случае амплитуда вероятности достоверности траектории обозначается символом Ψ и определяется через действие S как $\Psi = \exp\{\mathrm{i}S/\hbar\}$, где S удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якóби $\nabla_{\alpha}S = p_{\alpha}$, $\partial S/\partial t = -E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ (см. [1]). Для свободной частицы импульс и энергия сохраняются, так что уравнения Гамильтона–Якоби в частных производных легко интегрируются, и $S = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} - E\,t + \text{const.}$, что дает амплитуду вероятности для волны де Бройля. При этом вероятность достоверности одиночной траектории равна $W = |\Psi|^2 = 1$. Согласно гипотезе де Бройля волновой вектор $\boldsymbol{k}$ связан с импульсом: $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$. Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует на пространстве амплитуд вероятности Ψ: $-\mathrm{i}\hbar\partial_{\alpha} = \hat{p}_{\alpha}$. В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. Теория операторов в пространстве амплитуд вероятности относится не к классической, а к квантовой механике.

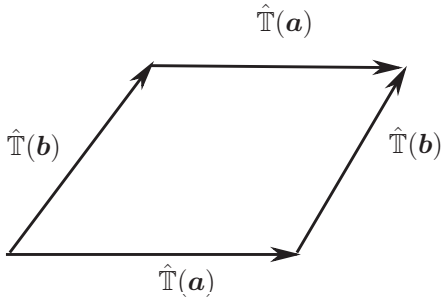


Рис. 1.1: Композиция двух трансляций в прямом и обратном порядке.

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных преобразований

$$\Big(\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b})-\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{a})\Big)\,f(\boldsymbol{r})=-a^{\alpha}b^{\beta}(\hat{k}_{\alpha}\hat{k}_{\beta}-\hat{k}_{\beta}\hat{k}_{\alpha})f(\boldsymbol{r}),$$

смысл которой заключается в сравнении результатов композиции сдвигов при их чередовании в прямом и обратном порядке (см. рис. 1.1). Отметим, что такое сравнение результатов двух комбинаций преобразований возможно при действии на поле $\Phi(\boldsymbol{r})\equiv f(\boldsymbol{r})$, поскольку полученные результаты — это функции, которые можно вычитать.

Вместе с тем можно поставить вопрос в более общем виде. В силу группового характера преобразований произведение операторов представления группы $\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})$ как композиция двух элементов группы является элементом той же группы, как и композиция этих операторов в обратном порядке $\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})$. Для каждой композиции существует обратный элемент, в частности для последнего произведения это $\big(\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\big)^{-1}$. Поэтому произведение

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\big(\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\big)^{-1}=\hat{T}(\boldsymbol{c})$$

также является элементом группы трансляций с параметром $\boldsymbol{c}$. Умножая последнее соотношение справа на $\big(\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\big)$, найдем

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})=\hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}). \tag{I.1.3}$$

Отсюда заключаем, что групповой параметр $\boldsymbol{c}$ является функцией параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{I.1.4}$$

Эта и предыдущая формулы фактически являются определением бинарной функции от параметров группы, задающей закон композиции элементов группы на языке непрерывных параметров группы Ли.

Приняв, что тождественное преобразование $\mathbb{1}\equiv\hat{T}(\boldsymbol{0})$ — это преобразование с нулевыми значениями параметров группы, получим

$$\hat{T}(\boldsymbol{0})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})=\hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{0})\quad\Rightarrow\quad\hat{T}(\boldsymbol{b})=\hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

и

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{0})=\hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{0})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\quad\Rightarrow\quad\hat{T}(\boldsymbol{a})=\hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

Следовательно, групповой характер преобразований приводит к соотношениям

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}. \tag{I.1.5}$$

Тогда разложение в ряд Тейлора функции двух аргументов $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ при $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{0}$ с учетом условия (I.1.5) приводит к выражению[5]

$$c^{\gamma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=f^{\gamma}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}+\mathfrak{o}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{I.1.6}$$

[5]Разложим векторную функцию $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ до линейных членов по $\boldsymbol{a}$ возле нуля:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\approx\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})+a^{\alpha}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}+a^{\alpha}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})=a^{\alpha}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}).$$

Затем разложим это выражение до линейных членов по $\boldsymbol{b}$ возле нуля:

$$a^{\alpha}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})\approx a^{\alpha}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+a^{\alpha}b^{\beta}\frac{\partial^2}{\partial b^{\beta}\partial a^{\alpha}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}+a^{\alpha}b^{\beta}\boldsymbol{f}_{\alpha\beta},$$

где

$$f^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 c^{\gamma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\partial b^{\beta}\partial a^{\alpha}}\Big|_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\to(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})}.$$

Нелинейные вклады $\mathfrak{o}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ не играют роли в касательном пространстве групповых координат возле групповой единицы.

Рассмотрим элемент преобразований $\hat{T}(\boldsymbol{c})$ и обратный ему групповой элемент $\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c}) = \hat{T}(\tilde{\boldsymbol{c}})$, где групповая координата обратного элемента является функцией группового параметра исходного элемента, $\tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{c})$. При $\boldsymbol{c} \to \boldsymbol{0}$ в линейном приближении по групповому параметру согласно определению генератора преобразования (I.1.2) находим, что

$$\hat{T}(\boldsymbol{c}) \simeq \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \qquad \hat{T}(-\boldsymbol{c}) \simeq \mathbb{1} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \quad \Rightarrow \quad \hat{T}(-\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{c}) \simeq \mathbb{1}.$$

Поскольку

$$\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{c}) = \mathbb{1},$$

то в касательном пространстве групповых параметров[6]

$$\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c}) \cong \hat{T}(-\boldsymbol{c}). \tag{I.1.9}$$

После умножения (I.1.3) слева на обратный элемент $\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c})$ получим

$$\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b}) = \hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}) \quad \text{или} \quad \hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b}).$$

С учетом выражения для обратного элемента (I.1.9) в касательном пространстве приходим к выражению

$$\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}) \simeq \hat{T}(-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b}),$$

что следует сравнить с общим выражением (I.1.3), определяющим бинарную функцию композиции (I.1.4),

$$\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}))\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b}).$$

В итоге в касательном пространстве групповых параметров, т. е. удерживая в разложении линейные по $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ члены, получаем дополнительное к формулам (I.1.5) и (I.1.6) условие

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \simeq -\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \tag{I.1.10}$$

что в компонентах дает линейное преобразование в касательном пространстве групповых параметров

$$c^{\gamma}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f^{\gamma}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}, \qquad f^{\gamma}_{\alpha\beta} = -f^{\gamma}_{\beta\alpha}. \tag{I.1.11}$$

Постоянные $f^{\gamma}_{\alpha\beta}$, антисимметричные по перестановке нижних, ковариантных индексов называются структурными константами группы, и они имеют одни и те же значения в любом точном представлении группы по определению самого понятия представления. В частности, значения структурных констант можно установить в исходном, определяющем представлении при рассмотрении действия элементов группы на координаты.

---

[6] Равенство $\hat{T}^{-1}(\boldsymbol{c}) \equiv \hat{T}(-\boldsymbol{c})$ можно сделать точным специальным выбором групповых параметров. Для этого можно потребовать, чтобы генераторы преобразований по каждому направлению, которое задано в касательном пространстве единичным вектором $\boldsymbol{\mathfrak{e}}$, были одними и теми же возле каждого элемента группы и совпадали с генераторами, которые задаются вблизи единичного элемента $\hat{T}(\boldsymbol{0}) = \mathbb{1}$, а именно, при $\mathrm{d}a \to 0$

$$\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}(a+\mathrm{d}a)\big) = \hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,\mathrm{d}a\big)\cdot\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a\big) = \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\mathfrak{e}^{\alpha}\Gamma_{\alpha},\mathrm{d}a\big)\cdot\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a\big)}{\mathrm{d}a} = -\mathrm{i}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\big)\cdot\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a\big).$$

По сути, эти формулы означают, что групповое преобразование, равное произведению групповых преобразований по фиксированному направлению, является преобразованием по тому же направлению с групповым параметром, равным сумме групповых параметров в элементах произведения. Поскольку произведение $\boldsymbol{\mathfrak{e}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}$ не зависит от группового параметра, то решение дифференциального уравнения с учетом граничного условия $\hat{T}(\boldsymbol{0}) = \mathbb{1}$ имеет стандартный экспоненциальный вид

$$\hat{T}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a\big) = \exp\Big(-\mathrm{i}\big(\boldsymbol{\mathfrak{e}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\big)a\Big). \tag{I.1.7}$$

При таком выборе групповых параметров, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\mathfrak{e}}\,a$ для произвольного направления, групповые операторы имеют вид

$$\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \exp\big(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\big) \quad \Rightarrow \quad \hat{T}^{-1}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}\big(-\boldsymbol{a}\big). \tag{I.1.8}$$

Экспоненциальное представление (I.1.8) и, как следствие, утверждение о том, что элемент, обратный к элементу с групповым параметром $\boldsymbol{a}$, имеет групповой параметр $-\boldsymbol{a}$, определяют универсальную накрывающую группу, построенную по генераторам исходной группы. В общем случае пространство групповых параметров исходной группы может отличаться от специального введенного в (I.1.8) пространства параметров экспоненциального представления: этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Используя понятие генератора инфинитезимальных преобразований (I.1.2) и отбрасывая все нелинейные по групповым координатам вклады, т. е. в приближении касательного пространства групповых координат возле групповой единицы, установим, что

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b}) = \hat{T}(\boldsymbol{c})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{b})\cdot\hat{T}(\boldsymbol{a}) \quad \Rightarrow$$
$$\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha\right)\cdot\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\beta b^\beta\right) = \left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\gamma c^\gamma\right)\cdot\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\beta b^\beta\right)\cdot\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha\right) \quad \Rightarrow$$
$$(-\mathrm{i})^2 a^\alpha b^\beta\left(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta - \Gamma_\beta\Gamma_\alpha\right) = -\mathrm{i}c^\gamma\Gamma_\gamma.$$

Величина

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_\alpha\Gamma_\beta - \Gamma_\beta\Gamma_\alpha, \tag{I.1.12}$$

которая называется коммутатором генераторов, в силу групповых свойств $c^\gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f^\gamma_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$ при $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{0}$ выражается через линейную комбинацию генераторов групповых преобразований с коэффициентами в виде структурных констант группы:

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}\,\Gamma_\gamma. \tag{I.1.13}$$

В выражении (I.1.6) линейное по обоим аргументам приближенное выражение бинарной функции композиции порождает точное равенство, имеющее характер предела, так как генераторы суть пределы при групповых параметрах, стремящихся к нулю.

В этом заключается основная идея изучения групп Ли: исследовать линейные по параметрам аппроксимации групповых преобразований, т. е., как говорят, линейные зависимости в касательном пространстве тождественного преобразования. Соотношения типа (I.1.13) определяют алгебру коммутаторов для генераторов группы Ли. Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по компонентам декартовых координат

$$\partial_\alpha\partial_\beta f(\boldsymbol{r}) = \partial_\beta\partial_\alpha f(\boldsymbol{r})$$

следует, что

$$[\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\beta] = \hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta\hat{k}_\alpha = 0,$$

т. е. результат не зависит от порядка преобразований.

В общем случае рассматривают следующую математическую конструкцию для генераторов инфинитезимальных преобразований группы Ли.

Определение. Алгеброй Ли Γ называют векторное пространство Γ, в котором определена композиция элементов этого векторного пространства — скобка Ли $[\Gamma_k, \Gamma_j]$ со свойствами

- линейности
$$\forall\,\Gamma_k,\,\Gamma_j\in\Gamma \quad \exists\,[\Gamma_k,\Gamma_j]\in\Gamma, \qquad [\Gamma_1, c_2\Gamma_2 + c_3\Gamma_3] = c_2[\Gamma_1,\Gamma_2] + c_3[\Gamma_1,\Gamma_3],$$
- антисимметрии
$$[\Gamma_1,\Gamma_2] = -[\Gamma_2,\Gamma_1],$$
- тождества Якóби[7] (циклическая перестановка элементов в скобке)
$$[[\Gamma_1,\Gamma_2],\Gamma_3] + [[\Gamma_2,\Gamma_3],\Gamma_1] + [[\Gamma_3,\Gamma_1],\Gamma_2] = 0.$$

Если

$$\forall\,\Gamma_1,\,\Gamma_2\in\Gamma \qquad [\Gamma_1,\Gamma_2] = 0,$$

то алгебра называется коммутативной (или абелевой).

Выше мы показали, что

$$\hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta\hat{k}_\alpha \equiv [\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\beta] = 0,$$

так что *алгебра трансляций коммутативна,* т. е. контур, показанный на рис. 1.1, замкнут.

Если генераторы представлены матрицами в векторном пространстве, то их коммутатор определяется матричным умножением

$$[A, B] = AB - BA,$$

и, так как не всякие матрицы при умножении в прямом и обратном порядке дают одинаковый результат, становится ясно, что существуют и некоммутативные алгебры. Матричное представление генераторов

[7] Следствие ассоциативности для бесконечно малых преобразований группы Ли.

позволяет определить однородные полиномы по генераторам степени k с симметричными по перестановкам индексов коэффициентами

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum h^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{i_1} \dots \Gamma_{i_k},$$

среди которых особо выделяют операторы Казимира, которые коммутируют со всеми генераторами

$$[C_k, \Gamma_n] = 0, \qquad \forall\, \Gamma_n \in \Gamma.$$

Такие операторы, коммутирующие со всеми генераторами, называют инвариантными. В конечномерных векторных пространствах представлений группы операторы Казимира являются квадратными матрицами, и число операторов Казимира, собственные значения которых не выражаются через собственные значения других операторов Казимира, не зависит от представления и называется *рангом* как алгебры Ли, так и группы Ли. Набор линейно независимых попарно коммутирующих генераторов группы образует коммутативную *подалгебру Картана H*

$$\forall\, h_1, h_2 \in H \quad [h_1, h_2] = 0.$$

Число генераторов в подалгебре Картана также равно рангу группы.

В случае группы трансляций евклидова пространства все генераторы по трем осям координат пространства коммутируют, так что сдвиги по каждой из осей можно производить в произвольном порядке и говорить о трех абелевых одномерных группах трансляций, каждая из которых имеет ранг, равный 1. Такая одномерная группа (по оси x, например) называется $\mathrm{U}_{\mathbb{Z}}(1)$: собственные функции генераторов группы, как мы видели, сводятся к

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka},$$

где k — собственное значение генератора абелевой группы, а a — параметр группы (сдвиг координаты)[8].

Если множество значений групповых параметров ограничено, как это имеет место в случае окружности радиуса R, например, то и элементы группы имеют фиксированный конечный интервал периодичности $a_{\text{bord}} = 2\pi R$, причем $\exp(\mathrm{i}ka_{\text{bord}}) = 1$. Такая группа называется компактной, а собственные значения k оказываются квантованными: $k = n/R$, $n \in \mathbb{Z}$. В случае, когда параметр трансляции неограничен, как на прямой, группа некомпактна, а собственное значение k — это произвольное вещественное число.

• Группа поворотов

Рассмотрим повороты на плоскости, т. е. в 2-мерном евклидовом пространстве (см. рис. 1.2).

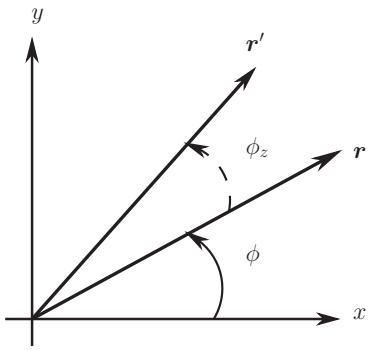


Рис. 1.2: Поворот на плоскости.

Для координат вектора

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \end{cases}$$

после поворота на угол ϕ_z в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, получим

$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi + \phi_z) = x\cos\phi_z - y\sin\phi_z, \\ y' = r\sin(\phi + \phi_z) = x\sin\phi_z + y\cos\phi_z, \end{cases} \tag{I.1.14}$$

[8]Символ $\mathbb{Z}$ в обозначении группы указывает число намотки: поскольку период в аргументе экспоненты равен 2π необходимо указать, в каком интервале целого числа периодов находится фаза комплексного числа.

где мы использовали обычные тригонометрические равенства:

$$\cos(\phi+\phi_z) = \cos\phi\cos\phi_z - \sin\phi\sin\phi_z,$$
$$\sin(\phi+\phi_z) = \cos\phi\sin\phi_z + \sin\phi\cos\phi_z.$$

В матричных обозначениях для векторов-столбцов этот поворот запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_2(\phi_z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Вычислим детерминант матрицы 2-мерного поворота

$$\det R_2(\phi_z) = \cos^2\phi_z + \sin^2\phi_z = 1.$$

Очевидно, что поворот на нулевой угол является тождественным преобразованием

$$R_2(0) = \mathbb{1}.$$

После каждого поворота можно совершить обратный поворот

$$R_2(\phi_z)R_2(-\phi_z) = \mathbb{1},$$

причем обратная матрица является транспонированной

$$R_2(-\phi_z) = R_2^{\mathrm{T}} = R_2^{-1}(\phi_z).$$

После несложных тригонометрических выкладок можно найти, что два последовательных поворота есть также поворот на угол, равный сумме углов (*правило сложения углов*),

$$R_2(\phi_1)R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1+\phi_2).$$

Таким образом матричное умножение соответствует композиции элементов *группы поворотов*.

Генераторы преобразований определяются дифференцированием по параметрам группы поворотов вблизи тождественного преобразования (см. (I.1.2)). В частности, изученный нами поворот на плоскости $\{x,\, y\}$ с осью поворота, перпендикулярной плоскости $\{x,\, y\}$ и направленной по оси z, имеет генератор

$$s_z \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\lim_{\phi_z\to 0}\frac{\partial}{\partial\phi_z}R_2(\phi_z) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.1.15}$$

Рассмотрим случай некоммутативной алгебры на примере поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которые, как и трансляции, оставляют инвариантной длину вектора. В 3-мерном евклидовом пространстве с *правой тройкой базисных векторов* легко получить вид матриц поворотов с осями вдоль базисных векторов. Так при повороте вокруг оси z, т. е.в плоскости (x, y), z–компоненты координат остаются неизменными, а матрица поворотов размера 3×3 получается из явного вида матрицы $R_2(\phi_z)$, так что

$$R(\phi_z) = \begin{pmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$s_z = \mathrm{i}\lim_{\phi_z\to 0}\frac{\partial}{\partial\phi_z}R(\phi_z) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— генератор поворота в плоскости } \{x,\, y\}, \tag{I.1.16}$$

Заметим, что имеет место правило циклической перестановки индексов: при повороте в плоскости $\{x,\, y\}$, т. е. с осью вдоль z, ненулевыми значениями в матрице генератора s_z являются только элементы[9]

$$(s_z)^x_{\bullet\, y} = -\mathrm{i} \text{ и } (s_z)^y_{\bullet\, x} = \mathrm{i},$$

и, стало быть, отличны от нуля только элементы матрицы генератора с теми значениями индексов, которые обозначают плоскость, в которой производится поворот. Знак минус или плюс перед мнимой

[9] В матрице $\hat{M}^{\beta}_{\bullet\,\alpha}$ верхний индекс β является индексом номера строки (элемента матрицы в столбце с номером α), так как в порядке следования индексов у матрицы этот индекс указан как первый с помощью точки, а нижний α — второй, и он нумерует столбцы – элементы матрицы в строке с номером β.

единицей ненулевого матричного элемента определяется тем, какую тройку, правую или левую образуют ó си индексов в порядке следования оси поворота (первая ось) и направления в плоскости поворота от одной оси (вторая ось) к другой (третья ось). Общий вид матрицы поворота $R(\phi\,\boldsymbol{\mathcal{O}})$ на угол ϕ вокруг оси, заданной единичным вектором $\boldsymbol{\mathcal{O}}$, трехмерного вектора координат

$$\boldsymbol{r_\phi} = R(\phi\,\boldsymbol{\mathcal{O}})\cdot\boldsymbol{r} \tag{I.1.17}$$

в терминах матричных элементов имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} (R)^x_{\bullet x} & (R)^x_{\bullet y} & (R)^x_{\bullet z} \\ (R)^y_{\bullet x} & (R)^y_{\bullet y} & (R)^y_{\bullet z} \\ (R)^z_{\bullet x} & (R)^z_{\bullet y} & (R)^z_{\bullet z} \end{pmatrix}. \tag{I.1.18}$$

Это позволяет однозначно записать

$$s_y = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— генератор поворота в плоскости } \{z,\,x\}, \tag{I.1.19}$$

$$s_x = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— генератор поворота в плоскости } \{y,\,z\}. \tag{I.1.20}$$

В декартовых координатах евклидова пространства метрика $g_{\alpha\beta}$ задается единичной матрицей

$$g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta},$$

так что контравариантные верхние и ковариантные нижние индексы у компонент тензоров эквивалентны при условии, что не меняется порядок следования этих индексов. В частности, эквивалентны компоненты матриц генераторов поворотов

$$(s_\alpha)^\beta_{\bullet\gamma} \cong (s_\alpha)_{\beta\gamma}. \tag{I.1.21}$$

Мы будем пользоваться этой эквивалентностью при записи тензорных компонент в евклидовом пространстве, указывая все индексы снизу, если речь идет о декартовых координатах. С учетом (I.1.21) матрица генератора поворотов вокруг альфтой оси равна

$$(s_\alpha)_{\beta\gamma} = -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

что в матричных обозначениях совпадает с записью в явном виде (I.1.16)–(I.1.20).

Рассмотрим, возникает ли различие в преобразовании векторов при смене порядка двух поворотов вокруг разных осей? Для этого вычислим коммутаторы, которые в данном случае определяются умножением матриц (I.1.16)–(I.1.20):

$$[s_x, s_y] = \mathrm{i}\,s_z, \quad [s_y, s_z] = \mathrm{i}\,s_x, \quad [s_z, s_x] = \mathrm{i}\,s_y. \tag{I.1.22}$$

Важно заметить аналогичность вида этих коммутаторов, которая при циклической перестановке индексов осей у генераторов поворотов переводит выражения для одного коммутатора в выражение для другого. Более того, из описанной нами ранее связи коммутатора двух генераторов групповых преобразований с вычислением разности действия двух последовательных преобразований с такими генераторами в прямом и обратном порядке видим, например, что композиции двух малых поворотов последовательно сначала вокруг оси y, а потом вокруг оси x, и наоборот, сначала вокруг оси x, а потом вокруг оси y, не совпадают, а отличаются на поворот вокруг оси z и т.п. Нетрудно убедиться, что тождества Якóби для генераторов группы поворотов справедливы. В итоге, в 3-мерном евклидовом пространстве *алгебра генераторов группы поворотов некоммутативна.*

С использованием тензора Леви-Чивиты коммутационные соотношения для генераторов группы поворотов (т. е. алгебра генераторов) примут вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma. \tag{I.1.23}$$

Мы видим, что это — некоммутативная алгебра Ли.

В силу свойств матриц поворотов,

$$R \cdot R^{\mathrm{T}} = \mathbb{1} \quad \text{— ортогональности, O и}$$
$$\det R = 1 \quad \text{— специального отбора по значению детеминанта, S}$$

группа поворотов 3-мерного евклидова пространства обозначается символом SO(3), а ее алгебра — $\mathfrak{so}(3)$.

Группа SO(3) имеет единственный инвариант[10] — оператор Казимира, заданный суммой квадратов генераторов поворотов $\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$, который на векторах евклидова пространства, т. е. в определяющем представлении группы, имеет вид

$$C_2 = \boldsymbol{s}^2 \;\mapsto\; (s_\alpha \cdot s_\alpha)_{\beta\beta'} = (s_\alpha)_{\beta\gamma}(s_\alpha)_{\gamma\beta'} = (-\mathrm{i})^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\gamma\beta'} = 2\delta_{\beta\beta'} = 2 \cdot \mathbb{1}_{\beta\beta'}. \tag{I.1.24}$$

Группу поворотов SO(3) и группу трансляций объединяют в одну группу преобразований ISO(3). В эту группу не включены зеркальные отражения.

• Группа O(3)

Группа O(3) ортогональных преобразований 3-мерного евклидова пространства состоит из двух типов преобразований, отличающихся знаком детерминанта, который принимает значения ± 1 (собственные и несобственные повороты[11]). Переход же от одного типа преобразований к другому осуществляется с помощью *дискретных* преобразований зеркального отражения по каждой из осей декартова пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}_x\mathbb{P}_y\mathbb{P}_z$. Так что схематически можно записать:

$$\boxed{\mathrm{SO}_+(3), \quad \det R = +1}$$
$$\mathbb{P} \uparrow \downarrow \mathbb{P}$$
$$\boxed{\mathrm{SO}_-(3), \quad \det R = -1}$$

Полная же группа изометрии евклидова пространства включает в себя наряду с поворотами O(3) (с учетом отражений) еще и трансляции, так что говорят о неоднородной (inhomogeneous, I) группе IO(3), или в случае без отражений о неоднородной группе ISO(3).

• Спин и общий вид генераторов поворотов при действии на поля

Помимо приведенного нами вида генераторов группы поворотов в матричной форме, когда они действуют как линейные преобразования на компоненты вектора координат в декартовой системе, можно написать и общий вид этих генераторов для произвольной скалярной функции от координат $\boldsymbol{r}$, т. е. для скалярного поля $\Phi = f(\boldsymbol{r})$. Так же, как и в случае трансляций, мы будем использовать один и тот же символ для обозначения операторов поворотов в различных представлениях, считая, что оператор одной природы действует на разных пространствах: на координаты метрического пространства или на поля. Определим скалярную функцию $f(r)$ как такую, чьё значение не зависит от выбора базиса в векторном пространстве координат[12] $\boldsymbol{r}$,

$$f_G(\boldsymbol{r}_G) = f(\boldsymbol{r}), \tag{I.1.25}$$

где G — оператор поворотов, который преобразует и координаты, и скалярные функции:

$$\boldsymbol{r}_G = G \cdot \boldsymbol{r}, \qquad G \circ f(\boldsymbol{r}) = f_G(\boldsymbol{r}_G) = f_G(G \cdot \boldsymbol{r}).$$

Для бесконечно малых преобразований (см. (I.1.17))

$$\boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}_G\boldsymbol{r} = (1 - \mathrm{i}s_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma)\boldsymbol{r},$$

[10] Другие инварианты могут быть построены как функции этого одного, например, квадрат инварианта — это тоже инвариант, значение которого определяется исходным инвариантом.

[11] Специальные преобразования с $|\det R| = 1$ могут быть собственными $\det R = +1$ и несобственными $\det R = -1$, поэтому логично отличать их, вводя нижний индекс $\pm$. Исторически сложилась не столь логичная традиция использовать литеру S только для собственных преобразований.

[12] Проще всего это понять с так называемой пассивной точки зрения: значение функции от точки пространства не зависит от выбора базиса в пространстве, а значит, значение функции от координат в исходном базисе совпадает со значением новой функции в новом базисе.

где дифференциал $s_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma = \mathrm{d}\phi\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})$ зависит от параметров поворота $\mathrm{d}\phi_\gamma = \mathrm{d}\phi\,\boldsymbol{\mathcal{O}}_\gamma$, а генераторы s_γ представляют собой рассмотренные нами выше матрицы (I.1.16)–(I.1.20). Тогда

$$f_G(\boldsymbol{r}_G) = f_G(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial f_G}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}_G r^\alpha = f_G(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial f}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}_G r^\alpha, \tag{I.1.26}$$

где во втором слагаемом мы заменили преобразованную функцию на исходную, потому что эта операция приводит в разнице второго порядка малости, не существенной здесь для нашего рассмотрения, так что согласно (I.1.25) изменение скалярной функции (скалярного поля) в точке $\boldsymbol{r}$

$$\delta_G f(\boldsymbol{r}) \equiv f_G(\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial f}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}_G r^\alpha. \tag{I.1.27}$$

Определим действие оператора преобразований с генератором $\hat{l}_\gamma$ на скалярное поле $f(\boldsymbol{r})$ согласно

$$(1+\delta_G) f(\boldsymbol{r}) \equiv (1 - \mathrm{i}\,\hat{l}_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma) f(\boldsymbol{r}) \tag{I.1.28}$$

и получим

$$\mathrm{i}\,\hat{l}_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma\, f(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}_G r^\alpha.$$

Значит,

$$f_G(\boldsymbol{r}_G) = f_G(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\,\hat{l}_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma\, f(\boldsymbol{r}). \tag{I.1.29}$$

В случае поворота в 2-мерном пространстве (вокруг оси z на угол $\mathrm{d}\phi_z$ в соотношениях (I.1.14) при $\phi_z \to 0$)

$$\mathrm{d}_G r^\alpha \;\mapsto\; \mathrm{d}_G x = -y\mathrm{d}\phi_z, \quad \mathrm{d}_G y = x\mathrm{d}\phi_z, \quad \mathrm{d}_G z = 0,$$

а

$$f_G(\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}) \approx -\mathrm{i}\,\hat{l}_z \mathrm{d}\phi_z\, f(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial f}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}_G r^\alpha = -\left(\mathrm{d}_G y\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{d}_G x\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\mathrm{d}\phi_z\,\left(x\,\frac{\partial f}{\partial y} - y\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{i}\,\hat{l}_z = x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x} = x\partial_y - y\partial_x = \epsilon_{z\beta\gamma} r_\beta \partial_\gamma.$$

В общем случае (в декартовых координатах нижние и верхние индексы не отличают!)

$$\hat{l}_\alpha = -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, r_\beta \partial_\gamma = -\mathrm{i}\,(\boldsymbol{r}\times\nabla)_\alpha, \quad \text{где} \quad \partial_\gamma = \nabla_\gamma.$$

Поскольку величина $\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\nabla$ отвечает оператору импульса, то величина

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hbar\,\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}} \tag{I.1.30}$$

является орбитальным моментом вращения $\boldsymbol{L}$.

Задача 1. Вычислите коммутаторы

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta], \qquad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta], \qquad [\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta].$$

Решение. Для безошибочных расчетов с операторами необходимо воспользоваться методом вычислений, в котором в явном виде указать, что операторы действуют на некоторую функцию $\psi(\boldsymbol{r})$. Тогда с учетом правила Эйнштейна для суммирования по немым индексам (немой индекс в формуле встречается исключительно дважды!) найдем

$$\begin{aligned}
[\hat{l}_\alpha, r_\beta]\psi(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\big(r_\beta\,\psi(\boldsymbol{r})\big) - r_\beta\,(-\mathrm{i})\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) = \\
&= -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\delta_{\gamma'\beta}\,\psi(\boldsymbol{r}) - r_\beta \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}, \psi(\boldsymbol{r}) + r_\beta\,\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) = \\
&= -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\beta}\, r_{\beta'}\,\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\beta'}\, r_{\beta'}\,\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, r_\gamma\,\psi(\boldsymbol{r}),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве немой индекс β' заменен на немой индекс γ. В силу того, что функцию $\psi(\boldsymbol{r})$ можно считать всюду гладкой и отличной от нуля, справедливо операторное равенство

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, r_\gamma.$$

Аналогично для векторного генератора трансляций $\hat{k}_\beta = -\mathrm{i}\partial_\beta$ найдем

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta]\psi(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}(-\mathrm{i}\partial_\beta)\,\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i}\partial_\beta)\,(-\mathrm{i})\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) =$$
$$= (-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\partial_\beta\,\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\partial_\beta\big(\,r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r})\big) = (-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\partial_\beta\,\psi(\boldsymbol{r}) -$$
$$- (-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\delta_{\beta\beta'}\partial_{\gamma'}\,\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_\beta\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) =$$
$$= -(-\mathrm{i})^2\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma'}\partial_{\gamma'}\,\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{k}_{\gamma'}\,\psi(\boldsymbol{r}),$$

т. е.

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{k}_\gamma.$$

Наконец, для компонент векторного генератора поворотов с учетом тождества для свертки символов Леви-Чивиты по одному индексу

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}$$

установим, что

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta]\psi(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}(-\mathrm{i})\,\epsilon_{\beta\beta''\gamma''}\, r_{\beta''}\partial_{\gamma''})\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i})\,\epsilon_{\beta\beta''\gamma''}\, r_{\beta''}\partial_{\gamma''})(-\mathrm{i})\,\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) =$$
$$= \big\langle\text{дифференцирование произведения}\big\rangle = (-\mathrm{i})^2\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\epsilon_{\beta\beta''\gamma''}\, r_{\beta'}\big(\delta_{\gamma'\beta''}\partial_{\gamma''}\psi(\boldsymbol{r}) + r_{\beta''}\partial_{\gamma'}\partial_{\gamma''}\psi(\boldsymbol{r})\big) -$$
$$- (-\mathrm{i})^2\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\epsilon_{\beta\beta''\gamma''}\, r_{\beta''}\big(\delta_{\gamma''\beta'}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) + r_{\beta'}\partial_{\gamma''}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r})\big) = \big\langle\text{члены с двумя производными сокращаются}\big\rangle =$$
$$= (-\mathrm{i})^2\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\epsilon_{\beta\gamma'\gamma''}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma''}\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i})^2\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\epsilon_{\beta\beta''\beta'}\, r_{\beta''}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) = \big\langle\text{свертка двух символов Леви-Чивиты}\big\rangle =$$
$$- (-\mathrm{i})^2\big(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta'\gamma''} - \delta_{\alpha\gamma''}\delta_{\beta'\beta}\big)\, r_{\beta'}\partial_{\gamma''}\psi(\boldsymbol{r}) + (-\mathrm{i})^2\big(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta''\gamma'} - \delta_{\alpha\beta''}\delta_{\gamma'\beta}\big)\, r_{\beta''}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) =$$
$$= \big\langle\text{члены с }\delta_{\alpha\beta}\text{ сокращаются}\big\rangle = (-\mathrm{i})^2\delta_{\alpha\gamma''}\delta_{\beta'\beta}\, r_{\beta'}\partial_{\gamma''}\psi(\boldsymbol{r}) - (-\mathrm{i})^2\delta_{\alpha\beta''}\delta_{\gamma'\beta}\, r_{\beta''}\partial_{\gamma'}\psi(\boldsymbol{r}) =$$
$$= (-\mathrm{i})^2\big(r_\beta\partial_\alpha - r_\alpha\partial_\beta\big)\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\big(-\mathrm{i}\epsilon_{\gamma\alpha'\beta'}r_{\alpha'}\partial_{\beta'}\big)\psi(\boldsymbol{r}).$$

Здесь в последнем равенстве учтена свертка двух символов Леви-Чивиты по немому индексу γ. В итоге

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{l}_\gamma.$$

Проведенные расчеты показывают, что коммутатор компонент генератора поворотов, т. е. компонент орбитального момента вращения с компонентами любого из заданных в задаче векторов имеет одну и ту же структуру.

Вычислив коммутаторы генераторов поворотов $\hat{l}_\alpha$ с координатами r_β и с генераторами трансляций $\hat{k}_\beta = -\mathrm{i}\partial_\beta$ при их действии на функции трехмерных координат

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, r_\gamma, \qquad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{k}_\gamma,$$

видим, что одноименные компоненты вектора координат и вектора генератора трансляций «поворачиваются» по одному и тому же закону, т. е. генераторы трансляций — векторы.

Кроме того, сами генераторы орбитальных поворотов также являются векторами, поскольку

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{l}_\gamma. \tag{I.1.31}$$

Итак, мы рассмотрели пример представления группы поворотов на пространстве скалярных функций, т. е. среди однокомпонентных функций.

Другой пример — векторное поле, у которого 3 компоненты, а значит, пространство представления действия группы поворотов трехмерное. Пусть поле — векторная функция, $\Phi \mapsto \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r})$, заданная в том же базисе, что и координаты трехмерного пространства[13]. Запишем закон обратимых преобразований для векторов при переходе от исходного базиса к штрихованному

$$\mathcal{A}'^{\alpha}(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^\beta}\mathcal{A}^\beta(\boldsymbol{r}), \qquad \mathrm{d}r'^{\alpha} = \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^\beta}\mathrm{d}r^\beta. \tag{I.1.32}$$

В частном случае такого преобразования, заданного поворотом $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_G$, матрица преобразований координат имеет определенный вид $\partial r'^{\alpha}/\partial r^\beta = S^\alpha_{\bullet\,\beta}(G)$. Отметим, что дифференцирование по компоненте с верхним индексом дает нижний индекс, и наоборот. Тогда

$$r'^{\alpha} = \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^\beta}\, r^\beta = S^\alpha_{\bullet\,\beta}(G)\, r^\beta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_G = S(G)\cdot\boldsymbol{r},$$

[13] В этом примере мы различаем для общности изложения верхние и нижние индексы, которые преобразуются взаимно обратными матрицами–константами в случае линейных глобальных преобразований.

и

$$\mathcal{A}'^{\alpha}(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^{\beta}}\mathcal{A}^{\beta}(\boldsymbol{r}) = S^{\alpha}_{\bullet\,\beta}(G)\,\mathcal{A}^{\beta}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}_G) = S(G)\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}).$$

Тогда формулу (I.1.32) можно записать в виде действия на векторную функцию $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r})$ оператора поворота

$$G\circ\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) \equiv \mathcal{A}_G(\boldsymbol{r}_G), \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}_G) = S(G)\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}).$$

Матрица $S^{\alpha}_{\bullet\,\beta}(G) = \partial r'^{\alpha}/\partial r^{\beta}$ для инфинитезимальных поворотов векторного пространства равна

$$S(G) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\,s_\gamma \mathrm{d}\phi_\gamma,$$

где трехкомпонентный вектор $\boldsymbol{s}$ — это 3×3-матрицы поворотов, которые были получены в (I.1.16)–(I.1.20) при преобразованиях координат евклидова пространства. Используя это определение и повторяя выкладки для бесконечно малых преобразований координат в аргументе векторного поля точно так же, как и в случае скалярной функции (I.1.29),

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}_G) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}_G\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}) + \big(\mathrm{d}_G r\big)^{\alpha}\partial_\alpha\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\hat{l}_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r})$$

с учетом того, что для инфинитезимальных поворотов

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}_G) = S(G)\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) = \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,s_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\big)\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\,s_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}),$$

найдем, что

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\hat{l}_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\,s_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}).$$

Преобразованная векторная функция выражается в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_G(\boldsymbol{r}) \approx (\mathbb{1}+\delta_G)\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}) = (\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\hat{j}_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma)\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{r}), \tag{I.1.33}$$

где введен оператор

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{s}.$$

Сумма дифференциального оператора орбитальных поворотов $\hat{\boldsymbol{l}}$ и матрицы *спина* векторного поля $\boldsymbol{s}$ называется генератором полного момента вращения j. При этом в более строгой математической записи этой суммы необходимо указать в каком пространстве действует каждый из генераторов, а именно, если в качестве таких пространств рассматривать множество элементов $v\times x = v(x)$, где v — элемент векторного пространства V, $v\in V$, а x задает аргумент как точку в пространстве трехмерных координат $\boldsymbol{r}$ для векторной функции v, то генератор орбитальных поворотов $\hat{\boldsymbol{l}}$ изменяет аргумент функции $v(\boldsymbol{r})$, не изменяя ее компоненты в векторном пространстве V, а генератор спиновых поворотов $\boldsymbol{s}$ действует на компоненты v в векторном пространстве V:

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \mathbb{1}\otimes\hat{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{s}\otimes\mathbb{1}. \tag{I.1.34}$$

После умножения на $\hbar$ эти величины приобретают смысл операторов полного момента вращения $\hat{\boldsymbol{J}} = \hbar\,\hat{\boldsymbol{j}}$, орбитального момента вращения $\hat{\boldsymbol{L}} = \hbar\,\hat{\boldsymbol{l}}$ и спинового момента собственного вращения $\hat{\boldsymbol{\mathbb{S}}} = \hbar\boldsymbol{s}$. Спиновый момент как оператор действует в пространстве компонент поля.

Для тензорного поля второго ранга $\mathcal{T}^{\alpha_1\alpha_2}$ закон обратимого преобразования компонент

$$\mathcal{T}'^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}}\frac{\partial r'^{\alpha_2}}{\partial r^{\beta_2}}\mathcal{T}^{\beta_1\beta_2}(\boldsymbol{r})$$

в случае инфинитезимальных поворотов сводится к виду

$$\mathcal{T}'^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}') = \mathcal{T}^{\alpha_1\alpha_2}_G(\boldsymbol{r}_G) = \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,s^{(1)}_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\big)^{\alpha_1}_{\bullet\,\beta_1}\big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,s^{(2)}_\gamma\mathrm{d}\phi_\gamma\big)^{\alpha_2}_{\bullet\,\beta_2}\mathcal{T}^{\beta_1\beta_2}(\boldsymbol{r}),$$

или в кратких обозначениях без указания индексов в тензорном пространстве $\mathcal{T}$, которое можно записать в виде тензорного произведения двух векторных пространств V: $\mathcal{T} = V\otimes V$,

$$\mathcal{T}_G(\boldsymbol{r}_G) = \Big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\big(s^{(1)}_\gamma\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes s^{(2)}_\gamma\big)\mathrm{d}\phi_\gamma\Big)\mathcal{T}(\boldsymbol{r}).$$

Сумма

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\boldsymbol{s}$$

называется полным спином тензора $\mathcal{T}$.

§2. Генераторы спина как матрицы

Транспонирование и эрмитово сопряжение квадратных матриц, бра- и кет-векторы, уравнение на собственные значения, секулярное уравнение, вещественность собственных значений эрмитовой матрицы, кратность вырождения спектра, ортогональность собственных векторов с разными собственными значениями, собственные векторы и собственные значения матрицы проекции спина на ось z для $s = 1$, сферическая гармоника единичного радиус-вектора, действие повышающих и понижающих матриц для $s = 1$, условие полноты базиса собственных векторов эрмитовой матрицы, операторное представление эрмитовой матрицы, понятие о среднем значении, описание измерительного прибора, математическое представление об амплитуде вероятности собственного значения эрмитовой матрицы. Нулевой коммутатор эрмитовых матриц и совместный базис собственных векторов, физический смысл коммутаторов генераторов группы вращений. Разложение тензора второго ранга в прямую сумму неприводимых слагаемых с $s = 0$, 1, 2, симметричные и антисимметричные вклады. Проекции спина на ось волнового вектора для свободных поперечных полей спина $s = 1$ и $s = 2$, безмассовые поля.

2.1 Спин $s = 1$

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы дадим ряд определений для квадратных матриц $\hat{A}$ размером $n \times n$, которые действуют на n-мерные столбцы, т. е. в n-мерном комплексном пространстве. Введем также квантовомеханические обозначения Дирака для векторных и ковекторных пространств. Обозначения Дирака как таковые не имеют прямого отношения к квантовой механике так же, как операторный характер физических величин, введенный в гамильтоновой механике еще в середине 19 века. Но Дирак впервые ввел их для описания системы понятий квантовой механики в конце двадцатых годов 20 века.

• Векторы, ковекторы, линейные операторы и обозначения Дирака

Элементы векторного пространства V с базисом $\mathbf{e}_\alpha$ будем называть кет-векторами

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \mathcal{V}^\alpha |\mathbf{e}_\alpha\rangle \ \in \ V. \tag{I.2.1}$$

Инвариантные и в общем случае комплекснозначные линейные функции $\mathcal{A}$ на элементах векторного пространства, т. е. линейные функции, которые не зависят от выбора базиса в V, задаются своими компонентами $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}\big(\mathbf{e}_\alpha\big)$— значениями на базисных векторах в V:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}\big(\mathcal{V}^\alpha \mathbf{e}_\alpha\big) = \mathcal{A}\big(\mathbf{e}_\alpha\big)\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{A}_\alpha\, \mathcal{V}^\alpha. \tag{I.2.2}$$

Эти линейные функции образуют ковекторное пространство $\tilde{V}$ так, что в этом ковекторном пространстве можно задать базис линейных функций $\mathfrak{h}^\beta$ их значениями на базисных векторах в контравариантном векторном пространстве V согласно определению

$$\mathfrak{h}^\beta\big(\mathbf{e}_\alpha\big) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\beta_\alpha. \tag{I.2.3}$$

Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\beta \mathfrak{h}^\beta$, то

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\beta \mathfrak{h}^\beta(\boldsymbol{\mathcal{V}}) = \mathcal{A}_\beta \mathcal{V}^\alpha \mathfrak{h}^\beta\ \big(\mathbf{e}_\alpha\big) = \mathcal{A}_\beta \mathcal{V}^\alpha\, \delta^\beta_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{V}^\alpha \in \mathbb{C}.$$

Введя обозначение скалярного произведения ковектора на вектор

$$h^\beta\big(\mathbf{e}_\alpha\big) \equiv \mathfrak{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha,$$

линейные функции запишем в векторном виде

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_\beta \mathfrak{h}^\beta, \qquad \mathfrak{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathcal{A}_\beta \mathcal{V}^\alpha \big(\mathfrak{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha\big) = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{V}^\alpha, \tag{I.2.4}$$

так как согласно определению (I.2.3)

$$\mathcal{V}^\beta = \delta^\beta_\alpha \mathcal{V}^\alpha = \mathfrak{h}^\beta\big(\mathbf{e}_\alpha\big)\mathcal{V}^\alpha.$$

Компоненты базисных векторов равны

$$\big(\mathbf{e}_\alpha\big)^\gamma = \mathfrak{h}^\gamma\big(\mathbf{e}_\alpha\big) = \delta^\gamma_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha \equiv \big(\mathfrak{h}^\beta\big)_\gamma \big(\mathbf{e}_\alpha\big)^\gamma = \big(\mathfrak{h}^\beta\big)_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \tag{I.2.5}$$

так что разложение контравариантного вектора по базису можно записать как

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathfrak{e}_\alpha \mathcal{V}^\alpha = \mathfrak{e}_\alpha \left(\mathfrak{h}^\alpha \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}\right). \tag{I.2.6}$$

В дираковских обозначениях элементы ковекторного пространства $\tilde{V}$ будем называть бра-векторами

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| = \mathcal{A}_\beta \langle \mathfrak{h}^\beta| \ \in \ \tilde{V}. \tag{I.2.7}$$

Тогда инвариантные линейные комплекснозначные функции запишем как скалярное произведение бра-вектора на кет-вектор[14]

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathcal{V}}) \equiv \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle \in \mathbb{C}, \tag{I.2.8}$$

а разложение по базису в виде

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = |\mathfrak{e}_\alpha\rangle\langle\mathfrak{h}^\alpha|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle. \tag{I.2.9}$$

Последнее соотношение принято формулировать в виде операторного тождества (с суммированием по немому индексу, которое мы в этом случае записываем в явном виде)

$$\sum_\alpha |\mathfrak{e}_\alpha\rangle\langle\mathfrak{h}^\alpha| = \mathbb{1}, \tag{I.2.10}$$

которое называют условием полноты и ортонормированности базисов. Из (I.2.10) следует соотношение, аналогичное (I.2.9), но не для кет-вектора, а для бра-вектора:

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|\mathfrak{e}_\alpha\rangle\langle\mathfrak{h}^\alpha|. \tag{I.2.11}$$

Для введения метрики g как инвариантной билинейной функции на векторах с комплекснозначными компонентами

$$g_{\alpha\beta} \equiv g\big(\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{e}_\beta\big)$$

и с вещественным значением квадратичной формы

$$g(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = g_{\alpha\beta}\mathcal{V}^{*\alpha}\mathcal{V}^\beta = \big(g(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\mathcal{V}})\big)^* = g^*_{\alpha\beta}\mathcal{V}^\alpha\mathcal{V}^{*\beta} = g^*_{\beta\alpha}\mathcal{V}^\beta\mathcal{V}^{*\alpha}$$

необходимо, чтобы имело место равенство

$$g_{\alpha\beta} = g^*_{\beta\alpha}. \tag{I.2.12}$$

Равенство вида (I.2.12) трактуют как матричное, в котором в правой части у матричного элемента изменен порядок следования индексов и взято комплексное сопряжение: первое действие называют транспонированием, а комбинацию транспонирования и комплексного сопряжения называют эрмитовым сопряжением. Поэтому равенство (I.2.12) устанавливает, что метрика является эрмитово самосопряженной. В дираковских обозначениях вводят эрмитово сопряжение кет-векторов в виде их преобразования в бра-векторы так, что

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle^\dagger = \Big(|\mathfrak{e}_\alpha\rangle\mathcal{V}^\alpha\Big)^\dagger = \mathcal{V}^{*\alpha}\langle\mathfrak{e}_\alpha|. \tag{I.2.13}$$

Введением таких обозначений мы фиксируем изоморфизм между бра- и кет-векторами с тождественными обозначениями: $|X\rangle \ \Leftrightarrow \ \langle X|$. При этом обратим внимание на то, что эрмитово сопряжение, вообще говоря, не поднимает и не опускает ковариантные и контравариантные индексы, которые связаны с законами преобразования компонент при обратимых преобразованиях базиса векторого пространства. Кроме того, двукратное действие эрмитова сопряжения является тождественным преобразованием

$$\Big(\mathcal{V}^{*\alpha}\langle\mathfrak{e}_\alpha|\Big)^\dagger = |\mathfrak{e}_\alpha\rangle\mathcal{V}^\alpha = |\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle.$$

Тогда и для бра-векторов

$$\big(\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\big)^\dagger = \big(\mathcal{A}_\beta\langle\mathfrak{h}^\beta|\big)^\dagger = \mathcal{A}^*_\beta|\mathfrak{h}^\beta\rangle = |\boldsymbol{\mathcal{A}}\rangle,$$

а

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \mathcal{A}_\alpha\mathcal{V}^\alpha = \big(\langle\boldsymbol{\mathcal{V}}|\boldsymbol{\mathcal{A}}\rangle\big)^* = \big(\mathcal{V}^{*\alpha}\mathcal{A}^*_\alpha\big)^*. \tag{I.2.14}$$

При этом

$$\langle\mathfrak{h}^\beta|\mathfrak{e}_\alpha\rangle = \delta^\beta_\alpha = \langle\mathfrak{e}_\alpha|\mathfrak{h}^\beta\rangle.$$

[14] От английского слова «скобка»: bracket=⟨bra|c|ket⟩ согласно Дираку.

В обозначениях Дирака матрица Грама

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | \mathfrak{e}_\beta \rangle = g_{\alpha\beta} \tag{I.2.15}$$

совпадает с введенной ранее в векторных обозначениях метрикой и в силу (I.2.14) является эрмитово самосопряженной:

$$g_{\alpha\beta} = \langle \mathfrak{e}_\alpha | \mathfrak{e}_\beta \rangle = \big(\langle \mathfrak{e}_\beta | \mathfrak{e}_\alpha \rangle \big)^* = g^*_{\beta\alpha}. \tag{I.2.16}$$

Матрица Грама позволяет связать базис ковариантного векторного пространства $\langle \mathfrak{h}^\gamma |$ с эрмитово сопряженным базисом контравекторного пространства $\langle \mathfrak{e}_\alpha |$:

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | = g_{\alpha\gamma} \langle \mathfrak{h}^\gamma | \quad \Rightarrow \quad \langle \mathfrak{e}_\alpha | \mathfrak{e}_\beta \rangle = g_{\alpha\gamma} \langle \mathfrak{h}^\gamma | \mathfrak{e}_\beta \rangle = g_{\alpha\gamma}\, \delta^\gamma_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{I.2.17}$$

Если базис исходного векторного пространства является ортонормированным, а это значит, что матрица Грама — это единичная матрица

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | \mathfrak{e}_\beta \rangle = \mathbb{1}_{\alpha\beta}, \tag{I.2.18}$$

то в таком базисе

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | = g_{\alpha\gamma} \langle \mathfrak{h}^\gamma | = \mathbb{1}_{\alpha\gamma} \langle \mathfrak{h}^\gamma | = \langle \mathfrak{h}_\alpha |. \tag{I.2.19}$$

Итак, в ортонормированном базисе нет различия между базисом в контравариантном и ковариантном пространствах. Однако при переходе от ортонормированного базиса векторного пространства к неортонормированному необходимо различать базисы контравариантного и ковариантного пространств, чтобы верно записывать законы преобразования тензорных величин, в том числе в дираковских обозначениях, принятых в квантовой теории.

Линейное преобразование $\hat{M}$, которое действует на вектор, называется оператором, если оно переводит элемент векторного пространства в элемент векторного пространства, т. е. оператор $\hat{M}$ переводит кет-вектор в кет-вектор, и в рамках дираковских обозначений это записывается как

$$\hat{M} | \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle = | \hat{M}\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle.$$

Для матричного элемента $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | \hat{M}\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle$ разложение по базису дает

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | \hat{M}\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle = \mathcal{A}_\alpha \langle \mathfrak{h}^\alpha | \hat{M}\, \mathfrak{e}_\beta \rangle \mathcal{V}^\beta = \mathcal{A}_\alpha\, M^\alpha_{\bullet\beta}\, \mathcal{V}^\beta, \tag{I.2.20}$$

где мы ввели упорядоченное по порядку следования символов бра- и кет-векторов определение матричного элемента

$$M^\alpha_{\bullet\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathfrak{h}^\alpha | \hat{M}\, \mathfrak{e}_\beta \rangle. \tag{I.2.21}$$

Действие эрмитово сопряженного оператора $\hat{M}^\dagger$ задается равенством

$$\langle \mathfrak{e}_\beta | \hat{M}^\dagger\, \mathfrak{h}^\alpha \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \big(\langle \mathfrak{h}^\alpha | \hat{M}\, \mathfrak{e}_\beta \rangle \big)^* \quad \Rightarrow \quad (M^\dagger)^{\bullet\alpha}_\beta = \big(M^\alpha_{\bullet\beta} \big)^*, \tag{I.2.22}$$

что дает стандартную связь элементов эрмитово сопряженной матрицы с элементами самой матрицы: необходимо провести транспонирование — сменить порядок следования индексов, а затем взять комплексное сопряжение матричного элемента.

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$M^\dagger = M \quad \Rightarrow \quad M^\alpha_{\bullet\beta} = \big(M^{\bullet\alpha}_\beta \big)^*. \tag{I.2.23}$$

Из определений матриц спина векторной частицы в формулах (I.1.16)–(I.1.20)

$$s_x = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

следует, что эти матрицы являются эрмитовыми[15].

[15] Эрмитово самосопряженность генераторов группы преобразований в пространстве кет-векторов обеспечивает сохранение нормы кет-вектора, т. е. унитарность этих преобразований. В группе поворотов матрица преобразования должна быть ортогональной. Тогда для бесконечно малых преобразований унитарность и ортогональность означают, что для генераторов имеет место связь $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^\dagger = -\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$ (см. подробности в разделе **4.1 Спинорная метрика** в **§ 4. Спин $s = 1/2$**). Это условие выделяет среди возможных унитарных матриц лишь те, которые являются еще и ортогональными. Ясно, что множество ортогональных матриц, вообще говоря, у́же, чем множество унитарных. Например, в трехмерном пространстве семейство унитарных матриц с детерминантом, равным единице, является восьмимерным (группа SU(3)), в то время как семейство унитарных и ортогональных матриц с единичным детерминантом трехмерно (группа SO(3)).

Элемент комплексного векторного n-мерного пространства, который согласно Дираку мы обозначили символом кет-вектора, можно эквивалентным образом записать в матричных обозначениях в виде столбца, элементы которого образованы компонентами вектора в некотором базисе

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{V}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{I.2.24}$$

В трехмерном пространстве с евклидовой метрикой векторы базиса —

$$|\mathbf{e}_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^x \\ \mathcal{V}^y \\ \mathcal{V}^z \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряженные ковекторы в базисе $\langle \mathbf{e}_\alpha|$, которые мы обозначили как бра-векторы, можно эквивалентно записать в виде строк с комплексно сопряженными элементами столбца:

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{V}}| = \left(\mathcal{V}^{*(1)}, \ldots, \mathcal{V}^{*(n)}\right). \tag{I.2.25}$$

• Собственные векторы и собственные значения

Для квадратных матриц ставится задача на собственные значения:

$$\hat{M}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle, \qquad |\lambda\rangle \neq 0. \tag{I.2.26}$$

Собственный вектор $|\lambda\rangle$ не равен нулю, что может иметь место, если у матрицы $M - \lambda \cdot \mathbb{1}$ нет обратной, т. е. при условии

$$\det\left(M - \lambda \cdot \mathbb{1}\right) = 0, \tag{I.2.27}$$

или

$$(M - \lambda \cdot \mathbb{1})|\lambda\rangle = 0.$$

Если бы матрица $(M - \lambda \cdot \mathbb{1})$ имела обратную, то домножение этого уравнения на обратную матрицу приводило бы к $|\lambda\rangle = 0$. Поэтому условие отсутствия обратной матрицы, записанное в виде уравнения (I.2.27), означает существование ненулевого собственного вектора при определенных (собственных) значениях $|\lambda\rangle$. Уравнение на собственные значения λ (I.2.27) носит название секулярного уравнения на собственные значения матрицы M.

Эрмитово сопряжение уравнения для собственного вектора (I.2.26)

$$\left(M\,|\lambda\rangle\right)^\dagger = \lambda^*\,\langle\lambda| \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda|\,M^\dagger = \lambda^*\,\langle\lambda|$$

приводит к секулярному уравнению для эрмитово сопряженной матрицы $M^\dagger$

$$\det\left(M^\dagger - \lambda^* \cdot \mathbb{1}\right) = 0,$$

причем каждое собственное значение эрмитово сопряженной матрицы $M^\dagger$ является комплексно сопряженным собственным значением матрицы M. Отсюда следует, что эрмитовы матрицы, $M^\dagger = M$ имеют вещественные собственные значения, $\lambda^* = \lambda$, так как уравнение на собственные значения при умножении слева на эрмитово сопряженный собственный вектор дает

$$M\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda|\,M\,|\lambda\rangle = \lambda\,\langle\lambda|\lambda\rangle,$$

а эрмитово сопряженное уравнение на собственные значения для эрмитово сопряженной матрицы при умножении справа на собственный вектор дает

$$\left(M\,|\lambda\rangle\right)^\dagger = \lambda^*\,\langle\lambda| = \langle\lambda|\,M^\dagger = \langle\lambda|\,M \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda|\,M\,|\lambda\rangle = \lambda^*\,\langle\lambda|\lambda\rangle.$$

Секулярное уравнение является полиномом степени n по искомому собственному значению, а значит, оно имеет n решений с учетом кратности каждого решения:

$$\det\left(M-\lambda\cdot\mathbb{1}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \text{const.}\cdot(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_j}=0, \quad k_i\geqslant 1, \quad 1\leqslant i\leqslant j, \qquad \sum_{i=1}^{j}k_i=n.$$

Здесь k_i — это кратность вырождения корня λ_i. Набор корней $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_j\}$ называется спектром собственных значений эрмитово самосопряженного матричного оператора. Спектр собственных значений эрмитовой матрицы, как видим, может быть невырожден или вырожден. Кратность корня секулярного уравнения равна размерности подпространства собственных векторов с собственным значением, равным этому корню. В самом деле, пусть у собственного значения λ_i подпространство собственных векторов $\mathrm{Span}(\{|\lambda_i,a\rangle\})=V_i$, где $a\in\left\{\overline{1,k_i}\right\}$, имеет размерность, равную $k_i=\dim(V_i)$. Тогда результат действия матрицы $\hat{M}$ на любой элемент V_i принадлежит тому же подпространству: $\hat{M}\cdot V_i\in V_i$. Следовательно, можно рассматривать задачу на собственные значения $\hat{M}$ в этом k_i-мерном подпространстве. В этом подпространстве все собственные значения равны, так что секулярное уравнение эквивалентно уравнению на корни

$$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}=0,$$

а любой собственный вектор с другим собственным значением лежит вне подпространства V_i. Это значит, что число собственных векторов во всем n-мерном пространстве равно

$$\sum_{i=1}^{j}k_i=n.$$

Более того, собственные векторы эрмитовой матрицы с различными собственными значениями ортогональны. Действительно, из уравнений

$$M\,|\lambda_1\rangle=\lambda_1\,|\lambda_1\rangle$$

и

$$M\,|\lambda_2\rangle=\lambda_2\,|\lambda_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda_2|\,M=\langle\lambda_2|\lambda_2$$

следует, что после умножения уравнения для собственного кет-вектора $|\lambda_1\rangle$ слева на бра-вектор $\langle\lambda_2|$

$$M\,|\lambda_1\rangle=\lambda_1\,|\lambda_1\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda_2|\,M\,|\lambda_1\rangle=\lambda_1\,\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle,$$

а уравнения для собственного бра-вектора $\langle\lambda_2|$ справа на кет-вектор $|\lambda_1\rangle$

$$\langle\lambda_2|\,M=\langle\lambda_2|\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda_2|\,M\,|\lambda_1\rangle=\lambda_2\,\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle,$$

получаем равенство

$$\lambda_1\,\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle=\lambda_2\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle.$$

Если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle=0.$$

Следовательно, матричные элементы $\langle\lambda_1|\hat{M}|\lambda_2\rangle$ между собственными векторами с разными собственными значениями равны нулю:

$$\langle\lambda_1|\hat{M}|\lambda_2\rangle=\lambda_1\,\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle=\lambda_2\,\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle=0.$$

Поэтому в базисе собственных векторов эрмитова матрица $\hat{M}$ имеет блочнодиагональный вид: размер каждого i-ого блока равен размерности собственного подпространства k_i. При этом в собственном подпространстве можно выбрать ортонормированный базис, и тогда i-ый блок станет диагональным, а диагональные матричные элементы будут равны собственному значению λ_i.

Если одному собственному значению отвечает единственный собственный вектор, то это значение невырождено. Если же пространство собственных векторов для заданного собственного значения не одномерно, а k-мерно, то говорят о кратности вырождения, равной $k>1$. Подчеркнем еще раз, что в базисе *ортогональных* собственных векторов[16] эрмитова матрица диагональна: на диагонали стоят вещественные собственные значения с учетом кратности их вырождения.

[16] Число линейно независимых собственных векторов в n-мерном пространстве не может быть больше n. Если число линейно независимых собственных векторов m меньше n, то можно перейти к базису, составленному из m собственных векторов $|\lambda\rangle$ и линейно независимых от собственных $n-m$ прежних несобственных базисных векторов $|\phi\rangle$, которые, к тому же, ортогональны всем собственным векторам: $\langle\lambda|\phi\rangle=0$. Отсюда следует, что матричные элементы перехода из подпространства собственных векторов в подпространство несобственных при действии матрицы на элементы векторного пространства $\langle\lambda|\hat{M}|\phi\rangle$ и $\langle\phi|\hat{M}|\lambda\rangle$ тождественно равны нулю, так как, например, $\langle\phi|\hat{M}|\lambda\rangle=\lambda\,\langle\phi|\lambda\rangle=0$. Тогда в подпространстве размерности $n-m$ можно рассмотреть уравнение на собственные векторы эрмитовой матрицы. По предположению секулярное уравнение такой задачи не должно иметь решений, а такое возможно, только если это уравнение нулевой степени, т. е. $n-m=0$.

К примеру, как мы показали в (I.1.24), квадрат спиновых матриц векторного поля $\boldsymbol{s}^2$ пропорционален единичной матрице:

$$\boldsymbol{s}^2 = 2 \cdot \mathbb{1}.$$

Таким образом квадрат спина векторного поля — это эрмитова матрица размером 3×3. Секулярное уравнение

$$\det(\boldsymbol{s}^2 - \lambda \cdot \mathbb{1}) = (\lambda - 2)^3$$

имеет один трижды вырожденный корень $\lambda = 2$. Поэтому пространство собственных векторов трехмерно, и любой отличный от нуля вектор трехмерного пространства является собственным для этой матрицы. В ортонормированном базисе собственных векторов матрица $\boldsymbol{s}^2$ диагональна, и все диагональные элементы будут равны собственному значению этой матрицы $\lambda = 2$.

Найдем собственные значения эрмитовой матрицы s_z в (I.1.16), которая является матрицей проекции спина векторного поля на ось z. Секулярное уравнение примет вид

$$\det\left(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}\right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

У этого кубического уравнения три разных действительных решения $\lambda = \{-1, 0, +1\}$, так что спектр собственных значений матрицы s_z невырожден. Отнормируем собственные кет-векторы $|\lambda\rangle$ на единицу. Тогда с точностью до комплексной фазы, которую мы выберем согласно сложившейся традиции, получим

$$|{+1}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.28}$$

В тензорных обозначениях значения инвариантной линейной функции $\mathcal{A}$ на базисных векторах пространства $\mathcal{A}(\mathfrak{e}_\alpha)$ образуют *компоненты ковектора* $\mathcal{A}_\alpha$. В квантовых обозначениях это эквивалентно записи $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | \mathfrak{e}_\alpha \rangle = \mathcal{A}_\alpha$, где, подчеркнем, нет комплексного сопряжения, чтобы было верно $\mathcal{A}(\mathcal{V}^\alpha \mathfrak{e}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{V}^\alpha = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle$ (см. (I.2.1)–(I.2.19)). При этом согласно (I.2.11) компоненты ковектора задаются разложением (не забываем о правиле суммирования по спаренному немому индексу)

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | \mathfrak{e}_\alpha \rangle \langle \mathfrak{h}^\alpha |,$$

а переход от компонент в декартовом базисе $\left\{|\mathfrak{e}_x\rangle, |\mathfrak{e}_y\rangle, |\mathfrak{e}_z\rangle\right\}$ к компонентам в стандартнном спиновом базисе $\{|{+1}\rangle, |0\rangle, |{-1}\rangle\}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_\pm = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | {\pm 1} \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{A}_x \pm \mathrm{i}\, \mathcal{A}_y\right), \qquad \mathcal{A}_0 = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} | 0 \rangle = \mathcal{A}_z. \tag{I.2.29}$$

Например, в качество поля $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ возьмем единичный радиус-вектор $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. Выразим его декартовы компоненты в сферических координатах

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{I.2.30}$$

Согласно (I.2.29) можно перейти от декартовых компонент вектора к компонентам с определенными значениями проекции спина на ось z:

$$n_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(n_x \pm \mathrm{i}\, n_y\right) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\, \sin\theta\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi}, \qquad n_0 = n_z = \cos\theta. \tag{I.2.31}$$

Компоненты единичного вектора (I.2.31) в базисе собственных векторов оператора s_z пропорциональны сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_{1,\pm 1}$ и $\mathcal{Y}_{1,0}$, которые нормированы условием

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \mathcal{Y}^*_{1,m} \mathcal{Y}_{1,m'} = \delta_{mm'},$$

так что

$$\mathcal{Y}_{1,m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, n_m, \qquad m = \{\pm 1, 0\}.$$

Отметим, что сферическую гармонику $\mathcal{Y}_{1,m}(\theta,\phi)$ можно рассматривать как поле в сферических координатах. В этих координатах можно рассмотреть генераторы поворотов на функциях $\hat{\boldsymbol{l}} = -\mathrm{i}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\partial}$ и построить $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ и $\hat{l}_z$. Собственные состояния этих операторов и их собственные значения совпадают с собственными состояниями и собственными значениями генераторов поворотов, построенных в матричном виде, т. е.

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2\mathcal{Y}_{1,m}(\theta,\phi) = 2\cdot\mathcal{Y}_{1,m}(\theta,\phi), \qquad \hat{l}_z\mathcal{Y}_{1,m}(\theta,\phi) = m\cdot\mathcal{Y}_{1,m}(\theta,\phi).$$

Разложение векторного поля по компонентам (I.2.31) в базисе собственных векторов матрицы проекции спина на выбранную ось z, т. е. в виде сферических гармоник, называют стандартным в отличие от (I.2.30), которое называют разложением по линейным поляризациям вектора.

Собственные векторы матрицы спина s_z не являются собственными для матриц s_x и s_y. Их действие на один из собственных векторов s_z превращает его в комбинацию двух других собственных векторов. Поэтому вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_\pm = s_x \pm \mathrm{i}\,s_y,\ \ s_+^\dagger = s_-,\quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ -1 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}. \tag{I.2.32}$$

Легко найти, что повышающий оператор, действуя на собственный вектор оператора s_z, переводит его в другой собственный вектор с собственным значением на единицу больше или дает нулевой результат, если собственного состояния с бóльшим значением проекции спина не существует,

$$s_+|{+1}\rangle = 0,\quad s_+|0\rangle = \sqrt{2}\,|{+1}\rangle,\quad s_+|{-1}\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle, \tag{I.2.33}$$

а понижающий уменьшает значение проекции в состоянии на единицу или дает нуль при действии на состояние $|{-1}\rangle$,

$$s_-|{+1}\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle,\quad s_-|0\rangle = \sqrt{2}\,|{-1}\rangle,\quad s_-|{-1}\rangle = 0. \tag{I.2.34}$$

При этом состояние $|{+1}\rangle$ называется старшим вектором или состоянием старшего веса: при действии повышающего оператора на старший вектор получается нуль,. Состояние $|{-1}\rangle$ называется младшим вектором: при действии понижающего оператора на младший вектор получается нуль векторного пространства состояний.

Задача 2. Рассмотрите генератор группы поворотов на плоскости, описанной в **§1.Трансляции и повороты** главы 1. Найдите его собственные векторы. Запишите матрицу конечных поворотов в терминах генератора и единичной матрицы и ее действие на собственные векторы. Убедитесь, что действие группы SO(2) на собственные векторы с нормой $|\boldsymbol{r}|$ эквивалентно преобразованию группы U(1) на комплексных числах z с модулем $|z| = |\boldsymbol{r}|$ и комплексно сопряженных числах $\bar{z}\equiv z^*$.

Гармоническое движение вектора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ в некоторой точке пространства с заданной частотой ω описывается введением множителя $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, так что сам вектор в начальный момент времени задает амплитуду гармонических колебаний, а для вещественного вектора выделяют вещественную часть этого выражения

$$\mathfrak{Re}\Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big].$$

Декартов базис, как говорят, задает линейные поляризации колебаний поля. Например, эволюция состояния $|\boldsymbol{e}_x\rangle$ описывает колебания вдоль оси x:

$$\mathfrak{Re}\Big[|\boldsymbol{e}_x\rangle\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] = \mathfrak{Re}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Big] \quad\Rightarrow\quad A_x = \cos(\omega t),\quad A_y = A_z = 0.$$

Интенсивность колебаний W задается как сумма квадратов модулей амплитуд по каждому направлению вектора, так что обычно нормировка задается условием $W = 1$.

Стандартный спиновый базис определяется как базис собственных векторов матрицы, задающей проекцию спина на ось z. Тогда, например, эволюция состояния $|{+1}\rangle$ после перехода к декартовым компонентам вектора описывает колебания

$$\mathfrak{Re}\Big[|{+1}\rangle\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] = \mathfrak{Re}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}\Big] \quad\Rightarrow$$

$$A_x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t),\quad A_y = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(-\omega t+\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t),\quad A_z = 0.$$

Как видим, проекция спина векторного поля на ось z, равная $+1$, задает вращение вектора в плоскости (x, y) вокруг оси z против часовой стрелки, что называют правой поляризацией в отличие от линейной. Интенсивность этих колебаний также равна единице,

$$W = \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Итак, понятия поляризации векторного поля и спина векторного поля по сути эквивалентны: можно выбрать либо декартов базис линейных поляризаций, либо стандартный спиновый базис круговых поперечных поляризаций и линейной поляризации по оси z, если проекция спина равна нулю.

• Полнота базиса и измерение среднего значения

В ортонормированном базисе метрика является единичной матрицей, т. е. компоненты матрицы Грама равны

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | \mathfrak{e}_\beta \rangle = \mathbb{1}_{\alpha\beta},$$

так что базис в ковариантном и контравариантном векторных пространствах является общим:

$$\langle \mathfrak{e}_\alpha | = \mathbb{1}_{\alpha\beta} \langle \mathfrak{h}^\beta | \cong \langle \mathfrak{h}^\alpha |.$$

Поэтому в таком базисе нет различия между верхними и нижними индексами, которые далее в этой главе мы все будем записывать как нижние, так что разложение кет-вектора по ортонормированному базису собственных векторов матрицы проекции спина на ось z имеет стандартный для учебников по квантовой механике вид:

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \sum |m\rangle\langle m|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle, \tag{I.2.35}$$

где берется сумма по значениям проекции $m = \{\pm 1,\ 0\}$. Смысл этого выражения прост: вычисляется проекция заданного кет-вектора $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ на базисный вектор, в наших обозначениях (см. (I.2.1)–(I.2.19))

$$\langle m|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \mathcal{V}_m,$$

а затем каждая проекция умножается на соответствующий базисный вектор и полученные таким образом векторы суммируются. Полнота ортонормированного базиса отвечает условию

$$\sum |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}, \quad \text{так как} \quad \forall\, |\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle \quad \left(\sum |m\rangle\langle m|\right) |\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle \equiv |\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle. \tag{I.2.36}$$

Заметим теперь, что композиция матрицы s_z для проекции спина на ось z с условием полноты базиса дает нам, как говорят, операторное представление для этой матрицы, записанное в терминах бра- и кет-векторов ортонормированного базиса

$$s_z = s_z \cdot \mathbb{1} = s_z \left(\sum |m\rangle\langle m|\right) = \mathbb{1} \cdot s_z = \left(\sum |m\rangle\langle m|\right) s_z = \sum |m\rangle\, m\, \langle m|, \tag{I.2.37}$$

поскольку матрица эрмитова и ее действие на собственные бра- и кет-векторы дает вещественное собственное значение, равное m.

Если вектор собственный, и он имеет единичную нормировку, то

$$\langle m|s_z|m\rangle = m.$$

Если же вектор является суперпозицией

$$|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle = \sum |m\rangle\mathcal{V}_m,$$

то для нормированного на единицу кет-вектора, который называют вектором состояния

$$|\boldsymbol{\Psi}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum |m\rangle\mathcal{V}_m}{\sqrt{\sum \boldsymbol{\mathcal{V}}_k^* \boldsymbol{\mathcal{V}}_k}} = \sum |m\rangle\Psi_m, \qquad \Psi_m = \langle m|\boldsymbol{\Psi}\rangle,$$

диагональный матричный элемент оператора проекции спина равен

$$\langle \boldsymbol{\Psi}|s_z|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \sum m\, w_m.$$

Вес собственного значения

$$w_m = |\Psi_m|^2, \qquad 0 \leqslant w_m \leqslant 1$$

такой, что сумма весов равна единице

$$\sum w_m = 1.$$

Этим построениям можно придать ясный физический смысл:

- соотношение полноты базиса (I.2.36) описывает идеальный измерительный прибор, который «видит» все компоненты вектора,
- величина
$$\langle s_z\rangle = \langle\boldsymbol{\Psi}|s_z|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \langle\boldsymbol{\mathcal{V}}|s_z|\boldsymbol{\mathcal{V}}\rangle\,\frac{1}{\sum\boldsymbol{\mathcal{V}}_k^*\boldsymbol{\mathcal{V}}_k} \tag{I.2.38}$$
описывает среднее значение матрицы, в данном случае, проекции спина на ось z,
- каждое измерение проекции спина прибором дает одно из собственных значений заданной матрицы спина[17]
$$s_z = \sum |m\rangle\, m\, \langle m|, \tag{I.2.39}$$
- каждому собственному значению сопоставляется вероятность получить его при измерении
$$w_m = |\Psi_m|^2, \tag{I.2.40}$$
причем для нормированного на единицу вектора $\boldsymbol{\Psi}$
$$\langle\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{\Psi}\rangle = 1$$
проекцию
$$\Psi_m = \langle m|\boldsymbol{\Psi}\rangle \tag{I.2.41}$$
называют амплитудой вероятности для значения проекции спина, равной m.

В случае, когда все эти построения проводятся в базисе, который не является собственным для эрмитовой матрицы, физический смысл проведенных построений не изменяется, хотя операторное представление становится не диагональным. Например, в декартовом базисе, в котором $\langle\mathfrak{e}^\alpha| = \langle\mathfrak{e}_\beta|\mathbb{1}^{\beta\alpha} = \langle\mathfrak{h}^\alpha|$,

$$\langle\mathfrak{e}^\alpha|s_z|\mathfrak{e}_\beta\rangle = (s_z)^\alpha_{\bullet\beta}, \qquad s_z = \sum |\mathfrak{e}_\alpha\rangle(s_z)^\alpha_{\bullet\beta}\langle\mathfrak{e}^\beta|.$$

Вектор $|\boldsymbol{\Psi}\rangle$ является собственным для суммы квадратов операторных компонент спина

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 2\cdot\mathbb{1}.$$

Для единичной матрицы любой отличный от нулевого вектор — собственный. Поэтому собственные векторы s_z являются собственными и для квадрата спина $\boldsymbol{s}^2$ векторной частицы.

Здесь логично поставить вопрос о том, в каком случае две эрмитовы матрицы могут иметь совместный базис собственных векторов. Такой базис может служить основой для классификации полей по собственным значениям генераторов группы симметрии, в нашем случае группы поворотов.

2.2 Совместный базис собственных векторов двух эрмитовых матриц

Пусть две эрмитовы матрицы $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$ имеют совместный базис собственных векторов[18]:

$$A\,|a,b\rangle = a\,|a,b\rangle, \qquad B\,|a,b\rangle = b\,|a,b\rangle.$$

Тогда

$$AB\,|a,b\rangle = A\,b\,|a,b\rangle = b\,A\,|a,b\rangle = ba\,|a,b\rangle,$$
$$BA\,|a,b\rangle = B\,a\,|a,b\rangle = a\,B\,|a,b\rangle = ab\,|a,b\rangle,$$

а значит

$$(AB - BA)\,|a,b\rangle = [A,B]\,|a,b\rangle = 0$$

для любого базисного вектора. Следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A,B] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если собственное значение A невырождено, $A\,|a\rangle = a\,|a\rangle$, то введем

$$|f\rangle = B\,|a\rangle.$$

[17] Это положение иллюстрируется опытом Штерна и Герлаха по измерению спина атома.

[18] Собственные значения a и b коммутирующих эрмитовых операторов или целочисленные номера этих собственных значений в дискретном множестве перечисляются под знаком одного кет-вектора, собственного для этих коммутирующих операторов, и называются *квантовыми числами*. В рамках такого описания у физической системы может быть одно или несколько квантовых чисел.

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A\,|f\rangle = AB\,|a\rangle = BA\,|a\rangle = B\,a\,|a\rangle = a\,B\,|a\rangle = a\,|f\rangle.$$

Это значит, что кет-вектор $|f\rangle$ является собственным для матрицы A со значением a. Если подпространство собственных векторов A с собственным значением a одномерно, и тогда говорят, что собственное значение a невырождено, то

$$|f\rangle = f\,|a\rangle, \quad \Rightarrow \quad B\,|a\rangle = f\,|a\rangle.$$

Следовательно, f — собственное значение для эрмитовой матрицы B, которое должно быть вещественным, и собственный вектор $|a\rangle$ — общий для обеих матриц.

Во втором случае, который называют вырожденным, собственные состояния с собственным значением a эрмитовой матрицы A образуют подпространство состояний размерности $K > 1$, которая называется кратностью вырождения собственного значения a,

$$A|a,n\rangle = a|a,n\rangle, \quad n \in \overline{\{1,K\}}.$$

Будем считать, что состояния $|a,n\rangle$ являются ортонормированными.

Состояние $|f\rangle \equiv B|a,n\rangle$, которое является собственным вектором матрицы A с собственным значением a матрицы A, принадлежит подпространству собственных состояний с этим собственным значением, т. е.

$$|f\rangle = B|a,n\rangle = \sum_{m=1}^{K} c_{nm}|a,m\rangle. \tag{I.2.42}$$

Таким образом действие эрмитовой матрицы B на собственном подпространстве эрмитовой матрицы A с собственным значением a не выводит состояние за пределы этого подпространства. Т. е. мы можем рассмотреть ограничение действия матрицы B на это подпространство в виде оператора $\hat{B}$, который в исходном базисе задется матрицей c_{nm}. И такое ограничение также будет эрмитово самосопряженным оператором (матрица c_{nm} эрмитова). Это значит, что на этом подпространстве оператор $\hat{B}$ будет иметь собственный базис, элементы которого можно считать частью базиса собственных векторов матрицы A на всем пространстве. В результате[19] мы получаем общий собственный базис двух этих операторов и в рассмотренном случае вырождения собственного значения a.

Другими словами, после замены базиса $|a,n\rangle$ в подпространстве собственных состояний[20] с собственным значением a эрмитовой матрицы A на базис собственных состояний $|\nu_a\rangle$ эрмитовой матрицы c_{nm} найдем, что в базисе $|\nu_a\rangle$

$$B|\nu_a\rangle = b_{\nu_a}|\nu_a\rangle, \qquad A|\nu_a\rangle = a|\nu_a\rangle, \quad \text{где} \quad \langle\mu_a|\nu_a\rangle = \delta_{\mu_a\nu_a} \quad \text{при} \quad \nu_a,\mu_a \in \overline{\{1,K\}}.$$

В итоге, если две эрмитовы матрицы коммутируют, то можно построить базис их совместных собственных состояний.

Если эрмитовых матриц-операторов больше двух, то можно говорить об общем базисе собственных векторов, когда все эти матрицы попарно коммутируют. Наличие такого базиса важно при рассмотрении динамики квантовых систем. В основной части книги мы будем повсеместно пользоваться понятием неприводимого представления группы и алгебры Ли, а также идентифицировать неприводимое представление с физическим полем. Естественно, что поле как неприводимое представление описывается операторами-генераторами рассматриваемой группы Ли, которые суть физические величины, описывающие это поле. Часть генераторов будет коммутировать между собой попарно и составит так называемую подалгебру Картана. В общем базисе операторов подалгебры Картана скорее всего будет наблюдаться вырождение, т.е.некоторым наборам собственных значений этих операторов будет соответствовать более одного собственного вектора. Поэтому генераторы из подалгебры Картана надо дополнять операторами, которые коммутируют с этими генераторами и между собой так, чтобы любому возможному набору собственных значений такого расширенного набора операторов соответствовал только один собственный вектор. Принято генераторы подалгебры Картана дополнять операторами Казимира рассматриваемой алгебры Ли, а также её подалгебр. Напомним, что операторами Казимира называют эрмитовы операторы, которые коммутируют со всеми генераторами алгебры Ли, поэтому их добавление в такой набор естественно. Полученный таким образом набор попарно коммутирующих эрмитово самосопряженных операторов называют полным набором наблюдаемых для пространства симметрии.

[19] Более детальное рассмотрение представлено в Приложении, см. **§ 1. Квантовые понятия и обозначения**, раздел **1.4 Коммутатор и совместный базис из собственных векторов набора наблюдаемых** на стр. 298.

[20] В этом ортонормированном базисе собственных векторов в собственном подпространстве матрица $\hat{A}$ пропорциональна единичной, а коэффициент пропорциональности равен собственному значению a. Поэтому ясно, что в этом подпространстве можно перейти к ортонормированному базису эрмитовой матрицы $\hat{B}$, причем очевидно, что собственные векторы $\hat{B}$ будут и собственными для матрицы $\hat{A}$, так как $\hat{A}$ на этом подпространстве будет пропорциональна единичной матрице.

В качестве примера описания системы в терминах полного набора наблюдаемых в следующем параграфе мы рассмотрим генераторы симметрии поворотов и инвариантный относительно поворотов квадратичный оператор Казимира для тензорных полей.

§3. Спиновые операторы и состояния

Общий случай «операторного» квантования матриц спина группы вращений, базис собственных векторов спина s и действие на него понижающей и повышающей матриц, число компонент в базисе спина s. Тензорные поля как базис полей с целым спином, связь стандартного представления и тензорных компонент в декартовом базисе, спин $s = 2$, неприводимые представления для полей спина s — симметричные бесследовые тензоры ранга s, нулевой спин символов Кронекера и Леви-Чивиты, сферические гармоники $\mathcal{Y}_{l,m}$ как симметричные бесследовые тензоры ранга l и тензорное произведение единичных радиус-векторов.

3.1 Квантование спина

Рассмотрим преобразования компонент тензора при действии группы поворотов с генераторами $\boldsymbol{s}$ в декартовом базисе. В этом базисе евклидова метрика — это единичная матрица $g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}$, и, следовательно, обратная метрика также является единичной матрицей. Поэтому операции поднимания ковариантных индексов и опускания контравариантных индексов оставляют компоненты тензора неизменными, так что можно все индексы считать нижними, что мы и делаем в этом параграфе.

Пусть теперь $\boldsymbol{s}$ — эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы поворотов (I.1.23):

$$[s_\alpha, s_\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma.$$

В полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например, s_z, так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить скаляр[21], $\boldsymbol{s}^2$. Вычислим коммутатор

$$[\boldsymbol{s}^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = \mathrm{i}\,\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\,(s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках симметричный относительно перестановок индексов β и γ тензор второго ранга сворачивается по двум индексам с тензором $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$, антисимметричным по перестановкам тех же индексов β и γ, но такая свертка симметричной матрицы с антисимметричной всегда тождественно равна нулю (см. Приложение, **§2. Формулы тензорного анализа**). В итоге,

$$[\boldsymbol{s}^2, s_\alpha] = 0, \tag{I.3.1}$$

и полный набор наблюдаемых[22] с точки зрения группы поворотов составляют $\{\boldsymbol{s}^2, s_z\}$.

Базис удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$\boldsymbol{s}^2 |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s\, |\lambda_s, m_s\rangle, \qquad s_z |\lambda_s, m_s\rangle = m_s |\lambda_s, m_s\rangle. \tag{I.3.2}$$

Будем считать этот базис ортонормированным (см. Приложение, **§1. Квантовые понятия и обозначения**).

---

[21] Другие скаляры можно построить в виде мономов от натуральных степеней скаляра $\boldsymbol{s}^2$, умножая такие мономы на числа и складывая в полиномы. В физике такие произвольные полиномы обычно не несут никой новой информации о состоянии системы.

[22] Какие у нас есть основания считать, что набор наблюдаемых полон, т. е. каждому отличному от других набору собственных значений этих двух операторов соответствует уникальный собственный вектор, — вопрос, который мы здесь не обсуждаем, просто полагая, что все другие характеристики системы не имеют отношения к группе поворотов. Другими словами, собственные значения инвариантных относительно поворотов наблюдаемых величин могут зависеть от инвариантного собственного значения $\boldsymbol{s}^2$, чего для нас достаточно при изучении группы поворотов. По существу мы полагаем, что в полный набор могут входить инвариантные относительно поворотов величины N_n: $[N_n, s_\alpha] \equiv 0$. Поэтому базис собственных состояний — это $|\lambda_s, m_s, \nu_n\rangle$, где $N_n|\lambda_s, m_s, \nu_n\rangle = \nu_n|\lambda_s, m_s, \nu_n\rangle$. Мы рассматриваем подпространство с фиксированным набором собственных значений ν_n.

В силу (I.3.1) повышающий и понижающий генераторы

$$s_\pm = s_x \pm \mathrm{i}\, s_y,$$

коммутируют с квадратом спина

$$[\boldsymbol{s}^2, s_\pm] = 0. \tag{I.3.3}$$

Заметим также, что $s_+^\dagger = s_-$. Оператор с плюсом принято называть повышающим, а с минусом — понижающим. Равный нулю коммутатор означает, что действие операторов s_x и s_y на элемент собственного подпространства оператора $\boldsymbol{s}^2$ не выводит результирующее состояние за пределы этого пространства с заданным значением λ_s, но переводит его в линейную комбинацию собственных состояний набора с другими m_s, так как в противном случае эти генераторы коммутировали бы с s_z, что противоречит (I.1.23). Это возможно, только если с одним и тем же значением λ_s существует несколько собственных векторов с разными значениями m_s. В таком случае принято говорить, что имеет место *вырождение спектра собственных значений λ_s по значениям m_s*. Таким образом мы установили *общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы A: если эрмитова матрица A коммутирует с эрмитовыми матрицами B и C, но сами матрицы B и C не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы A вырожден, например, по собственным значениям матрицы B в совместном базисе матриц A и B.*

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис $|\lambda_s, m_s\rangle$. Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_z, s_\pm] = [s_z, s_x] \pm \mathrm{i}\,[s_z, s_y] = \mathrm{i}\, s_y \pm \mathrm{i}\,(-\mathrm{i})\, s_x = \pm s_\pm.$$

Тогда

$$s_z s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm s_z \pm s_\pm)\,|\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1)\, s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор $s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle$ с нормой $N_\pm$ имеет собственные значения s_z, равные $m_s \pm 1$:

$$s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm(\lambda_s, m_s)\,|\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \quad \Rightarrow \quad (s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger = \langle\lambda_s, m_s|\, s_\mp = N_\pm(\lambda_s, m_s)\,\langle\lambda_s, m_s \pm 1|,$$

где мы задали комплексные фазы базиса из собственных векторов $|\lambda_s, m_s\rangle$ так, чтобы нормировочный коэффициент $N_\pm$ был вещественным. Найдем коэффициенты $N_\pm(\lambda_s, m_s)$. Для этого заметим, что

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + \mathrm{i}\,[s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

и аналогично

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - \mathrm{i}\,[s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle\lambda_s, m_s|\, s_\mp\, s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm^2(\lambda_s, m_s),$$

т. е.

$$N_\pm^2(\lambda_s, m_s) = \langle\lambda_s, m_s|\, s_\mp\, s_\pm|\lambda_s, m_s\rangle = \langle\lambda_s, m_s|(\boldsymbol{s}^2 - s_z^2 \mp s_z)|\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1). \tag{I.3.4}$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной, $N_\pm^2(\lambda_s, m_s) \geqslant 0$. Это условие в случае $N_+(\lambda_s, m_s)$ может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего оператора на собственное состояние $|\lambda_s, m_s\rangle$, во-первых, значения m_s не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s + 1) \leqslant \lambda_s,$$

и, во-вторых, должно существовать максимальное значение $m_s^{\max}$, которое дает в точности нулевое значение нормы вектора после повышения, так как в противном случае повышение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т. е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s.$$

В случае $N_-(\lambda_s, m_s)$ аналогичные рассуждения о многократном действии понижающего оператора на собственное состояние приводят к условию

$$m_s(m_s - 1) \leqslant \lambda_s$$

и необходимости существования минимального значения $m_s^{\min}$ такого, что

$$, \qquad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$ понижающим оператором n раз, мы получим $m_s = m_s^{\max} - n$ и в конце концов вектор, в точности равный $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$ в силу существования минимально допустимого значения m_s, т. е. для некоторого неотрицательного целого значения n верно $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$. Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось z с собственным значением квадрата спина λ_s приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max}+1) - m_s^{\min}(m_s^{\min}-1) = 0, \quad \Rightarrow$$
$$m_s^{\max}(m_s^{\max}+1) - (m_s^{\max}-n)(m_s^{\max}-n-1) = 0, \quad \Rightarrow$$
$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \qquad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось z обозначают символом s, так что

$$s = \frac{n}{2}, \tag{I.3.5}$$

т. е. допустимые значения проекции спина — это неотрицательные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые — спинорными.

Базис поля таким образом образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что, изменяя обозначения путем подстановки $\lambda_s = s(s+1) \mapsto s$, запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \qquad m_s \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}. \tag{I.3.6}$$

В физике максимальное значение s проекции спина на ось принято называть спином. Это же число задает собственное значение квадрата спина, равное $s(s+1)$. Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные векторы определено (см. (I.3.4)),

$$s_\pm |s, m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\, |s, m_s \pm 1\rangle. \tag{I.3.7}$$

В частном случае $s = 1$ мы ранее убедились, что соотношения (I.3.7) выполняются при прямом построении матриц спина и собственных векторов для матрицы s_z (см. формулы (I.2.33) и (I.2.34) на стр. 26).

Размерность k пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна количеству векторов с разными значениями проекции спина: один старший вектор с максимальным значением проекции и n шагов от старшего вектора до младшего, т. е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы поворотов для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при конечных поворотах, а значит, при многократном действии генераторов спина вектор с заданной проекцией спина на ось z перемешивается со всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т. е. пространство собственных векторов с заданным квадратом спина не содержит в себе подпространств, векторы которых не смешивались бы друг с другом при действии группы поворотов[23].

Для скаляра $s = 0$, и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора $s = 1$, и поле имеет три компоненты, это — триплет (символ 3), у спинора $s = \frac{1}{2}$, и поле имеет две компоненты, это — дублет (символ 2).

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным или стандартным спиновым базисом.

В физике собственные кет-векторы, образующие базис в векторном подпространстве с заданным значением спина s, называются базисом собственных квантовых состояний для этого спина, а векторы с ограниченной нормой, построенные в виде суперпозиции собственных векторов — состояниями квантовой системы с заданным спином s. Корень «квант» в данном случае означает, что размерная величина собственного момента вращения кванта поля с матричным вектором спина $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \boldsymbol{s}$ включает в себя постоянную Планка, а собственные значения квадрата спина и его проекции дискретны, и интервал

[23] В линейном пространстве полей, на котором действует матричное представление группы Ли, можно ввести нетривиальные классы эквивалентности по отношению к действию группы с точностью до линейных суперпозиций: класс ненулевого элемента пространства (поля) образуется линейной оболочкой элементов поля, которые получаются действием всех элементов группы на выбранный элемент. Представление является неприводимым, если в нем есть только один класс эквивалентности (нетривиальный класс включает в себя хотя бы один ненулевой элемент, сам же нулевой элемент обычно не преобразуется, т. е. является инвариантом).

между соседними собственными значениями задается постоянной Планка.

Задача 3. Найдите преобразование матриц спина векторного поля $s = 1$, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z.

Подчеркнем, что действие операторов группы поворотов подразумевает многократное действие операторов s_z и $s_\pm$, а также тождественного преобразования, которые задают бесконечно малые повороты, на описанные состояния с заданным моментом вращения. При этом базисные состяния $|s, m\rangle$ определяют ортонормированный базис своей линейной оболочки, которую называют пространством состояний с заданным моментом вращения. Таким образом любой отличный от нуля элемент пространства с заданным моментом вращения при действии группы поворотов с точностью до коэффициента переходит в любой другой отличный от нуля элемент того же пространства, поскольку, как ясно из проведенного рассмотрения, это справедливо для любого базисного состояния. Такие пространства, как говорят, инвариантны относительно действия группы преобразований, и они называются пространствами неприводимого представления группы преобразований. В отличие от неприводимых приводимые пространства представления группы могут содержать отличные от нуля и самого пространства другие инвариантные подпространства. Итак, построенные состояния с заданным моментов вращения s являются базисом непрвиводимого представления группы поворотов, а сам такой базис называется мультиплетом группы поворотов.

3.2 Тензорные поля

Рассмотрим, как стандартное представление тензорного поля связано с его индексным представлением по компонентам в декартовом базисе евклидова пространства.

Для скалярного поля ответ элементарен, поскольку скалярная функция с $s = 0$ имеет лишь одну единственную компоненту $\langle\Phi|0, 0\rangle = \Phi(\boldsymbol{r})$. Предположение заключается в том, что поле со спином s можно представить обладающим специальными свойствами тензором ранга s.

Для векторного поля $s = 1$, и вопрос был уже рассмотрен нами выше:

$$\mathcal{A}_\pm = \langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\pm1\rangle = \mp\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathcal{A}_x \pm \mathrm{i}\,\mathcal{A}_y), \qquad \mathcal{A}_0 = \langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|0\rangle = \mathcal{A}_z, \tag{I.2.29}$$

где в стандартном спиновом базисе

$$|m\rangle \cong |1, m\rangle, \qquad m = \{+1, 0, -1\}.$$

Мы далее используем эти символьные обозначения для перехода от дираковских обозначений к покомпонентным при записи действия операторов на состояния, как говорят, в представлении поля $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ согласно следующей схеме: действие оператора $\hat{G}$ при переходе от дираковских обозначений в стандартном спиновом базисе к полевым компонентам

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\Big(\hat{G}|m\rangle\Big) \equiv \hat{G}\,\mathcal{A}_m,$$

так что, например, для спиновых операторов

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\Big(s_\alpha|m\rangle\Big) \equiv s_\alpha\,\mathcal{A}_m.$$

Поскольку

$$s_\pm|m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}|m \pm 1\rangle\Big|_{s=1, m_s=m} = \sqrt{2 - m(m \pm 1)}|m \pm 1\rangle,$$

в таких обозначениях

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\Big(s_-|+1\rangle\Big) = \sqrt{2}\,\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad s_-\mathcal{A}_+ = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_0.$$

Аналогично из

$$s_z|m\rangle = m|m\rangle$$

следует, что

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|\Big(s_z|m\rangle\Big) = m\,\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}|m\rangle \quad \Leftrightarrow \quad s_z\mathcal{A}_m = m\,\mathcal{A}_m.$$

Тогда для собственных базисных состояний спина вектора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$

$$s_z\mathcal{A}_+ = (+1)\,\mathcal{A}_+, \qquad s_z\mathcal{A}_0 = 0\cdot\mathcal{A}_0, \qquad s_z\mathcal{A}_- = (-1)\,\mathcal{A}_-, \tag{I.3.8}$$

а действие повышающего оператора дает

$$s_+\mathcal{A}_+ = 0, \qquad s_+\mathcal{A}_0 = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_+, \qquad s_+\mathcal{A}_- = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_0. \tag{I.3.9}$$

Аналогично для понижающего оператора

$$s_-\mathcal{A}_+ = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_0, \qquad s_-\mathcal{A}_0 = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_-, \qquad s_-\mathcal{A}_- = 0. \tag{I.3.10}$$

Важно подчеркнуть, что согласно общему рассмотрению базисных состояний момента вращения спин s задает собственное значение квадрата спина, равное $s(s+1)$ так, что само значение s — это собственное значение проекции s_z на старшем векторе состояния, действие на который повышающего оператора дает состояние, равное нулю. Фактически в приведенных формулах мы имеем дело со стандартным спиновым представлением в терминах квантовой механики, при этом здесь мы не меняем обозначения генераторов при переходе из абстрактного представления к спиновому.

Заметим теперь, что любое тензорное поле с заданным значением $\boldsymbol{s}^2 = s(s+1)$ при $s > 1$ можно построить, если начать со старшего собственного вектора, действуя понижающей матрицей. Опишем алгоритм определения старшего вектора. Необходимо так же, как мы делали это для «плюсовой» компоненты вектора $\mathcal{A}_+$, записать «плюсовые» компоненты тензора ранга s

$$\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s}\,.$$

Повышающий оператор S_+ — это сумма повышающих операторов $s_+^{(k)}$, *каждый из которых действует на свой, k-ый по порядку индекс тензора*,

$$S_+ = \sum_{k=1}^{s} s_+^{(k)}.$$

В силу (I.3.9)

$$S_+\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} = \Big(\sum_{k=1}^{s} s_+^{(k)}\Big)\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} = 0. \tag{I.3.11}$$

Аналогично для проекции спина на ось z

$$S_z = \sum_{k=1}^{s} s_z^{(k)},$$

в силу (I.3.8) находим

$$S_z\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} = \Big(\sum_{k=1}^{s} s_z^{(k)}\Big)\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} = \Big(\sum_{k=1}^{s} (+1)\Big)\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} = s\cdot\,\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s}\,. \tag{I.3.12}$$

Соотношения (I.3.11) и (I.3.12) означают, что «плюсовые» компоненты тензора ранга s по своим свойствам изоморфны старшему спиновому состоянию с проекцией спина, равной s:

$$\underbrace{\mathcal{T}_{++\cdots}}_{s} \;\cong \langle\mathcal{T}|s,s\rangle.$$

Следовательно, и спин всех $(2s+1)$ состояний стандартного представления, полученных многократным действием понижающего оператора на состояние старшего вектора, включая этот вектор, равен максимальному значению проекции s, а $\boldsymbol{S}^2$ имеет собственное значение $s(s+1)$.

Например, для поля, заданного компонентами тензора второго ранга $T_{\alpha\beta}$, со спином $s = 2$, матрицы спина являются суммой двух матриц по каждому из двух тензорных индексов по порядку, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}^{(2)}$, а значит, старший вектор —

$$T_{(+2)} = \langle T|2,+2\rangle \equiv T_{++}, \qquad S_+T_{++} = (s_+^{(1)} + s_+^{(2)})T_{++} = 0, \qquad S_zT_{++} = (s_z^{(1)} + s_z^{(2)})T_{++} = 2\,T_{++}.$$

Проводя замену при переходе от компонент в базисе собственных значений проекции спина к компонентам в декартовом базисе *по каждому индексу тензора* так же, как и для вектора в (I.2.29),

$$\mathcal{A}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathcal{A}_x + \mathrm{i}\,\mathcal{A}_y),$$

найдем

$$T_{++} = \big\langle\text{замена базиса по первому индексу}\big\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(T_{x+} + \mathrm{i}\,T_{y+}) =$$
$$= \big\langle\text{замена базиса по второму индексу}\big\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(T_{xx} + \mathrm{i}\,T_{xy}) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\,(T_{yx} + \mathrm{i}\,T_{yy})\right).$$

После приведения подобных членов

$$T_{++} = \tfrac{1}{2}\,\{T_{xx} - T_{yy} + \mathrm{i}\,(T_{xy} + T_{yx})\}\,. \tag{I.3.13}$$

Во-первых, это равенство как справа, так и слева является симметричным по перестановке индексов тензора. Во-вторых, применяя связь (I.3.13) к единичному тензору $\mathbb{1}_{\alpha\beta}$, находим, что старший вектор спина 2 для символа Кронекера с нижними индексами в декартовых координатах тождественно равен нулю:

$$\delta_{(+2)} \equiv \delta_{++} \equiv 0.$$

Продолжим построение стандартного спинового базиса для тензора с отличными от нуля компонентами T_{++}, которые изоморфны старшему вектору спина 2, т. е. состоянию $|2,+2\rangle$. Поскольку в общем случае

$$S_-|S,M\rangle = \sqrt{S(S+1) - M(M-1)}|S,M-1\rangle,$$

то при $S = M = 2$

$$S_-|2,+2\rangle = \sqrt{2\cdot 3 - 2\cdot 1}\,|2,+1\rangle = 2\,|2,+1\rangle.$$

Следовательно, $T_{(+1)} \equiv \langle T|2,+1\rangle$ получим действием понижающего оператора на старший вектор

$$\tfrac{1}{2}\,S_-\,T_{++} \equiv \tfrac{1}{2}\,S_-\,T_{(+2)} = T_{(+1)},$$

откуда при эквивалентном действии суммой понижающих операторов на каждую компоненту тензора так, как это имеет место для компоненты вектора

$$s_-\mathcal{A}_+ = \sqrt{2}\,\mathcal{A}_0,$$

установим, что

$$T_{(+1)} = \tfrac{1}{2}\,(s_-^{(1)} + s_-^{(2)})\,T_{++} = \tfrac{1}{2}\,(s_-^{(1)}\,T_{++} + s_-^{(2)}\,T_{++}) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,T_{0+} + \sqrt{2}\,T_{+0}\right) =$$
$$= \big\langle\text{замена базиса по индексу «нуль»}\big\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(T_{z+} + T_{+z}) =$$
$$= \big\langle\text{замена базиса по индексу «плюс»}\big\rangle = -\tfrac{1}{2}\,\left(T_{zx} + \mathrm{i}\,T_{zy} + T_{xz} + \mathrm{i}\,T_{yz}\right),$$

т. е.

$$T_{(+1)} = -\tfrac{1}{2}\,\{T_{zx} + T_{xz} + \mathrm{i}\,(T_{zy} + T_{yz})\}\,. \tag{I.3.14}$$

Далее, $S_-|2,+1\rangle = \sqrt{2\cdot 3 - 1\cdot 0}\,|2,0\rangle = \sqrt{6}\,|2,0\rangle$, а значит,

$$T_{(0)} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\,(s_-^{(1)} + s_-^{(2)})\,T_{(+1)} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\,(s_-^{(1)} + s_-^{(2)})\,(T_{0+} + T_{+0}) =$$
$$= \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\,(s_-^{(1)}\,(T_{0+} + T_{+0}) + s_-^{(2)}\,(T_{0+} + T_{+0})) = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\,(\sqrt{2}(T_{-+} + T_{00}) + \sqrt{2}(T_{00} + T_{+-})).$$

После несложных арифметических действий в несколько строк при переходе от компонент в базисе собственных значений проекции спина к компонентам в декартовом базисе *по каждому индексу тензора* получаем

$$T_{(0)} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\,\{2T_{zz} - T_{xx} - T_{yy}\}\,. \tag{I.3.15}$$

Аналогичным образом, стартуя с младшего вектора состояния $T_{(-2)} = T_{--}$ и действуя на него повышающим оператором S_+, найдем, что[24]

$$T_{(-2)} = T_{--} = T_{++}^*, \qquad T_{(-1)} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(T_{z-} + T_{-z}) = -T_{(+1)}^*. \tag{I.3.16}$$

[24] В этих формулах знак комплексного сопряжения имеет действие на мнимые единицы в соответствующей покомпонентной записи в декартовом базисе так, что компоненты тензора в декартовом базисе считаются вещественными. Кроме того, отметим, что те же компоненты тензора могут быть получены дальнейшим действием понижающего оператора S_- на состояние $T_{(0)} \cong \langle T|2,0\rangle$.

Итак, тензорное поле с заданным значением спина s можно построить из старшего вектора путем действия понижающей матрицы. Это тензорное поле имеет $2s+1$ компонент.

Заметим, что тензорное поле с заданным спином $s=2$ описывается симметричным тензором $T_{\alpha\beta}$, что ясно уже из того, что старший вектор спина 2, изоморфный T_{++}, является симметричным по перестановке двух своих «плюсовых» индексов, а понижающая матрица также построена симметрично по перестановке номеров индексов. Отсюда следует, что базисные состояния спина $s=2$, полученные из старшего вектора состояния T_{++} действием симметричного понижающего оператора $S_- = s_-^{(1)} + s_-^{(2)}$, связаны изоморфизмом исключительно с компонентами симметричного тензора ранга 2 в декартовом базисе.

При этом такой симметричный тензор обладает еще и нулевым следом, поскольку след дает нулевой вклад в компоненты стандартного представления для тензорного поля с $s=2$. В самом деле, во-первых, если посчитать число степеней свободы, то симметричный тензор второго ранга имеет 6 независимых компонент. Поэтому требование нулевого следа симметричного тензора второго ранга накладывает одно условие на 6 компонент симметричного тензора, и это оставляет пять независимых компонент, как это и должно быть у тензорного поля, которое описывает состояния со спином 2. След тензора является инвариантом относительно поворотов, т. е. след тензора не преобразуется при поворотах, и останется нулевым при любом повороте.

Заметим, что симметричный символ Кронекера с нижними индексами, т.е. единичная матрица, хоть и обладает рангом, равным 2, дает при подстановке его компонент в формулы (I.3.13)–(I.3.16) тензорное поле спина 2, тождественно равное нулю. Например, компонента старшего вектора состояния спина 2 равна

$$\delta_{++} = \tfrac{1}{2}(\delta_{xx} - \delta_{yy} + \mathrm{i}(\delta_{xy} + \delta_{yx})) = \tfrac{1}{2}(1 - 1 + \mathrm{i}(0+0)) \equiv 0,$$

а отсюда сразу следует, что при кратном действии понижающего оператора на нуль получатся только нули. В действительности из того, что компоненты символа Кронекера не преобразуются при поворотах, т. е. евклидова метрика, равная единичной матрице в декартовых координатах, ведет себя как инвариант, сразу следует, что матрицы спина как генераторы поворотов, которые преобразуют компоненты этого тензора при бесконечно малых поворотах, тождественно равны нулю[25]. Заодно мы можем сделать вывод о том, что и спиновые матрицы инвариантного тензора Леви-Чивиты также тождественно равны нулю, т. е. спин тензора Леви-Чивиты равен нулю.

Во-вторых, бесследовый симметричный тензор второго ранга $\tilde{T}_{\alpha\beta}$, построенный путем симметризации тензора $T_{\alpha\beta}$,

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) - \tfrac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,T_{\gamma\gamma} \tag{I.3.17}$$

согласно формулам (I.3.13)–(I.3.16) задает ровно те же компоненты стандартного представления спина 2, что и исходный тензор $T_{\alpha\beta}$, так как вклад следа с символом Кронекера в стандартное представление по компонентам обращается в нуль. Это значит, что выделение из исходного тензора ранга 2 бесследовой симметричной части согласно (I.3.17) дает тензорные компоненты, изоморфные стандартному представлению спина 2, а остальные, антисимметричные по перестановкам компоненты и след не имеют отношения к спину 2.

В-третьих, ясно что антисимметричные компоненты тензора второго ранга определяют тензор ранга 1 вида

$$V_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta}.$$

Это вектор имеет 3 компоненты и изоморфен стандартному представлению спина 1, а след $\operatorname{tr} T = T_{\gamma\gamma}$ задает инвариантную относительно поворотов величину ранга нуль, обладающую спином 0, и как любой скаляр состоит из одной компоненты. Таким образом девятикомпонентный произвольный тензор второго ранга, состоит из 5 компонент спина 2, трех компонент спина 1 и одной компоненты спина 0, т. е. из тех же 9 компонент.

Задача 4. В базисе $\{+,-,0\}$ вычислите все компоненты евклидовой метрики $g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}$, заданной в декартовых координатах, используя преобразование от компонент вектора в стандартном спиновом базисе $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{A}_0$ к компонентам декартовых координат $\{\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z\}$. Ответ: ненулевые компоненты $g_{00} = -g_{+-} = -g_{-+} = 1$.

Теперь, поскольку любой симметричный тензор $T_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ можно представить в виде суммы тензора с нулевым следом по первым двум индексам[26] $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\ldots} = T_{\alpha\beta\gamma\ldots} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\ldots}$ и тензора меньшего ранга $T'_{\gamma\ldots} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, умноженного на символ Кронекера, $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\ldots}$, нужно рассматривать независимо преобразования при поворотах бесследовых тензоров ранга s и тензоров с рангом на две единицы меньше.

[25] Этот факт является прямым следствием того, что повороты являются изометрией евклидова пространства: все компоненты метрики в декартовых координатах остаются инвариантными при изометрии.

[26] Для симметричного тензора не имеет значения, по какой паре индексов берется след: след по любой паре приводит к одному и тому же тензору на две единицы меньшего ранга.

При этом, вклад тензора $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ в состояние с максимальной проекцией спина s равен нулю, так как $\frac{1}{3}\delta_{++}T'_{+\dots}\equiv 0$, а это значит, что произведение символа Кронекера на тензор ранга $(s-2)$ не дает вклада в состояния спина s. Следовательно, симметричный тензор спина s — бесследовый.

Другими словами, след симметричного тензора ранга s по двум любым индексам — это симметричный тензор ранга $(s-2)$, и компоненты этого тензора изоморфны базису пространства, инвариантного относительно группы поворотов, так что, если этот след отличен от нуля, то в пространстве размерности s с базисом, изоморфным компонентам исходного тензора ранга s, существует инвариантное подпространство размерности на 2 единице меньше. Поэтому неприводимому представлению группы поворотов со спином s отвечает симметричный бесследовый тензор ранга s в смысле изоморфности базиса неприводимого представления и компонент такого тензора.

Рассмотрим число степеней свободы такого симметричного бесследового тензора методом математической индукции:

- вектор[27], т. е. тензор ранга $s=1$, имеет $2s+1=3$ независимых компоненты, а симметричный бесследовый тензор второго ранга $(s=2)$ имеет $2s+1=5$ компонент, так что стартовые условия в методе математической индукции выполнены.

- Если симметричный бесследовый тензор $T'_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ ранга s обладает $2s+1$ независимыми компонентами, то добавление еще одного индекса к нему, т. е. введение тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$, симметричного и бесследового по первым s индексам, означает, что построен тензор ранга $s+1$ с числом независимых компонент, равным $(2s+1)\cdot 3$, т. е. трем независимым наборам с $2s+1$ независимыми компонентами. Тогда взятие свертки по любому индексу α и индексу β дает симметричный бесследовый тензор ранга $s-1$
$$\tilde{T}_{\alpha_2\cdots\alpha_s}=T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\delta^{\alpha_1\beta},$$
у которого $2(s-1)+1=2s-1$ независимых компонент, которые представляют компоненты тензора спина $s-1$. Ясно, что в силу симметричности по перестановкам индексов α взятие свертки по индексу β и любому из индексов α приводит к одному и тому же тензору $\tilde{T}$. Исключим из числа компонент тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ компоненты тензора $\tilde{T}_{\alpha_2\cdots\alpha_s}$, которые имеют другое значение спина, приравняв их к нулю. Это дает нам $2s-1$ условий на компоненты тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$.

  Далее, в тензоре $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ выделим часть, антисимметричную по перестановкам индексов α и β, т. е. в декартовых координатах построим тензор ранга s
$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}=\epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}.$$
Этот тензор является бесследовым, поскольку, если взять свертку индекса γ с любым из индексов α, прямые вычисления дают
$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma}=T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\cdot\epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma}=T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\cdot\epsilon_{\alpha_1\beta\alpha_2}=0,$$
так как свертка по двум «немым» индексам α_1 и α_2 у симметричного тензора T и у антисимметричным тензором Леви-Чивиты обращается в нуль. Антисимметричная по перестановкам индекса γ с любым из индексов α часть тензора $\tilde{T}'$ также равна нулю, поскольку свертка с антисимметричным тензором Леви-Чивиты по двум «немым» индексам равна
$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}\cdot\epsilon_{\alpha_2\gamma\gamma'}=T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\cdot\epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}\epsilon_{\alpha_2\gamma\gamma'}=T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\big(-\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta\gamma'}+\delta_{\alpha_1\gamma'}\delta_{\beta\alpha_2}\big)=$$
$$=-T_{\alpha_1\alpha_1\dots\alpha_s\gamma'}+T_{\gamma'\alpha_2\dots\alpha_s\alpha_2}=-0+T_{\gamma'\beta\alpha_3\dots\alpha_s\beta}=\tilde{T}_{\gamma'\alpha_3\dots\alpha_s}.$$
Первое слагаемое обращается в нуль по условию бесследовости по любой паре из первых s индексов тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$. Последнее слагаемое равно нулю в силу того, что это тензор спина $s-1$, равенство нулю которого диктуется уже наложенным нами условием бесследовости тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ при свертке по индексу β и любому из индексов α. Но тогда тензор $\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}$ является бесследовым и симметричным по любой паре индексов, имеет ранг s и $2s+1$ независимую компоненту. Таким образом, в рассматриваемом тензоре $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ после наложения условия бесследовости его часть, антисимметричная по перестановкам индекса β с любым из α, содержит в себе $2s+1$ независимых компонент. Следовательно, в тензоре $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ из $3(2s+1)$ компонент после наложения условий бесследовости и симметричности останется
$$3(2s+1)-(2s-1)-(2s+1)=2s+3=2(s+1)+1$$

[27]Случаи скаляра и вектора являются тривиальными: скаляр имеет единственную компоненту, инвариантную относительно группы поворотов, так что спиновые матрицы имеют размер 1×1 и тождественно равны нулю, а матрицы вектора не равны нулю, но один тензорный индекс у вектора не с чем симметризовать, так что подсчет числа компонент вектора является элементарным.

независимых компонент, изоморфных базису состояний поля со спином $(s+1)$.

- По индукции заключаем, что симметричные бесследовые тензоры ранга s имеют $2s+1$ независимых компонент и отвечают тензорным полям спина s в том случае, когда компонента старшего состояния $T_{+\ldots+}$ с максимальной проекцией на ось z отлична от нуля, так как иначе весь тензор оказывается равным нулю.

Например, если исходный тензор был символом Кронекера, то его бесследовая часть тождественно равна нулю, что отвечает нулевому полю со спином 2 для символа Кронекера. Тензор Леви-Чивиты бесследовый и имеет ранг, равный 3, но это инвариантный тензор[28], поэтому его спин равен нулю.

Итак, тензорные поля с определенным значением квадрата спина s описываются симметричными тензорами ранга s с нулевым следом по любой паре индексов. Они представляют собой неприводимые представления группы поворотов мультиплетностью $2s+1$.

• Сферические гармоники

В качестве примера, рассмотрим симметричный бесследовый тензор второго ранга, составленный из единичных радиус-векторов $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$:

$$T_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Его компоненты, выраженные в терминах сферических координат для $\boldsymbol{n}$ в соотношениях (I.2.31) при подстановке в формулы для тензорного поля в разделе **3.2 Тензорные поля** этого параграфа, имеют вид

$$T_{(\pm2)} = \frac{1}{2}\,\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\phi}, \quad T_{(\pm1)} = \mp\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}, \quad T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(3\cos^2\theta - 1).$$

Эти компоненты пропорциональны сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_{2,m}(\theta,\phi)$ — функциям углов на сфере с индексом m, равным проекции спина на ось z, так что $\mathcal{Y}_{2,m} \sim T_{(m)}$, $m = \{\pm2, \pm1, 0\}$.

Сферические гармоники $\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi)$ как специально нормированные состояния $|l,m\rangle$ строятся из старшего вектора состояния

$$|l,l\rangle = \mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) \sim (n_+)^l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2^l}}\,\sin^l\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,l\phi}$$

действием понижающего оператора S_- так же, как это было сделано при рассмотрении тензора второго ранга, изоморфного стандартному представлению спина 2. Например, так как согласно (I.2.29), (I.2.31) и (I.3.10)

$$s_- n_+ = \sqrt{2}\,n_0, \quad n_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\theta\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad n_0 = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad s_- n_+ = \sqrt{2}\,\cos\theta,$$

то найдем, что в результате действия понижающего оператора S_- на состояние $|l,l\rangle \sim (n_+)^l$ с точностью до постоянного множителя получится состояние $|l,l-1\rangle = \mathcal{Y}_{l,l-1}(\theta,\phi)$

$$|l,l-1\rangle \sim S_-(n_+)^l = l\,\sqrt{2}\,n_0\,(n_+)^{l-1} = l\,\frac{(-1)^{l-1}}{\sqrt{2^{l-2}}}\,\sin^{l-1}\theta\,\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(l-1)\phi} \sim \mathcal{Y}_{l,l-1}(\theta,\phi).$$

Дальнейшие шаги понижения значения проекции момента вращения и построения соответствующих сферических гармоник как состояний с проекцией момента вращения, равной m, проводятся аналогично[29]. Здесь нам было важно обосновать этот алгоритм, в то время как явные выражения для сферических гармоник приводятся в справочниках.

Принятое в квантовой механике условие нормировки сферических гармоник

$$\int \mathrm{d}\Omega\,\mathcal{Y}^*_{l,m}(\theta,\phi)\mathcal{Y}_{l,m'}(\theta,\phi) = \delta_{mm'}$$

приводит к соотношению[30]

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l}}\,\frac{1}{l!}\,(n_+)^l.$$

[28] Умножение тензора на инвариантный тензор с соответствующей сверткой индексов для получения составного тензора не меняет спин исходного тензора. Это произведение будет преобразовываться при поворотах системы отсчета ровно также, как произведение исходного тензора на тот же инвариантный тензор, по определению инвариантного тензора, который при поворотах. Скажем, произведению вектора на символ Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\gamma$ соответствует спин $s=1$.

[29] Для справок отметим, что имеет место связь между сферическими гармониками с положительными и отрицательными значениями проекций момента вращения m: $\mathcal{Y}_{l,-m} = (-1)^m\mathcal{Y}^*_{l,m}$.

[30] Вычислите нормировочный коэффициент самостоятельно.

При действии группы поворотов компоненты тензора с заданным спином преобразуются друг в друга. Эти компоненты изоморфны базису состояний неприводимого представления группы поворотов. Термин неприводимого представления мы понимаем в следующем смысле. Во-первых, для таких тензорных полей с определенным значением спина невозможно выделить инвариантное подпространство, элементы которого не смешиваются с элементами других подпространств. Во-вторых, исключаются из такого рассмотрения тривиальное подпространство нулевого элемента и само пространство состояний спина s.

3.3 Разложение приводимых тензоров на неприводимые

Рассмотрим тензорное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. тензор с компонентами

$$T_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta.$$

Выделим в этом тензоре симметричный и антисимметричный вклады,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha\} + \frac{1}{2}\{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\},$$

и запишем отдельно бесследовый симметричный тензор и его след, так что

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\right\} + \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + \frac{1}{2}\{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}.$$

Бесследовый симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left\{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\right\}$$

отвечает тензору спина $s = 2$, а значит, его компоненты при поворотах преобразуются друг в друга без наличия инвариантных подмножеств, т. е. это неприводимое представление группы поворотов.

Скалярному вкладу спина $s = 0$ отвечает слагаемое

$$s_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

так как скалярное произведение векторов — это инвариант, также как инвариантом является и символ Кронекера.

Антисимметричный тензор

$$t_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}$$

как матрица 3×3 имеет на диагонали нули, над диагональю 3 независимых элемента, а под диагональю все элементы являются отражением элементов над диагональю с противоположным знаком, так что этот тензор имеет 3 независимых компоненты, причем все они могут быть записаны с помощью символа Леви-Чивиты в виде

$$t_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_\gamma.$$

Здесь символ Леви-Чивиты — инвариантный тензор, а $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ — вектор, т. е. тензорное поле спина $s = 1$.

Задача 5. Запишите векторное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ в покомпонентном виде

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_\gamma = \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'}a_{\alpha'}b_{\beta'}$$

и, взяв свертку двух сиволов Леви-Чивиты по индексу γ, докажите, что

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_\gamma = \tfrac{1}{2}\{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}.$$

В итоге, составной тензор второго ранга, который представляет собой тензорное произведение двух тензоров со спином $s = 1$, $T = 3\otimes 3$, разложен в прямую сумму тензоров со спином 0, 1 и 2 — синглет, триплет и квинтет:

$$\mathrm{SO}(3): \quad 3\otimes 3 = 1\oplus 3\oplus 5.$$

Каждый член этой суммы — неприводимый тензор группы поворотов. Таким образом, мы описали пример разложения приводимого тензора по неприводимым, так что для тензора второго ранга это разложение имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}T_{\gamma\gamma}\right\} + \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}T_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha'\beta'}T_{\alpha'\beta'}.$$

В фигурных скобках стоит симметричный бесследовый тензор второго ранга, имеющий пять независимых компонент, изоморфных состояниям неприводимого представления группы поворотов с моментом вращения, равным двум, Второй член с дельта-символом Кронекера инвариантен, так что след тензора изоморфен состоянию неприводимого представления группы поворотов с моментом вращения, равным нулю. Последний вклад построен из инвариантных символов Леви-Чивиты и антисимметричного по перестановкам вклада в тензор второго ранга, имеющего три независимых компоненты, изоморфных состояниям неприводимого представления группы поворотов с моментом вращения, равным единице.

Изложенная нами в случае тензорного произведения векторов схема действий при разложении тензора на неприводимые слагаемые, выделение симметричной бесследовой части, следа и антисимметричной части, остается в силе и при рассмотрении тензоров высших рангов и при описании тензорного произведения неприводимых тензоров, т. е. при произведении тензоров с определенным спином.

Задача 6. Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения квинтета на триплет в группе SO(3): $5 \otimes 3$.

3.4 Поперечные векторные и тензорные поля

В релятивистской теории поля могут возникать особые условия, когда не все проекции спина реализуются в природе.

Например, для свободного электромагнитного поля уравнения Максвелла дают

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0,$$

так что для плоской монохроматической волны электрического поля с волновым вектором $\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}, \qquad \omega = c\,k,$$

найдем, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \partial_\alpha \mathcal{E}_\alpha = \mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0.$$

Таким образом поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ является поперечным по отношению к волновому вектору $\boldsymbol{k}$ в силу уравнений Максвелла. Значит, если в качестве оси z выбрать направление волнового вектора $\boldsymbol{k}$, то $k_z \cdot \mathcal{E}_z = 0$ при $k_z \neq 0$, и нулю должна быть равна компонента вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ с нулевой проекцией спина на ось волнового вектора, $\mathcal{E}_z = 0$, а отличными от нуля могут быть лишь две другие компоненты $\mathcal{E}_\pm$ поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ с проекцией спина на ось волнового вектора, равной $+1$ и -1.

Такая ситуация характерна для теорий с калибровочной инвариантностью. Например, электромагнитное поле — это калибровочное поле с массой, равной нулю.

Другой пример — это свободное безмассовое гравитационное поле, которое описывается симметричным бесследовым тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$. Оно тоже является поперечным по каждому из индексов в декартовом пространстве,

$$\nabla_\mu h_{\mu\nu} = 0,$$

откуда для плоской монохроматической волны в декартовых координатах

$$h_{\mu\nu} = h^{(0)}_{\mu\nu} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

находим

$$\nabla_\mu h_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot h^{(0)}_{\mu\nu} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \mathrm{i}\,k_\mu h_{\mu\nu} = 0.$$

Рассматривая плоскую монохроматическую волну с волновым вектором, направленным вдоль оси z, мы получаем, что

$$k_z \cdot h_{z\nu} = 0, \quad k_z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad h_{z\nu} = 0 \ \text{ при } \ \nu = \{x, y, z\},$$

и с учетом симметричности тензора $h_{\mu\nu}$ установим, что

$$h_{zz} = h_{zx} = h_{zy} = h_{xz} = h_{yz} \equiv 0.$$

Кроме того, вследствие бесследовости тензора второго ранга со спином 2, т. е. вследствие $h_{\gamma\gamma} = 0$,

$$h_{\gamma\gamma} = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \ \text{ и при } \ h_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Отсюда согласно общим формулам описания тензора спина $s = 2$ в разделе **3.2 Тензорные поля** этого параграфа следует, что равны нулю все компоненты тензора с проекциями спина на ось волнового вектора, равными ± 1 и 0:

$$h_{(\pm 1)} = h_{(0)} \equiv 0.$$

Таким образом поперечное безмассовое свободное гравитационное поле ограничивается проекциями спина на ось волнового вектора $m_s = \pm 2$.

В релятивистской теории свободных полей доказывается, что безмассовые поля — поперечные, и поэтому для них реализуются только максимальное и минимальное значения проекции спина на ось волнового вектора.

§ 4. Спин $s = 1/2$

Спинор и матрицы Паули, антикоммутатор, преобразование спинора при поворотах, поворот на угол 2π, гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, представления алгебры и накрывающая группа, эквивалентные представления группы поворотов спиноров $\mathrm{SU}(2)$, сопряженный спинор, билинейный спинорный инвариант и спинорная метрика, индексы с точками и без точек.

Рассмотрим поле с полуцелым спином $s = 1/2$. В этом случае вектор спиновых матриц представляется в виде

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \tag{I.4.1}$$

где σ_a — матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на элементы базиса. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как[31]

$$\left|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{I.4.2}$$

причем это — собственные векторы проекции спина на ту ось, оператор которой выбран в качестве генератора подалгебры Картана. В физике эту ось принято считать осью z, так что $s_z|s, m_a\rangle = m_s|s, m_s\rangle$, и во введенных обозначениях

$$s_z|+\rangle = \tfrac{1}{2}\,|+\rangle, \qquad s_z|-\rangle = -\tfrac{1}{2}\,|-\rangle. \tag{I.4.3}$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

как и должно быть для любой матрицы в ортонормированном базисе из собственных векторов. Согласно (I.3.7) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов —

$$\langle +|\, s_+ \,|-\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)} = 1, \tag{I.4.4}$$

$$\langle -|\, s_- \,|+\rangle = \left(\langle +|\, s_+ \,|-\rangle\right)^\dagger = 1, \tag{I.4.5}$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.4.6}$$

Тогда обратное преобразование $s_\pm \leftrightarrow s_{x,y}$ дает

$$s_x = \frac{1}{2}\,(s_+ + s_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.4.7}$$

и

$$s_y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(s_+ - s_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.4.8}$$

Поэтому сигма-матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = 2\,\boldsymbol{s}$ равны

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{I.4.9}$$

[31] Описание связи дираковских обозначений состояний в виде бра- и кет-векторов с матричными объектами приводится в Приложении, **§ 1. Квантовые понятия и обозначения**. Здесь же отметим, что в дираковских обозначениях состояний элементы столбцов — это значения волновой функции состояния системы, описываемой спинором, а именно, функции дискретной переменной m_s проекции спина на ось z. При $s = 1/2$ базисных состояний $|s, m_s\rangle$ всего два: $|+\rangle$ и $|-\rangle$, как равно двум и число значений дискретного аргумента m_s: $+1/2$ и $-1/2$.

Чтобы отличать фиксированный набор матриц (I.4.9) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, часто для матриц Паули используют обозначения $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Поле со спином $s = 1/2$, которое *называют спинором*, обладает двумя поляризациями[32]

$$|\theta^\alpha\rangle, \qquad \alpha = \{1, 2\}, \qquad |\theta^{(1)}\rangle = |+\rangle, \quad |\theta^{(2)}\rangle = |-\rangle,$$

поле спинора[33]

$$\langle\psi(\boldsymbol{r})|\theta^\alpha\rangle = \psi^\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{I.4.10}$$

— это так называемый *двухкомпонентный спинор Паули.*

Преобразования спинора при поворотах имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\boldsymbol{\phi}) \circ \psi(\boldsymbol{r}) = \psi_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\phi}}), \qquad \psi_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\phi}}) = \hat{R}_S(\boldsymbol{\phi}) \cdot \psi(\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{\phi} \equiv \phi\,\boldsymbol{\mathcal{O}}$ — вектор поворота на угол ϕ вокруг оси $\boldsymbol{\mathcal{O}}$, $R(\boldsymbol{\phi})$ операция преобразования поля спинора, а $\hat{R}_S(\boldsymbol{\phi})$ матрица преобразования компонент спинора, которая при бесконечно малых углах равна

$$\hat{R}_S(\boldsymbol{\phi}) \approx \mathbb{1} - \mathrm{i}\, s_c \phi_c, \qquad \boldsymbol{\phi} \to 0.$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$\hat{R}_S(\boldsymbol{\phi} + \mathrm{d}\boldsymbol{\phi}) = (\mathbb{1} - \mathrm{i}\, \boldsymbol{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\phi}) \cdot \hat{R}_S(\boldsymbol{\phi}),$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\hat{R}_S(\boldsymbol{\phi})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}} = -\mathrm{i}\, \boldsymbol{s} \cdot \hat{R}_S(\boldsymbol{\phi}). \tag{I.4.11}$$

Уравнение легко интегрируется с учетом начального условия $\hat{R}_S(\mathbf{0}) = \mathbb{1}$, откуда

$$\hat{R}_S(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi}}. \tag{I.4.12}$$

Итак, при поворотах спинор преобразуется согласно

$$\psi^\alpha_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\phi}}) = \left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi}}\right\}^\alpha_{\bullet\,\beta}\, \psi^\beta(\boldsymbol{r}), \tag{I.4.13}$$

где мы указали матричные индексы в явном виде.

Для вычисления матричной экспоненты установим два свойства матриц Паули:

1. коммутационные соотношения
$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2\,\mathrm{i}\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c, \tag{I.4.14}$$
которые следуют из коммутационных соотношений для момента вращения: $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = \mathrm{i}\,\epsilon_{abc}\,\frac{1}{2}\sigma_c$;

2. *антикоммутационные соотношения*
$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab} \cdot \mathbb{1}, \tag{I.4.15}$$
которые устанавливаются прямыми вычислениями[34] произведений матриц Паули.

Заметим, что двукратное действие повышающего оператора (I.4.6) приводит к спинору, равному нулю, поскольку при спине $s = 1/2$ допустим только один шаг от младшего вектора к старшему. Значит,

$$\sigma_+^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 + \mathrm{i}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) - \sigma_y^2 = 0.$$

[32] Далее до конца главы будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита: $\alpha, \beta, \ldots$, а для векторных индексов латинские буквы: $a, b, \ldots$

[33] В отличие от трехмерных векторов, для которых в евклидовом пространстве метрика в декартовых координатах — единичная матрица, так что при ортогональных преобразованиях можно не делать различий между верхними и нижними индексами, для двумерных спиноров, как будет ясно ниже, верхние и нижние индексы несут разную информацию: метрика для спиноров отличается от единичной матрицы.

[34] Результатом перемножения матриц и их сложения может быть только матрица, но когда это единичная матрица, ее часто опускают в записи такого рода соотношений, а вместо нулевой матрицы просто пишут нуль.

С учетом того, что $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{1}$, сразу находим антикоммутатор

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0.$$

Точно так же, вычисляя значение проекции спина на ось z до и после повышения, устанавливаем, что на базисных спинорах

$$\sigma_+\sigma_z + \sigma_z\sigma_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_x, \sigma_z\} + \mathrm{i}\{\sigma_y, \sigma_z\} = 0. \tag{I.4.16}$$

Но антикоммутатор сигма-матриц Паули — это эрмитово самосопряженная матрица, а мнимая единица антиэрмитова. Последнее равенство можно написать в виде $x + \mathrm{i}y = 0$, где x и y — эрмитовы матрицы. Поэтому при эрмитовом сопряжении этого равенства получим $x - \mathrm{i}y = 0$. Полусумма этих равенств дает $x = 0$, а полуразность — $\mathrm{i}y = 0$. Это значит, что в последнем равенстве формул (I.4.16) два антикоммутатора независимо обращаются в нуль, что завершает доказательство соотношения (I.4.15).

Поскольку

$$\sigma_a\sigma_b = \frac{1}{2}\,[\sigma_a, \sigma_b] + \frac{1}{2}\,\{\sigma_a, \sigma_b\},$$

находим

$$\sigma_a\sigma_b = \mathrm{i}\,\epsilon_{abc}\,\sigma_c + \delta_{ab}. \tag{I.4.17}$$

Домножая это тождество на векторы A_a и B_b, получаем

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{i}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{I.4.18}$$

где $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ — векторное произведение векторов[35]. В частности,

$$(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\phi}^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных поворотов

$$\hat{R}_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\mathrm{i}^n}{2^n n!}\,(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma})^n \tag{I.4.19}$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные — оператору

$$(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \phi\,(\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\,(\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

где $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ — единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi}} = \mathbb{1}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right) - \mathrm{i}\,(\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\sin\left(\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}\right)\Big) = \mathbb{1}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\,\phi\right) - \mathrm{i}\,(\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\sin\left(\tfrac{1}{2}\,\phi\right). \tag{I.4.20}$$

При повороте вокруг оси на угол $(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}) = \phi = 2\pi$ получаем $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{r}$ и

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\phi}}\Big|_{\phi=2\pi} = -\mathbb{1}. \tag{I.4.21}$$

Значит,

$$\psi^\alpha_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\phi}})\big|_{\phi=2\pi} = -\psi^\alpha(\boldsymbol{r}), \tag{I.4.22}$$

т. е. *поле спинора меняет знак после поворота на угол* 2π. Это свойство является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют *фермионами*.

Напомним теперь, что мы стартовали с алгебры группы поворотов 3-мерного евклидова пространства. Как видим, среди представлений этой алгебры имеются спинорные, причем группа поворотов спиноров не совпадает в силу (I.4.22) с группой SO(3).

Задача 7. Докажите, что для обратимых матриц вида $M = \mathrm{e}^A$ имеет место тождество

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}, \tag{I.4.23}$$

где $\mathrm{tr}\,A$ означает взятие следа матрицы A.

Решение. Рассмотрим решение уравнения для матриц $X(\tau) = \exp(\tau A)$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,X(\tau) = A\circ X(\tau)$$

[35]Из тождества (I.4.18) следует, что по отношению к зеркальной инверсии пространства матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ ведут себя как псевдовекторы, что и должно быть для момента вращения.

с граничными условиями

$$X(0) = \mathbb{1}, \qquad X(1) = M.$$

Тогда, дифференцируя детерминант обратимой матрицы (см. в Приложении раздел **2.2 Тензор Леви-Чивиты** в **§ 2. Формулы тензорного анализа**), находим

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial\tau}\det X(\tau) &= \det X(\tau)\,\big(X^{-1}(\tau)\big)^{\beta\alpha}\,\tfrac{\partial}{\partial\tau}\,X(\tau)_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau)\,\big(X^{-1}(\tau)\big)^{\beta\alpha}(A{\circ}X(\tau))_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau)\,\mathrm{tr}\,\big(X^{-1}(\tau){\circ}A{\circ}X(\tau)\big) = \det X(\tau)\,\mathrm{tr}\,A.\end{aligned}$$

Интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает

$$\det X(\tau) = \mathrm{e}^{\tau\,\mathrm{tr}\,A},$$

откуда следует искомое равенство (I.4.23).

Найдем детерминант матрицы обратимых преобразований спиноров при поворотах:

$$\det\hat{R}_S = \exp\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\big) = 1.$$

Это значит, что $\hat{R}_S$ — это специальные унитарные преобразования 2-мерных комплексных столбцов, т. е. группа SU(2).

• Группы SU(2) и SO(3)

В силу того, что при полном обороте вокруг любой оси в трехмерном пространстве координат вектор координат переходит сам в себя, а согласно (I.4.21) спинор при таком повороте не переходит в себя, а меняет знак, существует отличный от изоморфизма гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{SO}(3)$. Построим такой гомоморфизм.

Рассмотрим сигма-матрицы Паули — генераторы группы преобразований спиноров Паули ψ^α. У спинора мы записываем матричный индекс сверху и считаем, что компоненты спинора образуют столбец, а сам спинор является элементом контравариантного 2-мерного векторного пространства. Элемент ковариантного спинорного пространства χ_α принято записывать с нижним индексом, чтобы отличать элементы ковариантного пространства от элементов контравариантного пространства, а в инвариантном относительно преобразований группы, в данном случае группы SU(2), выражении $\chi_\alpha\psi^\alpha = \mathrm{inv}.$ соблюдался «баланс индексов». Определим ковариантное пространство сопряженным контравариантному так, чтобы при суммировании по немому индексу α, образующему пару из верхнего и нижнего, получался инвариант. Удобно считать, что компоненты ковариантного спинора χ_α образуют строку. Тогда в матричной форме записи инвариант $\chi_\alpha\psi^\alpha$ — это произведение строки χ_α на столбец ψ^α со значением в множестве комплексных чисел, а закон преобразования этих спиноров имеет вид матричного умножения столбца на матрицу $\hat{R}_S$, стоящую слева от столбца, в контравариантном пространстве и строки на обратную матрицу $\hat{R}_S^{-1}$, стоящую справа от строки, в ковариантном пространстве:

$$\psi_{\boldsymbol{\phi}} = \hat{R}_S\cdot\psi, \qquad \chi_{\boldsymbol{\phi}} = \chi\cdot\hat{R}_S^{-1} \quad\Rightarrow\quad \chi_{\boldsymbol{\phi}}\cdot\psi_{\boldsymbol{\phi}} = \chi\cdot\psi.$$

Итак, верхние спинорные индексы преобразуются матрицами $\hat{R}_S$, а нижние — обратными матрицами $\hat{R}_S^{-1}$. Отсюда следует, что сама матрица $\hat{R}_S$ должна иметь один верхний спинорный индекс и один нижний спинорный индекс так, чтобы соблюдался баланс индексов в выражении с матричным умножением, которое подразумевает порядок следования индексов[36]:

$$\psi^\beta_{\boldsymbol{\phi}} = \big(\hat{R}_S\big)^\beta_{\bullet\,\alpha}\cdot\psi^\alpha.$$

Этот баланс гарантирует верный закон преобразования контравариантного спинора: любая матрица вида $\hat{M}^\beta_{\bullet\,\alpha}$ преобразуется согласно установленному закону преобразований ковариантных и контравариантных индексов,

$$\hat{M}^\beta_{\bullet\,\alpha} \quad\mapsto\quad (\hat{M}_{\boldsymbol{\phi}})^\beta_{\bullet\,\alpha} = \big(\hat{R}_S\big)^\beta_{\bullet\,\beta'}\cdot\hat{M}^{\beta'}_{\bullet\,\alpha'}\cdot\big(\hat{R}_S^{-1}\big)^{\alpha'}_{\bullet\,\alpha}.$$

[36] Напомним, что в матрице $\hat{M}^\beta_{\bullet\,\alpha}$ верхний индекс β является индексом номера строки (элемента матрицы в столбце с номером α), так как в порядке следования индексов у матрицы этот индекс указан как первый с помощью точки, а нижний α — второй, и он нумерует столбцы – элементы матрицы в строке с номером β. В таких матричных обозначениях когда мы имеем дело с объектом типа столбца с одним индексом $\psi^{\beta\bullet}$, то за индексом мы ставим точку, указывая, что индекс нумерует строки – элементы в столбце. Когда мы имеем дело с одноиндексным объектом типа строки $\psi_{\bullet\alpha}$, то перед индексом мы ставим точку, указывая, что индекс нумерует столбцы – элементы в строке.

В качестве генераторов преобразований матрицы Паули переводят спинор в спинор, т. е. столбец в столбец. Это значит, что матрицы Паули имеют два спинорных индекса $\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\bullet\,\alpha}$ разной природы. Как объекты с двумя спинорными индексами разной природы матрицы Паули преобразуются по верхнему индексу матрицей $\hat{R}_S$, а по нижнему индексу обратной матрицей $\hat{R}_S^{-1}$, которая совпадает с эрмитово сопряженной к матрицей $\hat{R}_S^{\dagger} = \hat{R}_S^{-1}$.

Таким образом закон преобразования сигма-матриц в группе SU(2) в матричной записи выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} \mapsto \boldsymbol{\sigma_\phi} = \hat{R}_S \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{R}_S^{\dagger}.$$

Рассмотрим теперь матрицу размера 2×2

$$\hat{V} = V_a \sigma_a,$$

где a нумерует декартовы координаты 3-мерного евклидова пространства с единичной матрицей метрики, так что при ортогональных преобразованиях поворотов метрика остается единичной матрицей, и поэтому верхние и нижние индексы a эквивалентны, мы записываем их все снизу. Отметим, что согласно установленным законам преобразования матриц и спиноров билинейная форма двух спиноров $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$

$$\psi^{\dagger}_{(1)} \cdot \hat{V} \cdot \psi_{(2)}$$

инвариантна относительно преобразований группы SU(2).

По матрице $\hat{V}$ можно определить вектор

$$V_b = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \hat{V}),$$

поскольку

$$\operatorname{tr}\,(\sigma_b \sigma_a) = \operatorname{tr}\,(\sigma_a \sigma_b) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \sigma_a + \sigma_a \sigma_b) = \frac{1}{2}\, 2\, \delta_{ab} \operatorname{tr}\, \mathbb{1} = 2\delta_{ab}.$$

Детерминант матрицы $\hat{V}$ является инвариантом,

$$\det(\hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^{\dagger}) = \det(\hat{V} \hat{R}_S^{\dagger} \hat{R}_S) = \det \hat{V}.$$

Этот инвариант легко вычисляется из явного вида сигма-матриц,

$$\det \hat{V} = \det \begin{pmatrix} V_z & V_x - \mathrm{i} V_y \\ V_x + \mathrm{i} V_y & -V_z \end{pmatrix} = -(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = -\boldsymbol{V}^2,$$

и $(-1) \cdot \det \hat{V}$ — это квадрат длины вектора $\boldsymbol{V}$, который не меняется при поворотах.

Разложим преобразованную матрицу $\hat{V}'$ по матрицам Паули,

$$\hat{V}' = \hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^{\dagger} = V'_a \sigma_a,$$

откуда

$$V'_b = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \hat{V}') = V_a \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^{\dagger}).$$

Но это значит, что 3-вектор $\boldsymbol{V}$ преобразуется матрицей R размера 3×3

$$V'_b = R_{ba}\, V_a, \qquad R_{ba} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^{\dagger}).$$

Покажем, что это матрица поворотов евклидова пространства. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\hat{R}_S \approx \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\, \phi_c \sigma_c, \qquad \hat{R}_S^{\dagger} \approx \mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{2}\, \phi_c \sigma_c.$$

Тогда

$$R_{ba} \approx \frac{1}{2} \operatorname{tr}\,(\sigma_b \sigma_a) - \frac{\mathrm{i}}{4}\, \phi_c \operatorname{tr}\,(\sigma_b \sigma_c \sigma_a - \sigma_b \sigma_a \sigma_c) = \delta_{ba} - \frac{\mathrm{i}}{4}\, \phi_c \operatorname{tr}\,(\sigma_b 2\mathrm{i} \epsilon_{caa'} \sigma_{a'}) = \delta_{ba} + \epsilon_{cab} \phi_c.$$

Значит, инфинитезимальное преобразование вектора имеет вид

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{V},$$

и оно действительно представляет собой поворот на бесконечно малый угол $\boldsymbol{\phi}$.

В итоге, гомоморфизм SU(2) на SO(3) задается формулой преобразования матриц

$$R_{ba} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\sigma_b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger). \tag{I.4.24}$$

Отсюда сразу следует, что матрицы $\hat{R}_S$ и $-\hat{R}_S$ приводят к одной и той же матрице преобразований SO(3), и ядро гомоморфизма, т. е. прообраз единицы, нетривиально. А именно, ядро гоморфизма — это циклическая группа $\mathbb{Z}_2$, состоящая из двух элементов: $+1$ и -1. Ясно, что группа SU(2) дважды накрывает SO(3). Итак, представления, построенные по алгебре группы SO(3), дают представления универсальной накрывающей группы SU(2). Термин «универсальная накрывающая» относится к гомотопическим свойствам гладких многообразий, которые мы здесь не рассматриваем (см. [6]).

4.1 Спинорная метрика

Метрика g — это билинейная инвариантная функция на контравариантных векторах некоторого векторного пространства V, причем имеется ввиду инвариантность относительно обратимых линейных преобразований базиса в рассматриваемом векторном пространстве, например, в вещественном пространстве

$$g(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = g_{ab}A^aB^b = A_b\,B^b = \mathrm{inv} \qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V.$$

В рассматриваемом нами случае группы поворотов в трехмерном евклидовом пространстве $V \cong \mathbb{E}^3$ метрика симметрична $g_{ab} = g_{ba}$ и в декартовых координатах задается единичной матрицей $g_{ab} = \mathbb{1}_{ab}$, а матрицы поворотов $\hat{R}_V$ для векторов имеют размер 3×3 и выражаются через генераторы (I.1.16)–(I.1.20)

$$(s_V)_x = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad (s_V)_y = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad (s_V)_z = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{I.4.25}$$

в экспоненциальном виде в терминах угла ϕ поворота вокруг оси, заданной единичным вектором $\boldsymbol{\mathcal{O}}$,

$$\boldsymbol{\phi} = \phi\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}},$$

как

$$\hat{R}_V = \exp\big(-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V\cdot\boldsymbol{\phi})\big). \tag{I.4.26}$$

В группе поворотов SO(3) матрицы поворотов являются ортогональными[37]

$$\hat{R}_V^{\mathrm{T}}\cdot\hat{R}_V = \mathbb{1},$$

откуда для бесконечно малого угла поворота $\phi\to0$ находим, что

$$\hat{R}_V^{\mathrm{T}}\cdot\hat{R}_V \approx \big(\mathbb{1}-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\phi})\big)\cdot\big(\mathbb{1}-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V\cdot\boldsymbol{\phi})\big)\approx\mathbb{1}-\mathrm{i}\,\big((\boldsymbol{s}_V^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{s}_V)\cdot\boldsymbol{\phi}\big)=\mathbb{1}.$$

Следовательно, ортогональнность приводит к тому, что генераторы поворотов векторных полей с необходимостью удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{s}_V^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{s}_V. \tag{I.4.27}$$

Это верно для матриц (I.4.25). Но в силу (I.4.27) и эрмитовости генераторов поворотов $\boldsymbol{s}_V^\dagger = \boldsymbol{s}_V$ получаем следующую связь:

$$\boldsymbol{s}_V^* = -\boldsymbol{s}_V. \tag{I.4.28}$$

В итоге матрицы поворотов группы SO(3) согласно (I.4.26) имеют вид

$$\hat{R}_V = \exp\big(-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V\cdot\boldsymbol{\phi})\big),\quad \hat{R}_V^* = \exp\big(+\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V^*\cdot\boldsymbol{\phi})\big),\quad \hat{R}_V^{\mathrm{T}} = \exp\big(-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{s}_V^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\phi})\big)$$

и с учетом (I.4.27) и (I.4.28) удовлетворяют соотношениям

$$\hat{R}_V = \hat{R}_V^*,\qquad \hat{R}_V^{-1} = \hat{R}_V^{\mathrm{T}} = \hat{R}_V^\dagger. \tag{I.4.29}$$

[37] Повороты являются ортогональными преобразованиями ровно потому, что сохраняют евклидову метрику в декартовом базисе на двух векторах при проведении преобразования.

Первое из этих равенств показывает, что законы преобразования векторного поля и комплексно сопряженного векторного поля в группе SO(3) идентичны, а именно, в матричной записи

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}') = \hat{R}_V \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}'^*(\boldsymbol{r}') = \hat{R}_V^* \cdot \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r}) = \hat{R}_V \cdot \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r}). \tag{I.4.30}$$

Поэтому в группе SO(3) инвариантами будут две величины

$$g(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = g_{ab} A^a B^b = A_b\, B^b = \text{inv} \quad \text{и} \quad g(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}) = g_{ab} A^{*a} B^b = A_b^*\, B^b = \text{inv}'.$$

Для вещественных векторных полей разницы между этими инвариантами нет, а в случае комплексных векторных полей обычно используют второй инвариант группы SO(3).

В дираковских обозначениях согласно изложению в разделе **2.1 Спин $s = 1$**, **§ 2. Генераторы спина как матрицы** главы 1 можно ввести бра-вектор в терминах базисов в векторном и ковекторном пространствах

$$\langle \boldsymbol{A}| = \langle \boldsymbol{A}|\mathfrak{e}_a\rangle\langle \mathfrak{h}^a| = A_a \langle \mathfrak{h}^a|$$

и кет-вектор

$$|\boldsymbol{B}\rangle = |\mathfrak{e}_b\rangle\langle \mathfrak{h}^b|\boldsymbol{B}\rangle = |\mathfrak{e}_b\rangle\, B^b$$

и составить инвариант

$$\langle \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\rangle = A_a \langle \mathfrak{h}^a|\mathfrak{e}_b\rangle\, B^b = A_a\, \delta_b^a\, B^b = A_b\, B^b = g_{ab} A^a B^b.$$

Но можно ввести другой кет-вектор

$$|\bar{\boldsymbol{A}}\rangle = |\mathfrak{e}_b\rangle\langle \mathfrak{h}^b|\bar{\boldsymbol{A}}\rangle = |\mathfrak{e}_b\rangle\, \bar{A}^b$$

и построить сопряженный ему бра-вектор

$$\langle \bar{\boldsymbol{A}}| = \bar{A}^{*a} \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger = \bar{A}_c^*\, g^{ca} \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger.$$

В группе SO(3), как мы видели, компоненты комплексно сопряженного вектора преобразуются так же, как и компоненты вектора. Поэтому трансформационные свойства компонент кет-вектора $\bar{A}^b$ и базиса $|\mathfrak{e}_b\rangle$ при действии группы поворотов

$$\bar{A}'^b = \big(\hat{R}_V\big)^b_{\bullet\, a}\, \bar{A}^a, \qquad |\mathfrak{e}'_b\rangle = |\mathfrak{e}_a\rangle \big(\hat{R}_V^{-1}\big)^a_{\bullet\, b}$$

остаются теми же после эрмитова сопряжения

$$\bar{A}^{*\prime b} = \big(\hat{R}_V^*\big)^b_{\bullet\, a}\, \bar{A}^{*a} = \big(\hat{R}_V\big)^b_{\bullet\, a}\, \bar{A}^{*a}, \qquad \big(|\mathfrak{e}'_b\rangle\big)^\dagger = \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger \big((\hat{R}_V^*)^{-1}\big)^a_{\bullet\, b} = \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger \big(\hat{R}_V^{-1}\big)^a_{\bullet\, b}.$$

Следовательно, величина

$$\big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger\, |\mathfrak{e}_b\rangle = \langle \mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_b\rangle = g_{ab}$$

по своим трансформационным свойствам является ковариантным тензором второго ранга, который называется метрикой или матрицей Грама. В декартовом базисе

$$g_{ab} = \mathbb{1}_{ab}.$$

В общем случае базис ковариантного пространства $\langle \mathfrak{h}^c|$ определен как ортонормальный к базису контравариантного пространства $|\mathfrak{e}_b\rangle$

$$\langle \mathfrak{h}^c|\mathfrak{e}_b\rangle = \delta_b^c,$$

а сравнение с тождеством для обратной метрики

$$\delta_b^c = g^{ca}\, g_{ab} = g^{ca}\, \langle \mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_b\rangle = g^{ca}\, \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger\, |\mathfrak{e}_b\rangle = \langle \mathfrak{h}^c|\mathfrak{e}_b\rangle,$$

которое верно для всех базисных векторов, позволяет установить связь между базисами векторного и ковекторного пространства

$$g^{ca} \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger = \langle \mathfrak{h}^c|.$$

Как следствие имеет место связь

$$\langle \bar{\boldsymbol{A}}| = \bar{A}^{*a} \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger = \bar{A}_c^*\, g^{ca} \big(|\mathfrak{e}_a\rangle\big)^\dagger = \bar{A}_a^* \langle \mathfrak{h}^a|.$$

Поэтому будет инвариантом величина

$$\langle \bar{\boldsymbol{A}} | \boldsymbol{B} \rangle = \bar{A}^*_b \, B^b = g_{ab} \bar{A}^{*a} B^b.$$

Итак, мы установили, что для составления инвариантов из элементов векторного пространства важную роль играют групповые свойства компонент вектора при комплексном сопряжении, а также групповые свойства бра- или кет-векторов и эрмитово сопряженных к ним состояний. Покажем, что в этом вопросе свойства спиноров группы SU(2) существенно отличаются от свойств векторов в группе SO(3).

В двумерном векторном пространстве, пространстве спиноров $\langle \psi | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha$ совершаются преобразования поворотов[38] в группе SU(2). Поэтому спинорная метрика ϵ задает отображение двух *контравариантных* спиноров ψ и χ во множество комплексных чисел, бинарную функцию, линейную по каждому из спиноров и инвариантную относительно преобразований SU(2):

$$\epsilon_{\alpha\beta} \, \psi^\alpha \chi^\beta = \text{inv} \in \mathbb{C}.$$

При этом, как при поворотах евклидова пространства в декартовых координатах метрика g_{ab} инвариантна, так и метрика $\epsilon_{\alpha\beta}$ не должна меняться при поворотах в группе SU(2). Поскольку спинорная метрика имеет два ковариантных индекса, то закон ее преобразования задается действием матрицы $\hat{R}_S^{-1}$ по каждому из нижних индексов:

$$\epsilon^{\boldsymbol{\phi}}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha'\beta'} \left(\hat{R}_S^{-1}\right)^{\alpha'}_{\bullet\alpha} \left(\hat{R}_S^{-1}\right)^{\beta'}_{\bullet\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \left(\left(\hat{R}_S^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\bullet\alpha'}_{\alpha} \epsilon_{\alpha'\beta'} \left(\hat{R}_S^{-1}\right)^{\beta'}_{\bullet\beta}. \tag{I.4.31}$$

В этой записи мы воспользовались операцией транспонирования, изменив порядок следования индексов у одной из матриц $\hat{R}_S^{-1}$, так что теперь условие изометрии спинорной метрики $\hat{\epsilon}$ можно записать в терминах матричного умножения

$$\hat{\epsilon} = \left(\hat{R}_S^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{R}_S^{-1}.$$

Умножение равенства слева на $\hat{R}_S^{\mathrm{T}}$ и справа на $\hat{R}_S$ с учетом соответствующих тождеств для умножения матрицы на обратную матрицу дает

$$\hat{R}_S^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{R}_S = \hat{\epsilon}. \tag{I.4.32}$$

В эти соотношения изометрии входит транспонированная матрица поворотов группы SU(2), которая отличается только комплексным сопряжением от эрмитово сопряженной матрицы $\hat{R}_S^\dagger$, равной обратной матрице $\hat{R}_S^{-1}$.

Комплексное сопряжение как матриц, так и спиноров необходимо рассмотреть специально, чтобы выяснить их трансформационные свойства при групповых преобразованиях и установить явный вид матрицы $\hat{\epsilon}$.

• Сопряженный спинор

Наряду со спинорными индексами без точек, как у спинора ψ^α, традиционно вводят спинорные индексы с точками для комплексно сопряженных спиноров[39] ψ^*:

$$\psi \mapsto \psi^* \quad \Rightarrow \quad \psi^{\alpha\bullet} \mapsto (\psi^*)_{\dot\alpha\bullet} \equiv \bar\psi_{\dot\alpha\bullet}. \tag{I.4.33}$$

Подобная запись может быть представлена эквивалентным образом в дираковских обозначениях. По построению $\psi^{\alpha\bullet} = \langle \psi | \theta^\alpha \rangle$, а при эрмитовом сопряжении необходимо внимательно отнестись к групповым свойствам базисных состояний при их записи *в спинорных индексных обозначениях*. Для этого необходимо согласовать дираковские обозначения с индексными операциями, комплексным сопряжением, поднятием/опусканием индексов и правилами введения точки у индексов.

Определим дираковские символы с чертой и индексом с точкой как

$$\left(\langle \psi |\right)^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} |\bar\psi\rangle, \qquad |\theta^\alpha\rangle^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \langle \bar\theta_{\dot\alpha}|. \tag{I.4.34}$$

[38] Важно подчеркнуть, что преобразование поворота в координатном пространстве с углом $\boldsymbol{\phi} = \phi \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}$ задает преобразование группы SU(2) в пространстве спиноров с тем же углом поворота $\boldsymbol{\phi}$. Это означает, что пространственные преобразования координат и спиноров образуют единое целое так же, как единое целое образуют преобразования компонент векторов и тензоров, заданных на базисных векторах в координатном пространстве. В случае, когда такое единство отсутствует и преобразования координат никак не связаны с преобразованиями в пространстве спиноров, то говорят не о группе поворотов SU(2), а о группе внутренней симметрии SU(2).

[39] Комплексно сопряженные элементы спинора традиционно обозначаются и как символ со звездочкой, и как символ с чертой, что обычно общепринято для чисел. Для спинора в целом черта над ним ставится в специальном смысле, который мы укажем далее в явном виде.

С учетом этих определений получаем

$$\big(\langle\psi|\theta^{\alpha}\rangle\big)^{\dagger} = \big(\psi^{\alpha\bullet}\big)^{\dagger} \quad \Rightarrow \quad \langle\bar{\theta}_{\dot\alpha}|\bar{\psi}\rangle = \bar{\psi}_{\bullet\,\dot\alpha}. \tag{I.4.35}$$

Таким образом мы условимся, что комплексное сопряжение переводит спинорный индекс без точки в спинорный индекс с точкой и меняет верхний индекс без точки на нижний с точкой и обратно[40]. Выясним закон преобразования такого комплексно сопряженного спинора ψ^* и его компонент. Поскольку при поворотах

$$\psi_{\phi} = \hat{R}_S \cdot \psi \quad \Leftrightarrow \quad \big(\psi_{\boldsymbol{\phi}}\big)^{\beta} = \big(\hat{R}_S\big)^{\beta}_{\bullet\,\alpha} \cdot \psi^{\alpha},$$

то

$$\psi^*_{\phi} = \hat{R}^*_S \cdot \psi^* \quad \Leftrightarrow \quad \big(\bar{\psi}_{\boldsymbol{\phi}}\big)_{\dot\beta} = \big(\hat{R}^*_S\big)^{\bullet\,\dot\alpha}_{\dot\beta} \cdot \bar{\psi}_{\dot\alpha}. \tag{I.4.36}$$

Рассмотрим более детально закон преобразования компонент спинора с чертой[41] при действии преобразований группы SU(2)

$$\psi^*_{\boldsymbol{\phi}} = \hat{R}^*_S \cdot \psi^*. \tag{I.4.41}$$

Здесь

$$\hat{R}_S = \exp\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\big), \tag{I.4.42}$$

а

$$\hat{R}^*_S = \exp\big(+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\big). \tag{I.4.43}$$

Отметим, что для сигма-матриц Паули имеют место следующие свойства:

- матрицы σ_x, σ_z симметричные и вещественные, так что

$$\sigma^*_x = \sigma^{\mathrm{T}}_x = \sigma_x, \quad \sigma^*_z = \sigma^{\mathrm{T}}_z = \sigma_z, \tag{I.4.44}$$

- матрица σ_y чисто мнимая и антисимметричная, и

$$\sigma^*_y = \sigma^{\mathrm{T}}_y = -\sigma_y. \tag{I.4.45}$$

Сравнение явного вида матриц преобразований $\hat{R}^*_S$ и $\hat{R}_S$ в (I.4.43) и (I.4.42) показывает, что генераторами поворотов для спиноров $\bar{\psi}_{\dot\alpha\bullet}$ являются матрицы $-\boldsymbol{\sigma}^*$. И если каждая компонента спинора[42] $\psi^{\alpha\bullet}$ по построению является собственным состоянием для генератора поворотов вокруг оси z и имеет собственное значение проекции спина на ось z, равное соответствующему диагональному матричному элементу матрицы σ_z как генератора поворота вокруг оси z, так, что[43]

$$\psi^{(1)} \;\mapsto\; m_s = +\tfrac{1}{2}, \qquad \psi^{(2)} \;\mapsto\; m_s = -\tfrac{1}{2},$$

[40] Важно, что характер или природа индекса меняется при комплексном сопряжении, выражаясь в появлении точки, а то, что индекс стал из верхнего нижним, обусловлено унитарностью групповых преобразований и записью условия унитарности в терминах матричного умножения (см. сноску 41 на стр. 49).

[41] Закон преобразования (I.4.36) для спиноров с чертой можно переписать в другой матричной записи, если использовать операцию транспонирования, которая изменяет порядок следования матричных индексов. Тогда для матрицы

$$\big(\hat{R}^*_S\big)^{\bullet\,\dot\alpha}_{\dot\beta} = \big(\hat{R}^{*\mathrm{T}}_S\big)^{\dot\alpha}_{\bullet\,\dot\beta} = \big(\hat{R}^{\dagger}_S\big)^{\dot\alpha}_{\bullet\,\dot\beta}, \tag{I.4.37}$$

а для спинора с чертой

$$\bar{\psi}_{\dot\alpha} \equiv \bar{\psi}_{\dot\alpha\bullet} = (\bar{\psi}^{\mathrm{T}})_{\bullet\,\dot\alpha} = (\psi^{*\mathrm{T}})_{\bullet\,\dot\alpha} = (\psi^{\dagger})_{\bullet\,\dot\alpha}. \tag{I.4.38}$$

Транспонирование (I.4.36) согласно (I.4.37) и (I.4.38) дает

$$\big(\bar{\psi}_{\boldsymbol{\phi}}\big)_{\dot\beta} = \big(\hat{R}^*_S\big)^{\bullet\,\dot\alpha}_{\dot\beta} \cdot \bar{\psi}_{\dot\alpha} \;\overset{\mathrm{T}}{\mapsto}\; (\psi^{\dagger})_{\bullet\,\dot\alpha}\big(\hat{R}^{\dagger}_S\big)^{\dot\alpha}_{\bullet\,\dot\beta} \quad \Rightarrow \quad \psi^{\dagger}_{\boldsymbol{\phi}} = \psi^{\dagger}\cdot\hat{R}^{\dagger}_S. \tag{I.4.39}$$

Как видим, эрмитово сопряженный спинор $\psi^{\dagger}$ преобразуется как строка с нижним индексом с точкой, а эрмитово сопряженная матрица $\hat{R}^{\dagger}_S$ для преобразований группы SU(2) имеет индексы с точками. Поэтому матричное равенство для унитарных преобразований

$$\hat{R}^{\dagger}_S \cdot \hat{R}_S = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{R}^{\dagger}_S \cdot \mathbb{1} \cdot \hat{R}_S = \mathbb{1}$$

означает, что единица является инвариантом группы SU(2), если в индексных обозначениях записать

$$\big(\hat{R}^{\dagger}_S\big)^{\dot\alpha}_{\bullet\,\dot\gamma}\,\mathbb{1}^{\dot\gamma}_{\bullet\,\gamma}\big(\hat{R}_S\big)^{\gamma}_{\bullet\,\beta} = \mathbb{1}^{\dot\alpha}_{\bullet\,\beta}. \tag{I.4.40}$$

С этой же инвариантной единицей с верхним индексом с точкой и нижним индексом без точки инвариант группы SU(2) в виде произведения эрмитово сопряженного спинора $\psi^{\dagger}$ на спинор χ запишется в индексах как

$$\psi^{\dagger}\cdot\chi = \bar{\psi}_{\bullet\,\dot\alpha}\,\mathbb{1}^{\dot\alpha}_{\bullet\,\beta}\,\chi^{\beta} = \mathrm{inv}.$$

[42] Принято говорить о верхней и нижней компонентах спинора ψ^{α} как о компонентах столбца.

[43] Чтобы отличать численный верхний индекс от символа степени, мы указываем его в скобках.

то компоненты комплексно сопряженного спинора $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}\bullet}$ описывают значения проекции спина на ось z, равные соответствующим диагональным элементам матрицы $-\sigma_z$ как генератора поворота вокруг оси z, т. е. компоненты $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}\bullet}$ с такими же номерами, как и у спинора $\psi^{\alpha\bullet}$, имеют противоположные значения проекции спина, и

$$\bar{\psi}_{(1)} \mapsto m_s = -\tfrac{1}{2}, \qquad \bar{\psi}_{(2)} \mapsto m_s = +\tfrac{1}{2}.$$

Это означает, что собственные значения проекции спина на ось z для компонент комплексно сопряженного спинора $\bar{\psi} = \psi^*$ меняют знак. Меняется и матричный вид генераторов поворотов, кроме σ_y, что выделяет эту матрицу среди других генераторов поворотов.

В силу антикоммутационных соотношений в группе SU(2) $\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\,\mathbb{1}_{ab}\cdot\mathbb{1}$ запишем

$$\sigma_x\,\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x, \qquad \sigma_z\,\sigma_y = -\sigma_y\sigma_z, \qquad \sigma_y\,\sigma_y = \sigma_y\sigma_y.$$

С учетом преобразований матриц Паули при комплексном сопряжении и при транспонировании (I.4.44), (I.4.45) имеют место специфические для группы SU(2) связи

$$\sigma_y\,\boldsymbol{\sigma}^*\,\sigma_y = \sigma_y\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\,\sigma_y = -\boldsymbol{\sigma}. \tag{I.4.46}$$

Это позволяет преобразовать матрицу $\hat{R}_S^*$ с комплексно сопряженными сигма-матрицами Паули к виду, в котором нет комплексно сопряженных матриц.

В самом деле, если есть обратимая матрица $\hat{\epsilon}\circ\hat{\epsilon}^{\,-1} = \mathbb{1}$, то разложение экспоненты от матрицы в ряд Тейлора приводит к соотношению

$$\hat{\epsilon}\circ\exp(A)\circ\hat{\epsilon}^{\,-1} = \hat{\epsilon}\circ\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,A^n\right)\circ\hat{\epsilon}^{\,-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\hat{\epsilon}\circ A\circ\hat{\epsilon}^{\,-1}\right)^n = \exp\left(\hat{\epsilon}\circ A\circ\hat{\epsilon}^{\,-1}\right).$$

Введем вещественную антисимметричную матрицу, пропорциональную матрице σ_2, символ Леви-Чивиты в двумерном пространстве $\hat{\epsilon} = \mathrm{i}\sigma_y$:

$$\hat{\epsilon} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\epsilon}^{\,2} = -\mathbb{1}, \quad \hat{\epsilon}^{\,-1} = \hat{\epsilon}^{\,\mathrm{T}} = -\hat{\epsilon}\,. \tag{I.4.47}$$

Из (I.4.46) и определения (I.4.47) следует, что

$$\hat{\epsilon}\circ\boldsymbol{\sigma}^*\circ\hat{\epsilon}^{\,-1} = \hat{\epsilon}\circ\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\circ\hat{\epsilon}^{\,-1} = -\boldsymbol{\sigma}. \tag{I.4.48}$$

Значит, для комплексно сопряженной матрицы преобразований $\hat{R}_S^*$

$$\hat{\epsilon}\;\hat{R}_S^*\hat{\epsilon}^{\,-1} = \hat{\epsilon}\;\exp\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right)\hat{\epsilon}^{\,-1} = \exp\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\hat{\epsilon}\,\boldsymbol{\sigma}^*\hat{\epsilon}^{\,-1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right) = \exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right) = \hat{R}_S. \tag{I.4.49}$$

Таким образом обратимое матричное преобразование переводит матрицу $\hat{R}_S^*$ преобразования спиноров с чертой в матрицу $\hat{R}_S$ преобразования спиноров без черты. В таком случае говорят, что представление группы как матричное преобразование на комплексно сопряженных спинорах ψ^* эквивалентно представлению группы на спинорах ψ.

Понятие эквивалентности представлений формулируют следующим образом: если для матричных преобразований группы с элементами $g \mapsto \hat{G}$ на пространстве V и $g \mapsto \widehat{\tilde{G}}$ на пространстве $\tilde{V}$ имеет место соотношение эквивалентности

$$\widehat{\tilde{G}} = \hat{C}\cdot\hat{G}\cdot\hat{C}^{-1}, \tag{I.4.50}$$

с фиксированной обратимой матрицей $\hat{C}$, которая не зависит от элемента группы g, то представления группы $\widehat{\tilde{G}}$ и $\hat{G}$ эквивалентны. При $\hat{C} = \hat{\epsilon}$ в определении эквивалентных матричных представлений (I.4.50), соотношение[44]

[44] Отметим, что из (I.4.48) для транспонированной матрицы преобразований $\hat{R}_S^{\mathrm{T}}$ следует, что

$$\hat{\epsilon}\;\hat{R}_S^{\mathrm{T}}\hat{\epsilon}^{\,-1} = \hat{\epsilon}\;\exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right)\hat{\epsilon}^{\,-1} = \exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\hat{\epsilon}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\hat{\epsilon}^{\,-1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right) r = \exp\left(+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}})\right) = \hat{R}_S^{-1} = \hat{R}_S^{\dagger}. \tag{I.4.51}$$

Тогда из определения эквивалентныых матричных представлений (I.4.50) следует, что (I.4.51) устанавливает эквивалентность транспонированного представления группы поворотов $\hat{G} = \hat{R}_S^{\mathrm{T}}$ (матричные операторы транспонированного представления действуют на спинорные строки) и эрмитово сопряженного представления этой группы $\widehat{\tilde{G}} = \hat{R}_S^{\dagger}$ (матричные операторы действуют на комплексно сопряженные спинорные строки).

$$\hat{\epsilon}\,\hat{R}_S^*\hat{\epsilon}^{-1} = \hat{R}_S \tag{I.4.52}$$

устанавливает эквивалентность комплексно сопряженного представления $\hat{G} = \hat{R}_S^*$ и спинорного представления $\widehat{\widehat{G}} = \hat{R}_S$.

Соотношение эквивалентности (I.4.52) позволяет определить «зарядово сопряженный спинор»[45] $\psi_{\rm C}$ с помощью комплексного сопряжения спинора ψ и матричного умножения,

$$\psi_{\rm C} \stackrel{\rm def}{=} -\hat{\epsilon}\,\psi^*. \tag{I.4.53}$$

Напомним, что $(\psi^*)_{\dot\alpha\bullet} \equiv \bar\psi_{\dot\alpha\bullet}$, и матричное умножение в определении зарядово сопряженного спинора принято записывать в виде

$$\psi_{\rm C}^{\dot\alpha\bullet} = \hat\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\psi_{\dot\beta\bullet} \equiv \bar\psi^{\dot\alpha\bullet},$$

где введена антисимметричная матрица $\hat\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$ с верхними индексами

$$\hat\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \quad\mapsto\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем закон преобразования такого спинора при поворотах в матричном виде

$$\psi_{\rm C}^{\boldsymbol{\phi}} = -\hat\epsilon\,(\hat{R}_S\,\psi)^* = \hat\epsilon\,\hat{R}_S^*\hat\epsilon^{-1}(-\hat\epsilon\,\psi^*) = \hat\epsilon\,\hat{R}_S^*\hat\epsilon^{-1}\,\psi_{\rm C} = \hat{R}_S\,\psi_{\rm C}.$$

С учетом явного вида матрицы $\hat\epsilon$ (см. (I.4.47)) сравним выражения для разных видов спиноров покомпонентно:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \psi^{(2)}\end{pmatrix}, \qquad \psi^* = \begin{pmatrix}\bar\psi^{(1)}\\ \bar\psi^{(2)}\end{pmatrix}, \qquad \psi_{\rm C} = -\begin{pmatrix}\bar\psi^{(2)}\\ -\bar\psi^{(1)}\end{pmatrix}.$$

При этом матричный вид генераторов поворотов в группе SU(2) для спиноров ψ и $\psi_{\rm C}$ является идентичным и задается матрицами Паули, так что и матрицы преобразований этих спиноров также совпадают. Отсюда сразу следует, что в силу унитарности $\hat{R}_S$ групповым инвариантом является величина, составленная в виде произведения $\psi_{\rm C}^\dagger$ на спинор χ, так как

$$\psi_{\rm C}^{\boldsymbol{\phi}} = \hat{R}_S\,\psi_{\rm C}, \quad \chi^{\boldsymbol{\phi}} = \hat{R}_S\,\chi \quad\Rightarrow\quad \left(\psi_{\rm C}^{\boldsymbol{\phi}}\right)^\dagger\chi^{\boldsymbol{\phi}} = \psi_{\rm C}^\dagger\,\hat{R}_S^\dagger\,\hat{R}_S\,\chi = \psi_{\rm C}^\dagger\,\chi = \text{inv}.$$

Этот инвариант при подстановке определения зарядового сопряженного спинора (I.4.53) в терминах матричного умножения примет вид

$$\psi_{\rm C}^\dagger\,\chi = (-\hat\epsilon\,\psi^*)^\dagger\chi = \psi^{\rm T}\,(-\hat\epsilon)^\dagger\,\chi = \psi^{\rm T}\hat\epsilon\,\chi = \text{inv}. \tag{I.4.54}$$

Запишем матричное умножение в виде суммы по индексам и найдем, что

$$\psi_{\rm C}^\dagger\,\chi = \psi^{\rm T}\hat\epsilon\,\chi \equiv \psi^\alpha\,\hat\epsilon_{\,\alpha\beta}\,\chi^\beta = \psi^{(1)}\,\chi^{(2)} - \psi^{(2)}\,\chi^{(1)} = \text{inv}. \tag{I.4.55}$$

В этой формуле с матричным умножением мы ввели индексные обозначения для матрицы $\hat\epsilon_{\,\alpha\beta}$. Таким образом согласно общему представлению о метрическом тензоре как о билинейной инвариантной функции на элементах векторного пространства в формуле (I.4.55) для инварианта группы SU(2) метрикой для спиноров является величина $\hat\epsilon_{\,\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный ковариантный тензор второго ранга в двумерном пространстве спиноров:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \qquad \epsilon_{12} = 1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров ψ и χ равно

$$\psi\cdot\chi = \psi^\alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\chi^\beta = \epsilon_{\alpha\beta}\,\psi^\alpha\chi^\beta. \tag{I.4.56}$$

Метрика определяет ковариантные спиноры с нижними индексами

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\,\chi^\beta.$$

[45] Термин «зарядово сопряженный спинор» является традиционным в квантовой теории поля, при построении которой приводятся аргументы в пользу такой терминологии.

Из-за антисимметричности спинорной метрики

$$\psi^\alpha\,\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}\psi^\alpha = -\psi_\beta$$

в этом выражении появляется дополнительный минус, и поэтому скалярное произведение[46] равно

$$\psi\cdot\chi = \psi^\alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\chi^\beta = \psi^\alpha\,\chi_\alpha = -\psi_\beta\chi^\beta. \tag{I.4.57}$$

Обратная метрика $\epsilon^{\alpha\beta}$ определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta.$$

Очевидно, что

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \qquad \epsilon^{12} = -1.$$

Определенный выше в (I.4.53) спинор ψ_{C} обозначают также спинором с чертой $\bar\psi$, для которого принято вводить верхний индекс с точкой. Тогда в согласии с определением комплексно сопряженного спинора как спинора с нижним индексом с точкой в (I.4.33) получим

$$\bar\psi^{\dot\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{\dot\alpha}_{\text{C}} = (-\hat\epsilon\;\psi^*)^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\psi_{\dot\beta}. \tag{I.4.58}$$

Как мы показали, спинор ψ_{C} с верхним индексом с точкой при поворотах SU(2) в матричных обозначениях преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина (см. знаки в (I.4.57))

$$-\chi^\dagger\cdot\psi_{\text{C}} = -\big(\chi^\dagger\hat R_S^\dagger\big)\cdot\big(\hat R_S\cdot\psi_{\text{C}}\big) = \text{inv}.$$

Запишем эрмитово сопряженный спинор $\chi^\dagger$ в терминах спинора с чертой:

$$\chi^\dagger = \{\chi^*\}^{\text{T}} = \{\hat\epsilon\;(-\hat\epsilon\;\chi^*)\}^{\text{T}} = \{\hat\epsilon\;\bar\chi\}^{\text{T}} = -\bar\chi^{\text{T}}\hat\epsilon\,.$$

Подчеркнем, что в этом выражении матрица $\hat\epsilon$ — это по-прежнему полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты в двумерном пространстве. Тогда инвариант сводится к виду

$$-\chi^\dagger\cdot\psi_C = \bar\chi^{\text{T}}\hat\epsilon\,\bar\psi,$$

что в индексной записи матричного умножения для спиноров с чертой, которые имеют верхний индекс с точкой, принимает вид

$$\bar\chi^{\text{T}}\hat\epsilon\,\bar\psi = \bar\chi^{\dot\alpha}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\psi^{\dot\beta} \equiv \bar\chi^{\dot\alpha}\,\bar\psi_{\dot\alpha}, \qquad \epsilon_{12} = 1,$$

т. е. метрика $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой $\epsilon_{\alpha\beta}$ в спинорных индексах без точек, и, как и всякая метрика, она вместе с обратной метрикой может преобразовывать между собой контравариантные и ковариантные индексы. В силу антисмметричности $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$

$$\bar\psi_{\dot\alpha} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\psi^{\dot\beta}, \quad \text{но} \quad \bar\psi^{\dot\beta}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha} = -\bar\psi^{\dot\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\psi^{\dot\beta} = -\bar\psi_{\dot\alpha},$$

так что необходимо обращать внимание на порядок следования индексов в метрике при свертке в подобных выражениях.

Метрика остается инвариантной при поворотах спиноров. Действительно, справедливо соотношение изометрии[47]:

$$\hat R_S^{\text{T}}\,\hat\epsilon\,\hat R_S = -\hat R_S^{\text{T}}\,\hat\epsilon^{\,-1}\,\hat R_S = \hat\epsilon\,\left(\hat\epsilon\;\hat R_S^{\text{T}}\,\hat\epsilon^{\,-1}\right)\,\hat R_S = \hat\epsilon\,\hat R_S^\dagger\hat R_S = \hat\epsilon,$$

где мы воспользовались тождеством (I.4.51). Группа инвариантности спинорной метрики с $\det\hat R_S = 1$ называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах: SU(2). Это трехпараметрическая группа.

[46] Порядок спиноров в скалярном произведении важен как в матричных обозначениях, так и в тензорных. Мы обсуждаем математику этого в самом конце параграфа.

[47] Матричное преобразование метрики

$$\hat g = \Lambda^{\text{T}}\cdot\hat g'\cdot\Lambda,$$

когда преобразование векторов $\boldsymbol{a}$ задано обратимой матрицей Λ как $\boldsymbol{a}' = \Lambda\cdot\boldsymbol{a}$, называется изометрией, если матрица метрики не изменяется: $\hat g' = \hat g$. В случае евклидовой метрики в декартовых координатах $\hat g = \mathbb{1}$, а линейные преобразования изометрий задаются ортогональными матрицами $\Lambda^{\text{T}}\cdot\Lambda = \mathbb{1}$, и при $\det\Lambda = +1$ это матрицы поворотов. См. аналогичную изометрию в случае спиноров в (I.4.32).

Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении поворотов спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы поворотов трехмерного евклидова пространства SO(3). Тем не менее, сами группы отличаются, так как в SU(2) допустимы и полуцелые собственные значения генератора s_z, а в SO(3) — только целые значения s_z. Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении поворота на угол 2π: для спиноров этот поворот дает фактор -1, а для бозонов, полей с целым значением спина, фактор $+1$. Существование полей с полуцелым спином в природе возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы поворотов евклидова пространства. Факт такого существования — экспериментальный.

Подчеркнем, что спинорная метрика задает инвариант

$$\psi \cdot \psi = \psi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta = \psi^{(1)}\psi^{(2)} - \psi^{(2)}\psi^{(1)}.$$

Этот инвариант обратился бы в нуль[48], если бы компоненты спинора являлись обычными комплексными числами, умножение которых перестановочно! Сделанное сейчас наблюдение напрямую связано с тем, что спиноры со спином $s = 1/2$ — это частный случай фермионов с полуцелым спином, для которых имеет место принцип запрета Паули. Из принципа запрета Паули следует, что перестановка наблюдаемых параметров тождественных фермионов (см. **§5. Тождественные частицы**), в данном случае перестановка номеров поляризации (проекции спина на ось z) в амплитуде вероятности, должна сопровождаться сменой знака амплитуды. В частности следует положить, что

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)} = -\psi^{(2)}\psi^{(1)},$$

что в математике называют алгеброй Гра́ссмана, а сами числа с такими свойствами — грассмановыми переменными[49]. Укажем лишь, что в квантовой теории поля устанавливается связь спина со статистикой: собственное значение оператора перестановок тождественных частиц равно $+1$ для частиц с целым спином (бозонов) и -1 для частиц с полуцелым спинов (фермионов).

Тогда становится понятным, почему метрика пространства как инвариантная квадратичная форма на обычных перестановочных числах симметрична, а метрика спинорного пространства на грассмановых числах антисимметрична.

§5. Тождественные частицы

Введение квантовых состояний на примере представлений группы поворотов позволяет сформулировать понятие тождественности физических систем, в частности понятие тождественных частиц как квантов локального поля.

В общем случае квантового описания (см. Приложение, **§1. Квантовые понятия и обозначения**) физическая система характеризуется полным набором наблюдаемых, множество собственных значений которых описывается как мультииндекс квантовых чисел q. Две физические системы являются тождественными, если множество значений квантовых чисел этих систем совпадают в любых объемлющих физических системах, в которых эти две физические системы являются подсистемами. Например, если A и B — это тождественные подсистемы в системе Ψ, а $\{q_A\}$ и $\{q_B\}$ обозначают множества значений квантовых чисел подсистем A и B в Ψ, то имеет место определение

$$A \equiv B \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall \Psi:\ A \in \Psi,\ B \in \Psi \ \text{ в состоянии } |q_A, q_B\rangle \quad \Rightarrow \quad \{q_A\} \equiv \{q_B\}\Big).$$

Подчеркнем, что совпадение множества значений квантовых числе тождественных подсистем не означает, что конкретный набор q_A обязательно совпадает с q_B.

Квантовые числа могут относиться к квантовым состояниям в различных пространствах: в общем координатном пространстве частиц, в пространстве спина и т.п. Совпадение множества значений квантовых чисел тождественных систем позволяет переставлять квантовые числа в каждом из подпространств состояний этих систем. Оператор перестановки всех квантовых чисел двух тождественных подсистем $\mathcal{S}$ при действии на интегральное квантовое состояние системы в целом в форме тензорного произведения состояний системы во всех пространствах, в которых система проявлена, дает то же состояние с точностью до множителя, равного по модулю единице,

$$\mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}|q_A, q_B\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |q_B, q_A\rangle = \lambda\,|q_A, q_B\rangle, \qquad |\lambda| = 1,$$

[48] Здесь рассматривается случай спиноров, не зависящих от времени и координат, — случай глобальных спиноров.

[49] Мы не будем здесь вдаваться в детали описания алгебры Грассмана, включая интегрирование по грассмановым переменным, отсылая читателя к современным курсам квантовой механики, где этот вопрос рассматривается во всех деталях (см., например, [10]).

так как в силу тождественности подсистем невозможно определить какой из двух наборов квантовых чисел принадлежит одной из тождественных подсистем. Двукратное действие линейного оператора перестановок на интегральное квантовое состояние системы приводит к тождественному преобразованию:

$$\mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}\mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}|q_A,q_B\rangle = |q_A,q_B\rangle, \qquad \mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}\mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}|q_A,q_B\rangle = \mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}\,\lambda\,|q_A,q_B\rangle = \lambda^2|q_A,q_B\rangle, \qquad \lambda^2 = 1.$$

Это значит, что интегральное квантовое состояние является собственным для оператора перестановок квантовых чисел двух тождественных подсистем, а квадрат собственного значения равен единице. В итоге все тождественные системы разделяются на системы с собственным значением, равным единице, и собственным значением, равным минус единице. Эти системы называются бозонными и фермионными, соответственно:

$$\lambda_B = +1, \quad \lambda_F = -1.$$

Для фермионных систем с собственным значением перестановок квантовых чисел, равным минус единице, формулируют принцип запрета Паули. Если квантовые числа двух тождественных подсистем совпадают, то перестановка этих квантовых чисел дает состояние, равное этому же состоянию с обратным знаком, что возможно только, когда само состояние является нулем векторного пространства состояний, т.е. такое состояние не наблюдается:

$$\mathcal{S}_{A\leftrightarrow B}|q_A,q_A\rangle = \lambda_F\,|q_A,q_A\rangle \quad \Rightarrow \quad |q_A,q_A\rangle = -|q_A,q_A\rangle \quad \Rightarrow \quad |q_A,q_A\rangle \equiv \mathbf{0}.$$

Частицы как точечные объекты обладают квантовыми числами в координатном пространстве и представляют из себя частный случай тождественных физических систем, если наряду с множеством значений координат, эти частицы обладают одним и тем же значением массы, электрического заряда и одинаковым множеством собственных значений в пространстве спина и в других квантовых пространствах.

Глава 2

Коммутатор и алгебра Ли

В основе описания динамики физической системы вне рамок классической физики лежит понятие квантового состояния. Среди состояний системы выделяют набор собственных состояний, на каждом из которых наблюдаемые физические величины, характеризующие систему и определенные как операторы на пространстве состояний, равны вещественным собственным значениям соответствующих операторов. Такой набор собственных квантовых состояний составляет базис векторного пространства над полем комплексных чисел, и всякий нормируемый вектор этого пространства — это суперпозиция[1] базисных состояний, которая задает все множество возможных состояний физической системы. Базисные состояния с отличными наборами собственных значений, т е. с различными значениями физических величин, взаимно ортогональны и нормированы на единицу, так что абсолютные значения квадратов коэффициентов в суперпозиции задают распределение вероятностей по различным собственным значениям измеряемых наблюдаемых величин, а линейная оболочка базиса, образующая нормированные квантовые состояния, называется гильбертовым пространством квантовых состояний системы[2].

Особый интерес представляют физические системы, среди квантовых состояний которых можно выделить подмножества собственных состояний и подпространства их линейных оболочек, которые характеризуются одними и теми же собственными значениями операторов части физических величин, называемых инвариантными значениями, а сами величины инвариантами. Принято говорить, что собственные состояния с одними и теми же значениями инвариантов образуют мультиплет, а переходы от одного состояния мультиплета к другому являются преобразованиями симметрии, относительно которых инварианты остаются неизменными. Например, базисные состояния частицы со спином $s = 1$ — это триплет с разными значениями проекции спина на ось z, $m_s = \{+1, 0, -1\}$, а преобразования симметрии — это группа поворотов трехмерного пространства.

В физике наблюдаемые величины имеют единицы измерения. Поэтому симметрия мультиплетов базисных квантовых состояний порождает, во-первых, дискретность значений размерных наблюдаемых величин в состояниях, принадлежащих к мультиплету, т. е. квантование этих величин, а во-вторых, дискретность собственных значений инвариантов для разных мультиплетов. С математической точки зрения адекватным для изучения симметрий квантовых состояний в физике является формализм групп Ли, когда свойства физической системы связаны с зависящими от непрерывных параметров обратимыми преобразованиями наблюдаемых и элементов пространства, на котором наблюдаемые действуют как операторы. Поэтому в этом пособии элементы пространства представления алгебры и группы Ли мы будем называть состояниями, а элементы групп и алгебр Ли мы вводим как операторы, действующие на пространстве состояний. Наряду с этими понятиями квантовой физики мы используем и традиционную математическую терминологию в области теории групп и алгебр Ли, периодически обращаясь к ней для опоры на классические результаты теории групп и алгебр Ли, чтобы читателю было проще интегрировать получаемые знания с формализмом и структурами чисто математического взгляда на предмет.

§1. Группа Ли и ее алгебра

Непрерывная группа как гладкое многообразие, инвариантные подгруппы, простые и полупростые группы, закон композиции и производная Ли, структурные константы, скобка Ли и тождество Якóби, определение алгебры Ли.

Физическую систему принято характеризовать наблюдаемыми величинами, например, импульсами и координатами образующих эту систему частиц. Нас может интересовать вопрос преобразования значений этих величин, например, при трансляциях и поворотах как самой физической системы, так и измеряющих физические величины приборов. Среди преобразований особо выделяют обратимые преобразования, в число которых входит и тождественное преобразование наблюдаемых величин. Абстрактным обобщением понятия таких преобразований является концепция группы. Более того, сами преобразования могут зависеть от непрерывных параметров, и в этом случае понятие, адекватно описывающее непрерывные преобразования, — это гладкое многообразие. С этого мы и начинаем изучение теории непрерывных групп.

[1] Под суперпозицией мы понимаем линейную комбинацию элементов множества.

[2] В приложении к основному тексту (см. Приложение на стр. 292, **§1. Квантовые понятия и обозначения**) мы кратко описываем понятия квантовой механики, специфические обозначения, а также правила оперирования с операторами и состояниями.

Описание физической системы требует введения пространства ее квантовых состояний (см. Приложение на стр. 292, **§ 1. Квантовые понятия и обозначения** и, например, [1]), для которого роль опорного примера для наших рассуждений играет рассмотрение векторных пространств полей спина s размерности $\mathcal{D} = 2s + 1$ в теории группы поворотов, как это представлено[3] в главе 1: в пространстве квантовых состояний существует такой ортонормированный базис, что каждое базисное состояние является собственным для оператора проекции спина на ось z, а это значит, что на каждом состоянии базиса проекция спина на ось z равна собственному значению. Коэффициенты разложения рассматриваемого состояния квантовой системы по такому базису имеют вполне определенный физический смысл, а именно, эти коэффициенты задают амплитуду вероятности обнаружить при измерении проекции спина ее собственное значение. Поскольку вероятность нормируется на единицу, постольку пространство квантовых состояний снабжено евклидовой нормой и является *гильбертовым пространством*[4]. При таком подходе встает вопрос не только о том, как преобразуется при групповых преобразованиях наблюдаемая величина, но и о том, как при этом преобразуется квантовое состояние, а отвечает на эти вопросы теория представлений, т. е. описание действия операторов, реализующих элементы группы, на векторы гильбертова пространства.

Мы предполагаем, что читатель знаком с классической теорией групп в объеме учебника ван дер Вардена «Алгебра» [5]. Тем не менее, для полноты и целостности восприятия в ходе изложения, ориентированного на физика, мы будем приводить определения тех математических понятий, которые используются в нашем изложении[5].

В качестве обобщения преобразований физических величин, особенно при наличии симметрии, в математике вводится понятие группы:

Группой называется множество элементов $\mathfrak{G}$, в котором

1. задана композиция[a] любых двух элементов, принадлежащая группе $\forall\, g_{1,2} \in \mathfrak{G} \quad \exists\, g_1 \cdot g_2 \in \mathfrak{G}$,
2. имеет место ассоциативность композиции, $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$,
3. существует единичный элемент, $\exists\, e \in \mathfrak{G} : \quad \forall\, g \in \mathfrak{G}, \quad e \cdot g = g \cdot e = g$,
4. для каждого элемента группы существует обратный, $\forall g \in \mathfrak{G} \quad \exists\, g^{-1} \in \mathfrak{G} : \quad g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

(II.1.1)

[a] Иногда мы будем называть композицию двух элементов умножением, причем порядок множителей значим, так как композиция, вообще говоря, неперестановочна.

Группу называют *абелевой*, если ее композиция перестановочна, т. е. имеет место тождество

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$$

для любых двух элементов.

Задача 8. Рассмотрите 2×2-матрицы поворотов на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу.

Группа Ли — это группа в приведенном выше стандартном понимании, элемент которой определён значениями конечного числа действительных непрерывных параметров, называемых координатами[6]. Иначе: на группе Ли можно вблизи любого элемента ввести взаимнооднозначное соответствие между элементами группы и координатами в области конечномерного линейного пространства параметров, т. е. определить координатную сетку, причем эти координатные сетки для разных подмножеств группы согласованы в том смысле, что координаты элемента группы в одной сетке взаимнооднозначно связаны с координатами того же элемента в другой сетке в области их перекрытия. Это отвечает математическому понятию многообразия.

[3] См. также учебник Эллиота и Добера по теории групп в применении к физике [2], а также классическую книгу Петрашень и Трифонова [3].

[4] По умолчанию мы рассматриваем исключительно конечномерные гильбертовы пространства. В общем же случае, когда базис квантовых состояний бесконечно счетный, необходимо вводить понятия сходимости по норме и сепарабельности базиса, а читателю стоит обратиться к учебникам по квантовой механике, например, к книге В.В.Киселева [10], где вводится понятие оснащенного гильбертова пространства, когда спектр собственных значений наблюдаемой может быть непрерывным.

[5] Строгое математическое изложение можно найти в книге В.Арнольда [4] по математическим методам классической механики и в курсах [6] (Дубровин, Новиков, Фоменко) и [9] (Новиков, Тайманов), описывающих геометрические структуры на современном математическом языке, а также в учебниках [7] (Ф.Уорнер) и [8] (Исаев, Рубаков) по теории групп и алгебр Ли.

[6] Рассмотрение комплексных групп Ли мы оставляем математикам в общих курсах, так как в этой книге мы преследуем более скромную цель: в самом начале университетского образования познакомить физиков с основными идеями и понятиями, которые в рамках вещественных групп Ли уже нашли достойное место в описании реальных физических закономерностей и входят в свод инструментов современной науки о природе.

Введение координатной сетки на многообразии опирается на понятие *гомеоморфизма — непрерывного взаимнооднозначного соответствия* элементов двух множеств, в данном случае, соответствия окрестности точки множества V и окрестности во множестве фиксированного числа вещественных параметров (координат) U. Открытая окрестность — это множество, которое удовлетворяет аксиомам открытости в топологии:

- пусть U — система подмножеств в X,
- подмножество $U_k \in U$ с индексом $k \in A$, где A задает множество индексов для семейства U_k в U, — это открытая окрестность, если
- произвольное объединение открытых окрестностей лежит в системе окрестностей $\bigcup\limits_{k\in A} U_k \in U$,
- пересечение конечного числа открытых окрестностей принадлежит системе окрестностей $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in U$,
- пустое множество $\varnothing$ и само множество X принадлежат множеству окрестностей.

Открытое множество, содержащее точку называется окрестностью этой точки. В вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ открытое множество задается, например, шаром без граничной сферы или конечными интервалами по каждой из координат. Окрестность U в $\mathbb{R}^N$ называется локальной координатной сеткой размерности N. Отображение между открытыми множествами, сохраняющее все отношения между открытыми окрестностями (образ и прообраз открытой окрестности открыт, пересечение в пересечение, объединение в объединение), называется непрерывным. Чтобы определить многообразие, необходимо стартовать с *определяющего гомеоморфизма*, т. е. нужно задать исходные координатные сетки элементов многообразия.

На рис. 2.1 схематически показаны гомеоморфизмы ϕ_1 и ϕ_2 двух открытых областей 1 и 2 многообразия V на две локальные координатные сетки 1^* и 2^* в пространстве координат U. В открытой области

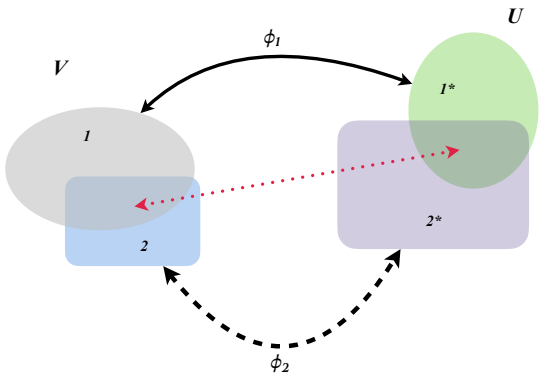


Рис. 2.1: Гомеоморфизмы двух открытых областей многообразия на координатные сетки (сплошная и штриховая линии) и порожденная этими гомеоморфизмами функция перехода между координатами в области пересечения $1^* \cap 2^*$ (пунктир).

пересечения координатных сеток $1^* \cap 2^*$ определено взаимнооднозначное, обратимое преобразование координат $x \in 1^*$ в координаты $y \in 2^*$:

$$y(x) \equiv \phi_2\big(\phi_1^{-1}(x)\big).$$

Функции перехода, аналогичные $y(x)$, полагаются гладкими на гладком многообразии.

Группа Ли — это множество, которое снабжено структурами группы и многообразия. Область с локальной координатной сеткой (открытое подмножество) называют картой (chart), набор координатных сеток, покрывающих всю группу, — это атлас карт многообразия[7]. Так как каждый атлас карт покрывает всю группу, а преобразования от координат одной карты в атласе к координатам другой карты в другом атласе в области их перекрытия взаимнооднозначны, разные атласы дают эквивалентные описания многообразия. Открытую координатную область мы будем отождествлять с областью конечномерного (евклидова) пространства[8].

Число непрерывных параметров группы N_G называют размерностью группы. (II.1.2)

[7] Если набор карт покрывает не все многообразие, то такой набор в отличие от атласа называют patch.

[8] На самом деле координатные сетки на картах могут быть криволинейными, так что касательные векторы к координатным линиям в каждой точке многообразия образуют базис векторного пространства, которое называется касательным пространством в заданной точке многообразия, а в криволинейных координатах базисы в разных точках многообразия могут быть разными. При этом в понятие многообразия, вообще говоря, не входит понятие метрики в касательном пространстве, хотя для простоты можно считать, что открытое множество возле точки многообразия задается строгим условием ограничения на евклидово расстояние от исходной точки до точки в открытой окрестности.

Итак, мы полагаем, что координатные сетки во всех точках многообразия имеют одну и ту же размерность. Минимальное число координатных сеток, покрывающих всю группу, мы будем полагать конечным. Более того, мы будем считать, что функции перехода от одних координат к другим дифференцируемы необходимое число раз[9], а двум различным элементам многообразия могут быть сопоставлены непересекающиеся области координатных сеток[10](условие Хаусдорфа).

Задача 9. Рассмотрите нехаусдорфово многообразие «окружность на прямой»: как ввести координаты на этом многообразии, и где расположены точки, окрестности которых неизбежно пересекаются?

Задача 10. Плоскость может быть описана атласом с одной единственной картой: необходимо задать базис из двух независимых векторов $\mathfrak{e}_1$ и $\mathfrak{e}_2$, так что любая точка плоскости взаимооднозначно описывается координатами $(a^{(1)}, a^{(2)})$, а разные базисы — разные атласы. С помощью стереографической проекции из полюса сферы на плоскость, касательную к противоположному полюсу, покажите, что для описания многообразия сферы необходимо задать атлас как минимум из двух карт. Подчеркните роль условия взаимооднозначности соответствия координатной области точки на карте и области элемента на сфере.

В физике элементы группы Ли — это обратимые параметризованные преобразования, которые действуют как функции на физические величины $f[x]$. При этом ассоциативность есть прямое следствие определения сложной функции[11], для которой расставление скобок представляется излишним: $f_1(f_2(f_3[x])) \equiv f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)[x] \equiv (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3[x]$.

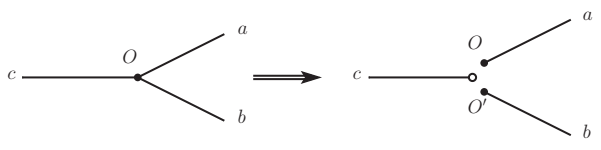
Наличие групповой структуры означает, что элементу g_A с координатами[12] $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \leftrightarrow A^\alpha \leftrightarrow \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}_G}$ и элементу g_B с координатами $\{B^{(1)}, \dots, B^{(n)}\} \leftrightarrow B^\beta \leftrightarrow \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}_G}$ сопоставляется элемент $g_C = g_A \cdot g_B$ с координатами $C^\gamma = C^\gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, где операция отображения точки $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ из прямого произведения двух координатных карт группы в точку $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}_G}$ на координатной карте этой же группы $C^\gamma(\bullet, \diamond)$ математически выражает закон композиции в группе (со всеми вытекающими отсюда последствиями на языке функций[13] от двух элементов: существование в группе обратных элементов, единицы и т.п.). Определенное таким образом отображение в карту группы как результат групповой композиции мы будем называть бинарной операцией. Для абелевой группы бинарная операция симметрична по перестановке двух своих координатных аргументов[14], а в общем случае такой перестановочной симметрии нет.

В принятых нами сейчас обозначениях элемент группы Ли $\mathfrak{G}$ обозначается буквой g_A с индексом $\boldsymbol{A}$, который указывает координаты этого элемента.

Наличие структуры дифференцируемого многообразия, т. е. зависимость элементов группы от непрерывных параметров, позволяет определять производные по направлению. В этом отношении особую роль играют элементы группы вблизи тождественного элемента группы e, так как в этом случае групповые законы преобразования записываются в наиболее интуитивно простом виде, хотя все устанавли-

[9]Мы будем рассматривать *гладкие* функции перехода от одних координат к другим, т. е. гладкие многообразия. Идея гладких многообразий позволяет описывать такие системы как черные дыры с горизонтом: в координатах удаленного наблюдателя на горизонте черной дыры метрика пространства-времени нерегулярна (с нулями и бесконечностями), однако от карты удаленного наблюдателя, где она описывает регулярную метрику, можно перейти к карте, например, свободно падающего наблюдателя, для которого на горизонте метрика остается регулярной.

[10]Стандартный пример нехаусдорфова многообразия — три луча Oa, Ob, Oc, где точка O особая, так как по сути в одномерном пространстве в этой точке при движении к ней по лучу Oc можно указать два пути продолжения координатной сетки, т. е. имеет место ветвление одномерной координаты. В этом случае для описания в терминах координатных сеток следует выколоть точку O на луче Oc и считать, что для лучей Oa и Ob концы, т. е. точки O и O' — это разные точки. В этом случае любые непустые малые окрестности различных точек O и O' всегда пересекаются на луче Oc, где точка O выколота. Этот пример соответствует физической ситуации: траектория светового луча, который отражается и преломляется на границе двух сред. Как видим, «проблемная точка», подобная точке O в рассмотренном примере, у многообразия размерности n возникает, если число независимых координатных линий с разных сторон проблемной точки превышает размерность многообразия.



[11]Простой пример неассоциативности можно легко построить, если рассмотреть множество обратимых матриц 2×2, например, и дополнить его новым элементом $\mathfrak{Inv}$, а композицию элементов задать так: для двух матриц A и B ввести упорядоченную композицию — матричное умножение $A \cdot B$, для двух элементов $\mathfrak{Inv}$ и $\mathfrak{Inv}$ композиция равна $\mathfrak{Inv} \cdot \mathfrak{Inv} = \mathbb{1}$, для матрицы A и $\mathfrak{Inv}$ неупорядоченная композиция равна обратной матрице $\mathfrak{Inv} \cdot A = (A \cdot \mathfrak{Inv}) = A^{-1}$. Для такой композиции удовлетворяются почти все пункты для определения группы: есть единица и обратный элементы. Но теперь расставление скобок становится существенным, так как при $A \neq \mathbb{1}$, $B \neq \mathbb{1}$ замечаем, что $\mathfrak{Inv} \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1} \neq (\mathfrak{Inv} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot B$.

[12]Двусторонними стрелками мы связываем эквивалентные обозначения.

[13]Здесь мы имеем в виду, что задаются многокомпонентные функции по числу координат на карте многообразия от двух наборов координат.

[14]Важно отметить, что набор координат допускает отождествление с элементами векторного пространства в случае криволинейных координатных сеток, только если провести переход к касательному пространству в фиксированной точке координатной сетки, т. е. при разложении по базису векторов, которые являются касательными к линиям координатной сетки в заданной точке.

ваемые вблизи единицы групповые закономерности эквивалентным образом переносятся в окрестность любого другого элемента группы. В самом деле, на карте в окрестности элемента группы[15] g_0 рассмотрим координаты $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ элементов g_{A_0} и g_{B_0}. Произведение этих элементов группы $g_{A_0}\cdot g_{B_0} = g_{C_0}$ описывается многокомпонентной функцией $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0)$ бинарной операции на координатах элементов $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ со значением набора координат элемента[16] $\boldsymbol{C}_0$. Построим элементы группы $g_A = g_{A_0}\cdot g_0^{-1}$ и $g_B = g_{B_0}\cdot g_0^{-1}$, которые в результате действия g_0^{-1} находятся вблизи единицы e и имеют на карте в окрестности единицы координаты $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\phi}_0^-(\boldsymbol{A}_0)$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}_0^-(\boldsymbol{B}_0)$, соответственно, где $\boldsymbol{\phi}_0^-$ — это взаимнооднозначное гладкое преобразование координат на карте в окрестности элемента группы g_0 в координаты на карте вблизи единицы, где закон группового преобразования координат описывается многокомпонентной функцией бинарной операции $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Подействуем на элементы группы в окрестности единицы g_A и g_B элементом g_0 слева и построим $g_{\tilde{A}} = g_0\cdot g_A$ и $g_{\tilde{B}} = g_0\cdot g_B$, которые находятся в окрестности g_0 и имеют координаты $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{A})$ и $\tilde{\boldsymbol{B}} = \phi_0(\boldsymbol{B})$ на той же карте, что и изначальные координаты $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$. Таким образом с одной стороны мы установили взаимнооднозначное преобразование координат $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ в координаты $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$ на карте в окрестности g_0, а с другой стороны — взаимнооднозначные соответствия как координат $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$, так и координат $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$ на карте в окрестности g_0 координатам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на карте в окрестности единицы. Другими словами, использование любой пары координат $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}})$, $(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0)$ и $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ эквивалентно в смысле изоморфизма[17]. Это значит, что и записи закона композиции элементов группы как бинарных операций на координатах в виде $\tilde{\boldsymbol{C}}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}})$ и $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, например, или $\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0)$ и $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ также связаны этим изоморфизмом. Итак, бинарная операция на координатах $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0)$, соответствующая групповой композиции элементов на карте в окрестности g_0, может быть описана на языке бинарной операции на координатах двух элементов группы на карте в окрестности единицы $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Локальные групповые преобразования описываются на одной координатной карте, и все они изоморфны локальным групповым преобразованиям возле единицы группы, что дает возможность изучить локальную структуру группы Ли. Для исследования же глобальной структуры группы необходимо использовать другие инструменты. Например, система карт на многообразии позволяет строить гладкие замкнутые контуры и изучать классы этих контуров при однопараметрических преобразованиях одного контура в другой — гомотопии, а также понятия связности в таком множестве. Другой инструмент изучения глобальной структуры — это универсальные накрывающие группы, речь о которых пойдет в соответствующем разделе этой книги.

Более формальное описание эквивалентности закона группового преобразования возле различных элементов группы строится с использованием специального отображения на основе понятия гомоморфизма. Напомним, что гомоморфизмом групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ называют отображение ϕ элементов группы $\mathfrak{G}$ в подмножество элементов группы $\mathfrak{G}'$,

$$g \overset{\phi}{\mapsto} g' = \phi(g), \quad \forall g \in \mathfrak{G},$$

которое сохраняет групповые свойства:

$$g_1\cdot g_2 \overset{\phi}{\mapsto} g_1'\cdot g_2', \quad g\cdot e \overset{\phi}{\mapsto} g'\cdot e', \quad g^{-1}\cdot g \overset{\phi}{\mapsto} (g')^{-1}\cdot g'.$$

Взаимнооднозначный гомоморфизм[18] элементов

$$g \leftrightarrow \mathrm{Aut}_{g_0}(g) \overset{\text{def}}{=} g_0\cdot g\cdot g_0^{-1}, \tag{II.1.3}$$

[15] Начало координат $\mathbf{0}$ на карте возле g_0 отвечает элементу g_0. Элементы группы в окрестности g_0 лежат на одной и той же карте, т.е. возле начала координат этой карты. Такое понятие об элементах группы в одной окрестности вблизи опорного элемента, имеющего нулевые значения координат, мы подразумеваем во всех обсуждаемых случаях.

[16] В силу гомеоморфизма введения координат гладкого многообразия мы полагаем, что рассматриваются отображения элементов одной карты на ту же карту. Вообще говоря, для этого необходимо ввести изоморфное отображение с групповым умножением элементов типа $(g_A\cdot g_B)\cdot g_0^{-1}$, которое заведомо сохраняет произведение элементов на одной карте.

[17] Под изоморфизмом двух множеств со структурой понимают взаимнооднозначное соответствие элементов этих множеств при условии, что структуры в каждом из множеств задаются в виде операций с элементами множеств так, что каждой операции в одном из множеств взаимнооднозначно соответствует операция в другом множестве, а все композиции операций в одном множестве взаимнооднозначно переходят в композиции в другом множестве, включая отношения между результатами этих композиций в каждом из множеств, например, равенства результатов разных композиций операций. Таким образом, два изоморфных множества со структурами устроены одинаково. При этом конкретная реализация изоморфных множеств может отличаться. Например, сфера с выколотым, скажем, северным полюсом как множество координатных точек с окрестностями изоморфна плоскости, хотя реализованы эти множества по-разному.

[18] Покажите, что если образы внутреннего автоморфизма совпадают, то и прообразы тоже совпадают. Обратите внимание на то, что элемент g_0 фиксирован.

называют внутренним автоморфизмом. При внутреннем автоморфизме[19]

$$\begin{aligned}&\mathrm{Aut}_{g_0}(e) = e,\\ &\mathrm{Aut}_{g_0}(g^{-1}\cdot g) = \mathrm{Aut}_{g_0}(g^{-1})\cdot \mathrm{Aut}_{g_0}(g) = e \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Aut}_{g_0}(g^{-1}) = \big(\mathrm{Aut}_{g_0}(g)\big)^{-1},\\ &\mathrm{Aut}_{g_0}(g_1\cdot g_2) = \mathrm{Aut}_{g_0}(g_1)\cdot \mathrm{Aut}_{g_0}(g_2),\end{aligned}$$

а это значит, что образ этого внутреннего автоморфизма группы $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathrm{Aut}_{g_0}(\mathfrak{G})$ — группа. В силу взаимной однозначности соответствия элементов $g \leftrightarrow \mathrm{Aut}_{g_0}(g)$ имеет место взаимнооднозначное соответствие исходных координат $\mathfrak{G}$ и координат $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathrm{Aut}_{g_0}(\mathfrak{G})$. Поэтому есть также и взаимнооднозначное соответствие групповой структуры $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathrm{Aut}_{g_0}(\mathfrak{G})$, т. е. законов композиции: функции $\boldsymbol{C}$ имеют взаимнооднозначное соответствие с функциями $\tilde{\boldsymbol{C}}$. Именно это взаимнооднозначное соответствие как между координатами, так и между значениями бинарной операции на координатах соответствующей композиции элементов группы, называют *эквивалентностью групповой структуры.* Мы убедились, что координатную сетку на карте в окрестности единицы можно изоморфно перенести на карту в окрестности любого другого элемента группы так, чтобы закон группового умножения как на карте в окрестности единицы, так и на карте в окрестности любого элемента изоморфно выражался в терминах координат на карте возле единицы, т. е. функционально в одном и том же виде. Таким образом координатная структура групповой композиции элементов, т. е. бинарная операция в терминах координатах двух элементов группы, соответствующая групповому умножению, на карте в окрестности любой точки в группе путем изоморфизма всегда сводится к бинарной операции в терминах координат на карте возле единицы.

По построению в самом общем случае гомоморфный образ группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}'$ является подгруппой в $\mathfrak{G}'$. При гомоморфизме, вообще говоря, прообразом единицы e' может служить подгруппа элементов $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$: действительно, композиция элементов из $\mathfrak{H}$ переходит в единицу $\mathfrak{G}'$, $h_1\cdot h_2 \mapsto e'\cdot e' = e'$, т. е. $h_1\cdot h_2$ принадлежит опять же множеству $\mathfrak{H}$, а это значит, что имеют место все свойства, необходимые для определения группы. При этом элементы вида $g\cdot h\cdot g^{-1}$ преобразуются при гомоморфизме согласно $g\cdot h\cdot g^{-1} \mapsto g'\cdot e'\cdot (g')^{-1} = e'$, т. е. также являются элементами подгруппы $\mathfrak{H}$, $\forall h \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{G}$.

В общем случае говорят, что подгруппа $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ является *инвариантной* относительно внутренних автоморфизмов[a], т. е. гомоморфизмов вида $g\cdot h\cdot g^{-1}$, $\forall g \in \mathfrak{G}$, или *нормальной* подгруппой, если для любого элемента подгруппы, $\forall h \in \mathfrak{H}$, все образы внутренних автоморфизмов лежат в этой же подгруппе, $g\cdot h\cdot g^{-1} \in \mathfrak{H}$. (II.1.4)

[a] В отличие от внутренних произвольный автоморфизм есть гомоморфизм группы в свое подмножество, т. е. подгруппу.

Заметим, что прообраз единицы, который называют также ядром гомоморфизма группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}'$, — это нормальная подгруппа[20] в группе $\mathfrak{G}$. Примерами нормальной подгруппы могут служить, во-первых, единица группы e, которая составляет подгруппу $\mathfrak{E}$ из одного элемента, и, во-вторых, сама группа $\mathfrak{G}$, все внутренние автоморфизмы которой принадлежат ей самой по построению группы.

Группа называется *простой*, если она не содержит нормальных подгрупп, отличных от единичной и себя самой. Группа называется *полупростой*, если она не содержит абелевых нормальных подгрупп, но в полупростой группе есть хотя бы одна неабелева инвариантная подгруппа, которая не совпадает с самой группой. Для полупростой группы Ли нормальная подгруппа, отличная от единицы, также является группой Ли[21].

Задача 11. Рассмотрите трансляции на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу. Найдите все нормальные подгруппы этой группы.

Взаимнооднозначный гомоморфизм называют изоморфизмом. В случае изоморфизма прообраз единицы содержит единственный элемент — единицу, а это значит, что все групповые свойства образа и прообраза изоморфизма эквивалентны.

Итак, мы установили, что структура группы Ли, т. е. свойства композиции, вблизи единицы изоморфна ее структуре в окрестности любого другого элемента группы.

[19] Обратим внимание на то, что всё разнообразие внутренних автоморфизма группы задается количеством элементов в группе: для элемента g_k определен внутренний автоморфизм $\mathrm{Aut}_{g_k}(g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_k\cdot g\cdot g_k^{-1}$, так что обозначение внутреннего автоморфизма $\mathrm{Aut}_{g_0}(g)$ указывает на вполне определенный элемент группы для этого изоморфизма: $g_k \mapsto g_0$.

[20] Теория групп достаточно полно излагается в учебнике ван дер Вардена [5], к которому и следует обратиться заинтересованному читателю, так что мы не будем здесь углубляться в детали, вводя понятия смежных классов, факторгрупп и т.п.

[21] Инвариантная подгруппа может, вообще говоря, оказаться не группой Ли, а дискретной группой, на которой невозможно ввести взаимнооднозначное соответствие между открытой областью в группе и открытой областью координат, т. е. такая группа будет включать в себя счетное (часто конечно счетное) число изолированных элементов. Например, в группе с матричным умножением элементы $\mathbb{1}$ и $-\mathbb{1}$ образуют инвариантную подгруппу из 2-х элементов, и эта дискретная подгруппа не является группой Ли.

Остановимся теперь подробнее на свойствах группы Ли в окрестности единицы, т. е. на свойствах бинарной операции, задающей композицию в терминах координат элементов группы. Итак, по определению для элементов группы, бесконечно мало отличающихся от единицы[22], имеет место описание композиции двух элементов многокомпонентной функцией бинарной операции

$$g_X \cdot g_A \mapsto C^\gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \leftrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}), \tag{II.1.5}$$

принимающей значения в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}_G}$, причем композиция *с единичным элементом, имеющим координату* $\mathbf{0}$, дает

$$g_X \cdot e = g_X \mapsto \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}, \mathbf{0}) = \boldsymbol{X}, \qquad e \cdot g_A = g_A \mapsto \boldsymbol{C}(\mathbf{0}, \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}, \tag{II.1.6}$$

откуда

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta} X^\alpha A^\beta \big(1 + \mathcal{O}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})\big). \tag{II.1.7}$$

Задача 12. Объясните, почему в законе группового преобразования координат возле единичного элемента $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ нет вкладов, квадратичных только по $\boldsymbol{X}$ и квадратичных только по $\boldsymbol{A}$.

Согласно (II.1.7) введем многокомпонентное координатное поле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{X}, \tag{II.1.8}$$

которое по построению удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{A}. \tag{II.1.9}$$

В этой книге мы будем рассматривать компоненты координат точки (элемента группы Ли) как компоненты вектора, если в согласии с принятой в математике терминологией

i. для какого-либо элемента группы Ли на координатной сетке введены базисные векторы, которые определены как касательные к линиям координатной сетки в этой точке, так что линейные комбинации этих базисных векторов образуют векторное пространство, которое называется *касательным* для этого элемента, *с началом отсчета координат* в выбранном элементе группы Ли,

ii. координаты элементов группы Ли на карте вблизи элемента группы, который задает начало отсчета координат, и называется начальным элементом группы для определенной карты, определяя начальную точку своего касательного пространства, рассматриваются как коэффициенты разложения вектора по базису в касательном пространстве этого элемента группы.

Эти положения проиллюстрированы на рис. 2.2 для малой окрестности единичного элемента e группы Ли с двумерной картой[23], где показан элемент группы с групповыми координатами $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{a} \leftarrowtail \boldsymbol{A}$ в касательном пространстве единицы группы Ли. На этом примере поясним, что в окрестности групповой единицы с координатами $(0, 0)$ мы ввели два эквивалентных описания группового элемента. Во-первых, g_A — элемент группы с двухкомпонентными координатами $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2)$. Во-вторых, введение базиса касательных векторов координатной сетки в точке $(0, 0)$ позволяет определить вектор в касательном пространстве групповой единицы согласно сформулированным выше правилам:

$$\boldsymbol{a} = \mathfrak{e}_1 A_1 + \mathfrak{e}_2 A_2 \quad \leftarrowtail \quad (A_1, A_2) \quad \leftarrowtail \quad g_A,$$

Элемент группы g_A можно также обозначать как $g_{\boldsymbol{a}}$, тем самым указывая вектор в касательном пространстве групповой единицы, построенный по групповым координатам элемента g_A. Таким образом для группового элемента g_A с координатами $\boldsymbol{A}$ на карте в окрестности групповой единицы допустимо эквивалентное обозначение с использованием вектора $\boldsymbol{a}$ в качестве индекса, т. е. $g_{\boldsymbol{a}} \equiv g_A$.

В этих построениях понятие малой окрестности по сути означает, что рассматриваются малые отклонения от начала отсчета координат начального элемента на карте: $(A_1, A_2) \mapsto (A_1(\tau), A_2(\tau)) = (0, 0) + (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)\,\tau$ при $\tau \to 0$. Тогда и вектор $\boldsymbol{a}$ в касательном пространстве является касательным к кривой на группе $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\tau) = \big(\mathcal{A}_1(\tau), \mathcal{A}_2(\tau)\big)$ с параметром τ и равен производной этой кривой по τ

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{\tau\to 0} = \lim_{\mathrm{d}\tau\to 0} \frac{1}{\mathrm{d}\tau} \big(\mathfrak{e}_1 A_1 \mathrm{d}\tau + \mathfrak{e}_2 A_2 \mathrm{d}\tau\big).$$

[22]Термин «бесконечно малый» в научной литературе также используется в варианте «инфинитезимальный». При описании окрестности единицы группы Ли как гладкого многообразия это понятие подразумевает, что координатная карта, которая содержит единичный элемент группы, во-первых, может быть сколь угодно малой в смысле открытой области евклидова пространства, и, во-вторых, координата единицы соответствует началу отсчета координат на этой карте, т. е. векторному нулю пространства параметров $\mathbf{0}$.

[23]Координаты в открытой области пространства $\mathbb{R}^{N_G}$ могут быть криволинейными.

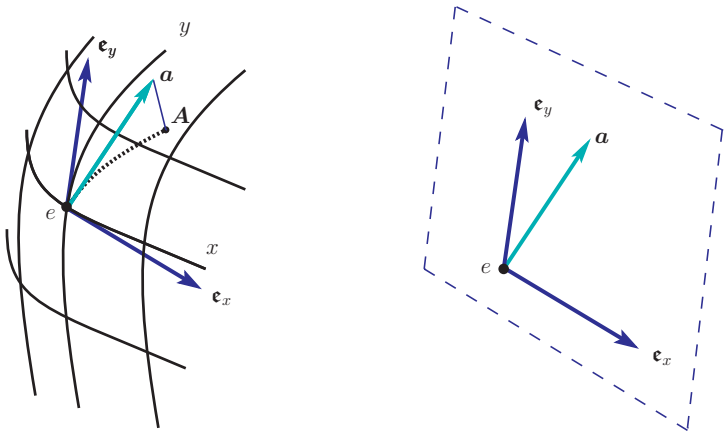


Рис. 2.2: Координатная сетка двумерной карты (x, y) группы Ли размерности 2 с x и y в качестве групповых параметров возле групповой единицы e. Базис $(\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y)$ в касательном пространстве возле единицы, построенный для заданной координатной сетки. Точка $\boldsymbol{A}$ в координатной сетке и ее образ $\boldsymbol{a}$ в касательном пространстве возле единицы. Справа для наглядности изображена только касательная плоскость возле групповой единицы.

Еще раз заострим внимание читателя на том, что, *поскольку группа Ли — это гладкое многообразие, понятие элемента группы идентично понятию точки на карте многообразия, а групповая композиция элементов группы Ли — это бинарная операция на точках многообразия, т. е. преобразование координат элементов группы, то переход от координат точек многообразия к векторам касательного пространства в начальной точке на карте позволяет провести векторный анализ групповой структуры и устанавливает идентичность точки в касательном пространстве точке на координатной сетке и элементу группы Ли.*

В рамках подобной конструкции в каждой точке координатной сетки определен свой базис векторного пространства, которое называется касательным в этой точке, а координаты близлежащего элемента группы отвечают вектору в касательном пространстве. Важно, что при замене параметров группы, которая возникает при переходе от одной координатной сетки к другой возле рассматриваемой точки, индуцируется замена базиса в касательном пространстве к этой точке, что определяет формулу замены компонент векторов при переходе от одного базиса к другому, т. е. закон преобразования векторов.

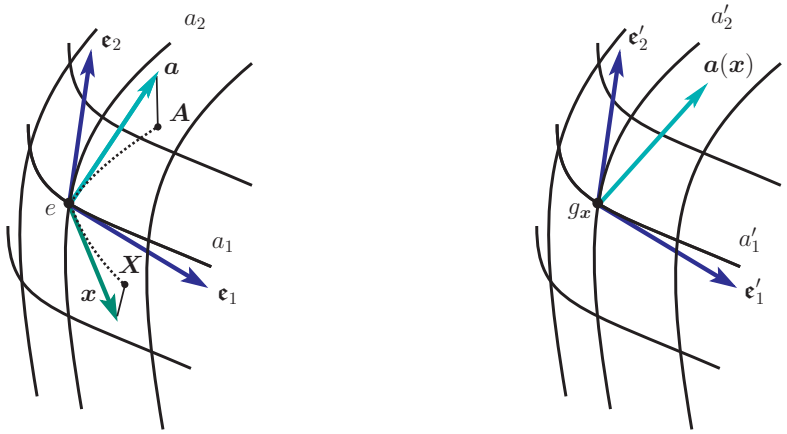


Рис. 2.3: Преобразование вектора $\boldsymbol{a}$ из касательного пространства групповой единицы в вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ в касательном пространстве элемента $g_{\boldsymbol{x}}$.

Важно напомнить, что групповая структура в окрестности любого элемента группы изоморфна групповой структуре вблизи единичного элемента группы, так что для изучения этой структуры достаточно установить ее свойства в касательном пространстве групповой единицы.

В касательном пространстве элемента группы $g_{\boldsymbol{x}}$ с координатами $\boldsymbol{x}$ на координатной сетке возле групповой единицы векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ определяется как линейное преобразование вектора $\boldsymbol{a}$ в касательном пространстве единицы e группы Ли в вектор в касательном пространстве элемента $g_{\boldsymbol{x}}$ при действии группового закона преобразования (II.1.7), в котором учитываются только вклады, линейные по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$ в касательном пространстве групповой единицы

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta} x^\alpha a^\beta, \tag{II.1.10}$$

где по построению $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ уже не совпадает с $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$ при том, что $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{a} \equiv A$.

В математической литературе для векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ вводится специальный термин – левоинвариантное поле – с целью особо подчеркнуть то, что это поле строится в терминах групповой композиции, в которой элемент $g_{\boldsymbol{x}}$ стоит слева от элемента $g_{\boldsymbol{a}}$. Специальный термин необходим, потому что в касательном пространстве в точке $\boldsymbol{x}$ могут быть определены разные векторные поля $\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$, но только одно из этих полей задано линеаризацией бинарной функции групповой композиции и отображает вектор $\boldsymbol{a}$ из касательного пространства групповой единицы в вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ в касательном пространстве группового элемента $g_{\boldsymbol{x}}$. Говоря о поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, мы имеем в виду, что аргумент этого поля $\boldsymbol{x}$ может принимать разные значения, определяя множество векторов, каждый из которых лежит в своем касательном пространстве в зависимости от точки $\boldsymbol{x}$.

Итак, *вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, т. е. значение левоинвариантного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ при фиксированном значении его аргумента $\boldsymbol{x}$, лежит в касательном пространстве группового элемента с координатами $\boldsymbol{x}$,* которые указаны как вектор в касательном пространстве групповой единицы (см. рис. 2.3). Поэтому станем говорить о точке касательного пространства, которая указана вектором в этом касательном пространстве, причем в каждой точке $\boldsymbol{x}$, которая обозначает и координаты группового элемента $g_{\boldsymbol{x}}$, есть свое касательное пространство — касательное пространство элемента $g_{\boldsymbol{x}}$. В частности, вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{0})$ лежит в касательном пространстве единичного элемента группы, так как единица по построению имеет нулевые координаты. Поэтому можно говорить о векторе $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0})$ в касательном пространстве точки $\boldsymbol{0}$.

Подчеркнем, что в формуле преобразования (II.1.10) для векторов касательных пространств исключены нелинейные члены по координатам элементов группы. Этот переход от группового преобразования многокомпонентных координат, которые обозначаются заглавными буквами, *к линейным преобразованиям векторов касательного пространства с линейной зависимостью от аргументов* мы условимся показывать в формулах с помощью символа tangent. Например, в приближении касательных групповых координат

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}\big(1 + \mathcal{O}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}\big(1 + \mathcal{O}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big) \overset{\text{tangent}}{\longmapsto} c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta},$$

причем в силу линейной зависимости при $\boldsymbol{b} = \epsilon \cdot \boldsymbol{a}$

$$c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (1+\epsilon)\boldsymbol{a} + \epsilon\,\boldsymbol{c}_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta} \overset{\text{tangent}}{\longmapsto} (1+\epsilon)\boldsymbol{a}.$$

Для дальнейшего рассмотрения напишем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{X} \overset{\text{tangent}}{\longmapsto} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}x^{\alpha}a^{\beta}, \tag{II.1.11}$$

Поясним также, для чего при определении многокомпонентного поля координат $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$ в формуле (II.1.8), которую мы продублировали строчкой выше, был исключен так называемый «аффинный сдвиг», т. е. проведено вычитание координат $\boldsymbol{X}$. Как следует из приведенных нами формул (II.1.7)–(II.1.10), это вычитание аффинного сдвига из координат $\boldsymbol{C}$, которые получаются при действии группового преобразования $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$, позволяет точке начала отсчета из касательного пространства групповой единицы, т. е. вектору $\boldsymbol{0}$, поставить в соответствие не координаты $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{X}$, а точку начала отсчета в касательном пространстве точки $\boldsymbol{x}$, которая также имеет нулевые координаты в касательном пространстве $g_{\boldsymbol{x}}$, так как левоинвариантное векторное поле $\boldsymbol{0}(\boldsymbol{x})$, построенное как образ нулевого вектора $\boldsymbol{0}$ из касательного пространства групповой единицы, равно нулевому вектору в касательном пространстве элемента $g_X = g_{\boldsymbol{x}}$.

Повторим, что переход от соотношений в терминах координатных сеток к соотношениям в терминах касательных пространств с левоинвариантными полями мы помечаем в равенствах маркером tangent (см. формулу (II.1.11)). Введенная нами процедура тангенциального подхода в исследовании групп Ли определяет линейные преобразования из касательного пространства групповой единицы в касательное пространства элемента $g_{\boldsymbol{x}}$ с линейной зависимостью от координатного вектора $\boldsymbol{x}$. Свойства этого линейного преобразования задаются групповой композицией в группе Ли. Именно эти свойства — предмет нашего исследования. Они важны, так как мы можем говорить и о решении обратной задачи: изучив все допустимые свойства линейных преобразований касательных пространств, мы сможем говорить о всех допустимых свойствах групп Ли. Сама идея исследования билинейных преобразований в касательном пространстве является центральной: это основа концепции построения алгебры Ли для группы Ли.

Особо подчеркнем, что введенное нами левоинвариантное векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ (II.1.10) получается при отображении из касательного пространства единицы группы в касательное пространство элемента $g_{\boldsymbol{x}}$ в виде линейной зависимости по координатам аргумента $\boldsymbol{x}$ в касательном пространстве групповой единицы. В тангенциальном подходе в определении левоинвариантного поля следует различать само

поле и векторный аргумент этого поля. Векторные аргументы поля — это элементы касательного пространства в групповой единице, так что сложению векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в этом касательном пространстве $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ соответствует векторное поле с аргументом, равным этой сумме, в касательном пространстве точки $\boldsymbol{z}$, заданной суммой векторов в аргументе:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).$$

Формализм левоинвариантных векторных полей в касательном пространстве, т. е. рассмотрение отображений векторов из касательного пространства одного группового элемента в касательное пространство соседнего группового элемента становится более развернутым и понятным, если рассмотреть производную тензорной величины по направлению или производную Ли. Векторные поля, например, в гидродинамике, часто определены на плоском пространстве, а не на кривом пространстве многообразия, поэтому неискушенный в теории многообразий читатель может представлять векторное поле как пространство стрелок-векторов, каждый из которых привязан к своей точке пространства, а базис у этих векторов векторного поля общий, один для всего пространства, как будто эти векторы построены в начале координат, а потом разнесены по точкам пространства. В нашем и общем случае это не так: каждый вектор векторного поля, являющийся функцией точки многообразия, определен в своем касательном пространстве, базис которого зависит от точки многообразия.

Итак, групповая композиция задает левоинвариантные поля, например, поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ (II.1.10), которое лежит в касательном пространстве точки $\boldsymbol{x}$. Для того, чтобы описать свойства левоинвариантного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, необходимо сравнить его с другим полем $\boldsymbol{a}_{\parallel}(\boldsymbol{x})$ в том же касательном пространстве так, чтобы можно было определить, насколько левоинвариантное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ отличается от исходного вектора $\boldsymbol{a}$, заданного в касательном пространстве групповой единицы. С геометрической точки зрения для этого необходимо провести параллельный перенос исходного вектора $\boldsymbol{a}$ из касательного пространства групповой единицы в касательное пространство точки $\boldsymbol{x}$: вектор $\boldsymbol{a}_{\parallel}(\boldsymbol{x})$ мы и будем сравнивать с левоинвариантным вектором $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ в касательном пространстве точки $\boldsymbol{x}$.

В самом общем случае в рамках векторного анализа рассмотрим две точки в группе, отвечающие векторам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ в касательном пространстве групповой единицы, и два касательных пространства в этих точках, и определим конструкцию параллельного переноса на основе следующих геометрически обоснованных построений. При изучении групповой структуры возле единичного элемента группы Ли мы будем считать одно из этих двух касательных пространств касательным пространством групповой единицы, т. е. брать предел $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$.

Пусть $\boldsymbol{\epsilon}_\alpha$ образуют базис в касательном пространстве исходной точки $\boldsymbol{x}$, построенный как набор касательных векторов к линиям координатной сетки в этой исходной точке, а $\boldsymbol{\epsilon}'_\beta$ — таким же способом построенный базис в касательном пространстве другой точки $\boldsymbol{x}'$ (штрихованной), так что вектор $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ раскладывается в касательном пространстве исходной точки по базису $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = b^\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\epsilon}_\alpha$, а параллельно перенесенный вектор $\boldsymbol{b}_{\parallel}(\boldsymbol{x}')$ раскладывается по штрихованному базису $\boldsymbol{b}_{\parallel}(\boldsymbol{x}') = b^\beta_{\parallel}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\epsilon}'_\beta$. Связь базисов в точках $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ задается «траекторией параллельного переноса», и в нашем случае параллельного переноса по направлению это траектория вдоль вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\, t, \tag{II.1.12}$$

где t — параметр траектории.

В частности, рассмотрим векторы дифференциалов координат в разных точках координатной сетки, а именно,

(a) дифференциал координат в исходной точке:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_\alpha,$$

(b) дифференциал координат, параллельно перенесенный из исходной точки в штрихованную точку:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\parallel} = \mathrm{d}x^\beta_{\parallel} \boldsymbol{\epsilon}'_\beta,$$

(c) дифференциал координат в штрихованной точке:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathrm{d}x'^\beta \boldsymbol{\epsilon}'_\beta.$$

Заметим, что эти понятия определены в касательных пространствах к многообразию, и на это в явном виде указывают векторы базиса.

Постулируем, что, во-первых, вектор параллельно перенесенного дифференциала — это тот же вектор дифференциала

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\parallel} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Мы можем приравнять векторы из касательных пространств двух разных точек многообразия потому, что нам известно, как связаны базисы двух касательных пространств. Эта связь определена траекторией (параллельного переноса), связывающей две точки многообразия. Ниже мы напишем эту связь базисов в явном виде. По сути, мы даем определение параллельно перенесенного векторного пространства: пространство параллельно перенесенных векторов — это то же пространство тех же векторов, но с параллельно перенесенным базисом, причем элементы параллельно перенесенного пространства мы полагаем равными элементам исходного векторного пространства. Базисы в исходном векторном пространстве и параллельно перенесенном векторном пространстве могут отличаться, так как заданный набор координатных сеток определяет в каждой точке свой базис. Как сказывается выбор координатных сеток на записи векторов в базисе, мы покажем в дальнейшем построении.

Во-вторых, параллельный перенос дифференциала координат в штрихованную точку задает дифференциал координат в штрихованной точке

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\parallel} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}'.$$

Тогда покомпонентная запись в двух базисах дает следующие равенства:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x^\alpha \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha = \mathrm{d}x'^\beta \boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x^\alpha \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha \boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta = \mathrm{d}x^\alpha \Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta. \tag{II.1.13}$$

Последнее равенство вместе с предыдущей формулой равенства дифференциалов как раз и дает нам основание вычислить связь базисов касательных пространств двух точек, если задана траектория, связывающая эти две точки многообразия, в нашем случае это (II.1.12). Здесь мы ввели матрицу перехода, которая определяется частными производными

$$\Lambda^\beta_{\bullet\alpha} \equiv \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha x'^\beta$$

и задана преобразованием для дифференциалов координат

$$\mathrm{d}x'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\,\mathrm{d}x^\beta = \Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\,\mathrm{d}x^\beta, \tag{II.1.14}$$

если координаты штрихованной точки $\boldsymbol{x}'$ определены в виде многокомпонентной функции вектора $\boldsymbol{x}$. Пусть две бесконечно близкие точки многообразия связывает траектория вида

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \tag{II.1.15}$$

с малым параметром сдвига $\mathrm{d}t \to 0$. В этом случае согласно (II.1.15) матрица преобразований компонент вектора равна

$$\Lambda^\alpha_{\bullet\beta} = \partial_\beta x'^\alpha = \delta^\alpha_\beta + \mathrm{d}t\,\frac{\partial a^\alpha(\boldsymbol{x})}{\partial x^\beta}, \tag{II.1.16}$$

Возвращаясь к построению параллельного переноса, обратим внимание на то, что последнее равенство в формуле (II.1.13) определяет закон матричного преобразования базиса при переходе из касательного пространства исходной точки в касательное пространство штрихованной точки

$$\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha = \Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta. \tag{II.1.17}$$

Заметим, что согласно (II.1.14) компоненты дифференциалов преобразуются как компоненты контравариантного вектора, что согласуется с преобразованием базисных векторов (II.1.17), номера которых преобразуются как компоненты ковектора, т. е. матрицей, обратной к матрице преобразований компонент дифференциалов от исходных к штрихованным,

$$\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha_{\bullet\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha.$$

После этих замечаний естественно положить, что параллельный перенос контравариантного вектора $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ происходит по тому же закону, что и контрвектора дифференциалов, и означает, что после параллельного переноса вектор $\boldsymbol{b}_\parallel(\boldsymbol{x}')$ — это тот же самый вектор, т. е.

$$\boldsymbol{b}_\parallel(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}). \tag{II.1.18}$$

В компонентах

$$b^\beta_\parallel \boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta = b^\alpha \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha = b^\alpha \Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\beta, \quad \Rightarrow \quad b^\beta_\parallel(\boldsymbol{x}') = \Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\,b^\alpha(\boldsymbol{x}), \qquad \Lambda^\beta_{\bullet\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha x'^\beta, \tag{II.1.19}$$

а для сдвига координат по направлению поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ согласно (II.1.15) и (II.1.16)

$$b^{\beta}_{\parallel}(\boldsymbol{x}') = b^{\beta}(\boldsymbol{x}) + b^{\alpha}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\partial_{\alpha}a^{\beta}(\boldsymbol{x}).$$

Обратим внимание на то, что закон преобразования компонент вектора при параллельном переносе (II.1.19) из касательного пространства точки $\boldsymbol{x}$ в касательное пространство точки $\boldsymbol{x}'$ полностью совпадает с законом преобразования компонент вектора при замене базиса в одном и том же векторном пространстве, когда происходит замена координат $x'^{\beta} = x'^{\beta}(x^{\alpha})$. Это совпадение не случайно. В самом деле, если один и тот же вектор $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_{\alpha}$, который задан в точке $\boldsymbol{x}$, после замены базиса в форме (II.1.17) записать в штрихованном базисе, в котором координаты имеют штрихованные компоненты $x'^{\beta}(x^{\alpha})$, получающиеся при замене базиса, т. е. если

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad b'^{\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_{\beta} = b^{\alpha}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_{\alpha}, \tag{II.1.20}$$

то

$$b'^{\beta}(\boldsymbol{x}') = \Lambda^{\beta}_{\bullet\,\alpha}\, b^{\alpha}(\boldsymbol{x}). \tag{II.1.21}$$

Физическая интерпретация этого преобразования следует из того, что базис $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_{\alpha}$ ассоциируется с первым наблюдателем, а штрихованный базис $\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_{\beta}$ — со вторым наблюдателем, причем каждый «видит» один и тот же объект – вектор в своей системе отсчета: исходной и штрихованной, соответственно, согласно (II.1.20). Но эти же наблюдения можно проинтерпретировать и другим, эквивалентным с точки зрения покомпонентной записи способом: пусть первый и второй наблюдатели — это один и тот же наблюдатель, который переместился из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{x}'$, а объект наблюдения — все тот же вектор, так что преобразования компонент вектора после перемещения наблюдателя остаются теми же, что в формуле (II.1.21). От такой пассивной точки зрения можно перейти к активной: наблюдатель может заявить, что он никуда не перемещался, а это объект был перемещен относительно наблюдателя в результате параллельного переноса, который и означает тождественность формул (II.1.18) и (II.1.19) с формулами (II.1.20) и (II.1.21). В этом заключается одно из достоинств координатного подхода в векторном анализе: формулы преобразования тензоров при пассивной замене координат в векторном пространстве тождественны формулам при активном перемещении тензорных величин в результате параллельного переноса.

Теперь мы можем определить отличие левоинвариантного поля $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}')$, заданного согласно групповой композиции в касательном пространстве точки $\boldsymbol{x}'$ так, как это было описано раньше в формуле (II.1.10), от вектора $\boldsymbol{b}_{\parallel}(\boldsymbol{x}')$, полученного параллельным переносом вектора $\boldsymbol{b}_{\parallel}(\boldsymbol{x})$ из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{x}'$ по направлению левоинвариантного векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, и ввести производную вектора $\boldsymbol{b}$ по направлению при сдвиге (II.1.15), т. е. производную Ли

$$\begin{aligned}\pounds_a b^{\alpha}(\boldsymbol{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}t}\Big\{b^{\alpha}(\boldsymbol{x}') - b^{\alpha}_{\parallel}(\boldsymbol{x}')\Big\} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}t}\Big\{b^{\alpha}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t) - b^{\alpha}_{\parallel}(\boldsymbol{x}')\Big\} = \\ &= \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}t}\Big\{\big(b^{\alpha}(\boldsymbol{x}) + a^{\beta}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\partial_{\beta}\,b^{\alpha}(\boldsymbol{x})\big) - \big(b^{\alpha}(\boldsymbol{x}) + b^{\beta}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\partial_{\beta}a^{\alpha}(\boldsymbol{x})\big)\Big\} \\ &= a^{\beta}(\boldsymbol{x})\partial_{\beta}\,b^{\alpha}(\boldsymbol{x}) - b^{\beta}(\boldsymbol{x})\partial_{\beta}\,a^{\alpha}(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \tag{II.1.22}$$

где сначала производится вычитание компонент двух векторных полей при одном и том же значении набора аргументов (со штрихом) и в одном и том же касательном пространстве точки $\boldsymbol{x}'$ многообразия (элемента группы Ли). Так как вычитание компонент вектора производится в одном касательном в точке $\boldsymbol{x}'$ векторном пространстве, т. е. в одном и том же базисе, то такая разность — тензорная величина, которая имеет закон преобразования контрвектора (II.1.14).

Важно подчеркнуть, что при вычислении производной по направлению мы рассматриваем разность значений двух полей в касательном пространстве одной и той же точки (со штрихом), которая получается при бесконечно малом сдвиге исходной точки координатного пространства по направлению векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$. Но при $\mathrm{d}t \to 0$ результат вычисления производной по направлению относится к исходному набору координат вектора $\boldsymbol{x}$, т. е. к точке касательного пространства $\boldsymbol{x}$.

■

Для сравнения рассмотрим определение производной по направлению для скалярной функции $f \in \mathbb{R}$ от вектора $\boldsymbol{x}$: $f(\boldsymbol{x})$. Так же, как и для векторного поля, положим, что параллельно перенесенное при перемещении точки $\boldsymbol{x}$ значение скаляра получается по тем же формулам, что в результате замены координат. Скаляр или, как говорят, скалярное поле при замене координат в векторном пространстве $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ преобразуется как инвариант: значение нового скалярного поля f' (со штрихом) при штрихованных значениях аргумента $\boldsymbol{x}'$ совпадает со значением исходного скалярного поля f при исходных значениях аргумента $\boldsymbol{x}$,

$$f'(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}). \tag{II.1.23}$$

Такое преобразование значения скалярной функции f в точке $\boldsymbol{x}$ в значение скалярной функции f' в точке $\boldsymbol{x}'$ согласно (II.1.23) называют также параллельным переносом скаляра из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{x}'$:

$$f_{\parallel}(\boldsymbol{x}') \stackrel{\text{def}}{=} f(\boldsymbol{x}).$$

Поэтому при малом сдвиге в касательном пространстве в направлении векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ согласно (II.1.15) производная скаляра по направлению $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ задается величиной

$$\pounds_a f(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}') - f_{\parallel}(\boldsymbol{x}')}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}') - f'(\boldsymbol{x}')}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} =$$
$$= \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t) - f(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = a^{\alpha}\partial_{\alpha} f(\boldsymbol{x}), \qquad \text{(II.1.24)}$$

где мы сначала провели вычитание значений двух скалярных функций при одном и том же значении аргумента (со штрихом), а затем воспользовались тем, что значение новой скалярной функции, полученной при параллельном переносе при сдвинутом значении аргумента согласно (II.1.15), равно значению исходной скалярной функции при исходном значении аргумента (без штриха). Символ частной производной функции ∂_{α} по компоненте вектора с номером «альфа» в аргументе этой функции мы пометили ковариантным (нижним) индексом

$$\partial_{\alpha} f(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} f(\boldsymbol{x}).$$

Саму компоненту вектора координат мы помечаем контравариантным (верхним) индексом, так как закон преобразования компонент контравариантной величины отличен от закона преобразования компонент ковариантной величины, и мы специально указываем это в стандартных индексных обозначениях. ■

Подчеркнем, что разность векторов, которые относятся к двум разным точкам группового пространства параметров, т. е. лежат в разных касательных пространствах, не является тензорной величиной, так как каждый из пары векторов преобразуется, вообще говоря, разными матрицами, которые относятся к разным точкам векторного пространства координат: базисы векторных пространств, касающихся рассматриваемого многообразия в разных точках, могут преобразовываться по разным линейным законам, зависящим от точки касания. Поэтому при определении производной вектора $\boldsymbol{b}$ по направлению $\boldsymbol{a}$ мы брали разность векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}_{\parallel}$, заданных в касательном пространстве одной и той же точки $\boldsymbol{x}'$, т. е. величин, которые преобразуются по одному и тому же закону при произвольных обратимых заменах базиса в касательном пространстве, которое относится к точке $\boldsymbol{x}'$. Это значит, что результирующая производная также является вектором в том же касательном пространстве, а при $\mathrm{d}t \to 0$ результат вычисления производной по направлению относится к исходной точке $\boldsymbol{x}$. Эта векторная величина называется производной Ли и часто обозначается в виде скобки Ли

$$\pounds_a \boldsymbol{b} \equiv [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \qquad \text{(II.1.25)}$$

Найдем скобку Ли для введенных по закону групповой композиции (II.1.10) левоинвариантных векторных полей $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ бесконечно близко к групповой единице[24], когда $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$. Согласно (II.1.10)

$$a^{\alpha}\partial_{\alpha}\, b^{\gamma}(\boldsymbol{x}) = a^{\alpha}\partial_{\alpha}(b^{\gamma} + c^{\gamma}_{\alpha'\beta}x^{\alpha'}b^{\beta}) = a^{\alpha}c^{\gamma}_{\alpha\beta}b^{\beta}, \qquad b^{\alpha}\partial_{\alpha}\, a^{\gamma}(\boldsymbol{x}) = b^{\alpha}c^{\gamma}_{\alpha\beta}a^{\beta}.$$

Это значит, что в касательном пространстве в нуле

$$\pounds_a \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} - \boldsymbol{c}_{\alpha\beta}a^{\beta}b^{\alpha} = \boldsymbol{f}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}, \qquad \text{(II.1.26)}$$

где мы ввели *структурные константы*

$$f^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv c^{\gamma}_{\alpha\beta} - c^{\gamma}_{\beta\alpha}, \qquad f^{\gamma}_{\alpha\beta} = -f^{\gamma}_{\beta\alpha}, \qquad \text{(II.1.27)}$$

которые задаются законом композиции в группе Ли и являются антисимметричными по перестановке ковариантных (нижних) индексов. Следовательно,

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}], \qquad \Leftrightarrow \qquad \pounds_a \boldsymbol{b} = -\pounds_b \boldsymbol{a}, \qquad \text{(II.1.28)}$$

[24] Вдумчивому читателю мы предлагаем самостоятельно поразмыслить над вопросом о том, что скобка Ли, вычисленная в касательном пространстве не возле групповой единицы, а в касательном пространстве возле любого другого элемента группы, т. е. не при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$, выражается через левоинвариантные поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ с теми же структурными константами $f^{\gamma}_{\alpha\beta}$ при специальном выборе групповых координат, которые мы будем обсуждать при введении экспоненциального представления. Этот факт — одно из следствий утверждения об эквивалентности групповой структуры группы Ли в окрестностях разных групповых элементов. При этом мы уже качественно описали этот факт при введении бинарной операции группового умножения, когда координатные векторы из окрестности группового элемента изоморфно заменялись на координатные векторы в окрестности групповой единицы.

т. е. скобка Ли антисимметрична по перестановке своих аргументов. Очевидно также, что скобка Ли по построению линейна по каждому из своих аргументов.

Итак, производная Ли (II.1.25) в касательном пространстве единицы группы Ли — это скобка Ли (II.1.26), которая задает линейно зависящее от направления $\boldsymbol{a}$ линейное преобразование векторов касательного пространства $\boldsymbol{b}$ через структурные константы группы Ли (II.1.27). Как мы уже говорили чуть выше, изучение свойств этого линейного преобразования позволяет установить самые общие свойства структурных констант группы Ли, выделить системные характеристики и сгруппировать эти характеристики по классам. Для этого нам необходимо исследовать свойства скобки Ли.

Задача 13. Найдите групповые константы для группы поворотов 3-мерного евклидова пространства SO(3).

При исследовании свойств скобки Ли мы ограничиваемся линейной точностью по ее аргументам. В касательном пространстве находим

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \overset{\text{tangent}}{=} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]. \tag{II.1.29}$$

Это соотношение допускает аналитическую интерпретацию. Сначала установим, что координаты обратного элемента g_u^{-1} при бесконечно малых преобразованиях в касательном пространстве даются просто компонентами вектора $-\boldsymbol{u}$, т. е.

$$g_u^{-1} \equiv g_{\tilde{u}} \overset{\text{tangent}}{=} g_{-u}.$$

В самом деле, рассмотрим композицию $g_u \cdot g_u^{-1} \equiv g_u \cdot g_{\tilde{u}} = g_{\tilde{u}} \cdot g_u = e$, т. е. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{C}(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, где координаты обратного элемента $\tilde{\boldsymbol{u}}$ являются функцией $\boldsymbol{u}$, $\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$, причем $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. С точностью до второго порядка малости по $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u},-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} + \mathcal{O}(u^2) = \boldsymbol{0} + \mathcal{O}(u^2).$$

Поскольку в касательном пространстве рассматриваются только линейные преобразования, то

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u},-\boldsymbol{u}) \overset{\text{tangent}}{=} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

Условие инфинитезимальности координат элементов группы соответствует понятию касательного пространства к точке многообразия, в данном случае это касательное пространство единичного элемента группы. Тогда в касательном пространстве единичного элемента группы Ли с заданной точностью линейной зависимости от координат элементов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{0}$

$$g_a \cdot g_b = g_{C(a,b)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)} \mapsto \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$
$$(g_b \cdot g_a)^{-1} = g_{C(b,a)}^{-1} = g_{-C(b,a)+\mathcal{O}(C^2(b,a))} \overset{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \mapsto -\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}). \tag{II.1.30}$$

Используя переход к линейным зависимостям в касательном пространстве согласно (II.1.29), получаем

$$\begin{aligned}
&(g_b \cdot g_a)^{-1} \cdot g_a \cdot g_b = g_{C(b,a)}^{-1} \cdot g_{C(a,b)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \cdot g_{c(a,b)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)+c(a,b)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} \quad \text{или} \\
&g_a \cdot g_b \cdot (g_b \cdot g_a)^{-1} = g_{C(a,b)} \cdot g_{C(b,a)}^{-1} \overset{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)} \cdot g_{-c(b,a)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)-c(b,a)} \overset{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]},
\end{aligned} \tag{II.1.31}$$

где отличие между двумя выражениями может возникнуть только при учете нелинейной зависимости от касательных векторов, т. е. вне рамок тангенциального подхода. В итоге в касательном пространстве имеет место равенство

$$g_a \cdot g_b \overset{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]}. \tag{II.1.32}$$

Итак, соотношение (II.1.29) определяет разность векторов касательного пространства, которая задает элемент группы, построенный в виде композиции двух элементов группы в прямом и в обратном порядке в окрестности единицы,

$$g_{[a,b]} \overset{\text{tangent}}{=} g_a^{-1} \cdot g_b^{-1} \cdot g_a \cdot g_b.$$

Отметим, что точное соотношение имеет вид

$$g_{\boldsymbol{a}} \cdot g_{\boldsymbol{b}} = g_{\boldsymbol{b}} \cdot g_{\boldsymbol{a}} \cdot g_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+\boldsymbol{\mathcal{O}}(3_{ab})}, \tag{II.1.33}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{O}}(3_{ab})$ обозначает векторную функцию третьего или более высокого порядка малости по векторам касательного пространства, которая нелинейна хотя бы одному из аргументов, так что в тангенциальном подходе этот вклад не имеет значения.

Итак, мы показали, что интерпретация соотношений (II.1.26)–(II.1.29) для производной Ли и скобки Ли может быть сформулирована в терминах групповой композиции двух элементов группы вблизи единицы: групповое произведение двух элементов группы выражается через групповое произведение тех же элементов в обратном порядке, умноженное на групповой элемент, координаты которого в касательном пространстве групповой единицы задаются скобкой Ли левоинвариантных полей рассматриваемых элементов группы.

Соотношение группового преобразования (II.1.32) позволяет записать внутренний автоморфизм группового элемента g_b в окрестности групповой единицы

$$\mathrm{Aut}_{g_a}(g_b)=g_a\cdot g_b\cdot g_a^{-1} \tag{II.1.34}$$

в виде

$$g_a\cdot g_b\cdot g_a^{-1}\overset{\text{tangent}}{=} g_b\cdot g_a\cdot g_{[a,b]}\cdot g_a^{-1}\overset{\text{tangent}}{=} g_b\cdot g_{[a,b]}\cdot g_a\cdot g_a^{-1}=g_b\cdot g_{[a,b]}\overset{\text{tangent}}{=} g_{\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}. \tag{II.1.35}$$

Это означает, что внутренний изоморфизм можно трактовать как линейное преобразование аргумента автоморфизма в касательном пространстве групповой единицы. А именно, для преобразования с малым параметром ϵ при замене $\boldsymbol{a}\mapsto\epsilon\boldsymbol{a}$ в пределе при $\epsilon\to 0$ получаем

$$\boldsymbol{b}\overset{\text{Aut}}{\mapsto}\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\epsilon[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}], \tag{II.1.36}$$

или в компонентах

$$b'^{\gamma}=b^{\gamma}+\epsilon f^{\gamma}_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}=\big(\mathbb{1}+\epsilon f_a\big)^{\gamma}_{\bullet\,\beta}b^{\beta}, \tag{II.1.37}$$

где матрица

$$\big(f_a\big)^{\gamma}_{\bullet\,\beta}\equiv f^{\gamma}_{\alpha\beta}a^{\alpha}. \tag{II.1.38}$$

В итоге, среди линейных преобразований в касательном пространстве групповой единицы можно выделить специальные линейные преобразования, связанные со скобкой Ли группы, которые согласно (II.1.37) задают внутренние автоморфизмы группы Ли. Эта связь групповых преобразований с линейными преобразованиями является важной, как мы увидим при дальнейшем рассмотрении свойств алгебр Ли и представлений групп Ли.

Таким образом скобка Ли (II.1.26) задается законом композиции в группе Ли (II.1.7), и она представляет из себя билинейное векторное преобразование двух векторов в касательном пространстве элемента, близкого к единичному элементу группы. Результат этого билинейного преобразования, рассматриваемого как действие линейного преобразования, линейно зависящего от первого вектора в билинейной форме, на второй вектор в билинейной форме, принадлежит тому же касательному пространству, которое обозначают малой готической буквой, одноименной с обозначением группы Ли, т. е., например, группе $\mathfrak{G}$ отвечает касательное пространство $\mathfrak{g}$.

Первое свойство, антисимметрия скобки Ли следует из построения производной по направлению и того факта, что произведения двух элементов группы в прямом и обратном порядке при рассмотрении линейной зависимости от векторов в касательном пространстве единицы группы отличаются на элемент группы, определяемый, как мы установили в (II.1.32), скобкой Ли. Второе важное свойство скобки Ли является следствием ассоциативности композиции в группе. Действительно, воспользуемся (II.1.32) в произведении $(g_a{\cdot}g_b){\cdot}g_c$, последовательно меняя порядок следования элементов на обратный с точностью линейных преобразований в касательном пространстве возле единицы в группе Ли

$$\begin{aligned}(g_a\cdot g_b)\cdot g_c&\overset{\text{tangent}}{=} g_b\cdot g_a\cdot(g_{[a,b]}\cdot g_c)\overset{\text{tangent}}{=} g_b\cdot(g_a\cdot g_c)\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[[a,b],c]}\overset{\text{tangent}}{=}\\ &\overset{\text{tangent}}{=}(g_b\cdot g_c)\cdot g_a\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[[a,b],c]}\overset{\text{tangent}}{=}\\ &\overset{\text{tangent}}{=} g_c\cdot g_b\cdot(g_{[b,c]}\cdot g_a)\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[[a,b],c]}\overset{\text{tangent}}{=}\\ &\overset{\text{tangent}}{=} g_c\cdot g_b\cdot g_a\cdot g_{[b,c]}\cdot g_{[[b,c],a]}\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[[a,b],c]}.\end{aligned} \tag{II.1.39}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}g_a\cdot(g_b\cdot g_c)&\overset{\text{tangent}}{=}(g_a\cdot g_c)\cdot g_b\cdot g_{[b,c]}\overset{\text{tangent}}{=} g_c\cdot g_a\cdot(g_{[a,c]}\cdot g_b)\cdot g_{[b,c]}\overset{\text{tangent}}{=}\\ &\overset{\text{tangent}}{=} g_c\cdot(g_a\cdot g_b)\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[[a,c],b]}\cdot g_{[b,c]}\overset{\text{tangent}}{=}\\ &\overset{\text{tangent}}{=} g_c\cdot g_b\cdot g_a\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[[a,c],b]}\cdot g_{[b,c]}.\end{aligned} \tag{II.1.40}$$

Отсюда в силу ассоциативности из равенства (II.1.39) и (II.1.40) после сокращения на $g_c{\cdot}g_b{\cdot}g_a$ заключаем, что

$$g_{[b,c]}\cdot g_{[[b,c],a]}\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[a,b]}\cdot g_{[[a,b],c]}\overset{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]}\cdot g_{[a,c]}\cdot g_{[[a,c],b]}\cdot g_{[b,c]}.$$

В этом равенстве имеются члены второго и третьего порядка малости по параметрам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в касательном пространстве, а точнее билинейные и трилинейные векторные функции на касательном пространстве. Дальнейшие перестановки множителей приведут лишь к появлению элементов в высших степенях малости, а именно, к *нелинейным* функциям высшего порядка на касательном пространстве, которые не дают вклада в тангенциальном подходе, а это значит, что координаты записанных групповых элементов в касательном пространстве задаются выражениями

$$g_{[b,c]+[[b,c],a]+[a,c]+[a,b]+[[a,b],c]} \overset{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]+[a,c]+[[a,c],b]+[b,c]},$$

откуда

$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}]+[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{b}].$$

Для трилинейных векторных функций устанавливаем тождество

$$[[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}]+[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]=[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{b}] \tag{II.1.41}$$

и, воспользовавшись антисимметрией скобки Ли $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$, окончательно записываем его в форме

$$[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]+[[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}]+[[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{b}]=0, \qquad \begin{array}{l}\text{циклическая перестановка порядка следования элементов в двойной скобке Ли.}\end{array} \tag{II.1.42}$$

Это тождество Якóби для скобки Ли в касательном пространстве единичного элемента группы Ли — следствие ассоциативности элементов группы Ли.

Важное замечание состоит в том, что в касательном пространстве выбор координатной сетки не однозначен, и, следовательно, возможны замены переменных, при которых построенные нами векторные поля преобразуются как векторы, а структурные константы как тензор третьего ранга смешанного типа, дважды ковариантный по паре нижних индексов и контравариантный по верхнему. Другими словами, структурные константы группы Ли зависят от выбора координат вблизи единичного элемента, но эта зависимость определяется линейными преобразованиями в касательном векторном пространстве. При этом остаются инвариантными свойства скобки Ли, что позволяет нам сделать определение.

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ *называется алгеброй Ли*, если в нем

- задана скобка Ли (антисимметричная билинейная композиция элементов), (II.1.43)
- для двойных скобок Ли удовлетворяется тождество Якоби.

Итак, мы установили, что группе Ли соответствует ее алгебра Ли со скобкой Ли, которая однозначно задана законом групповой композиции: бинарная операция на координатах группы определяет структурные константы[25].

§2. Представление группы Ли и генераторы

Квантовомеханическая формулировка понятия представления алгебры Ли, алгебра генераторов, присоединенное представление и метрика Киллинга, полупростые компактные группы Ли, след генератора, инварианты Казимира как однородные полиномы генераторов, индекс Дынкина.

В квантовой механике преобразования симметрии описываются линейными операторами, действующими на гильбертовом пространстве квантовых состояний[26], пространстве над полем комплексных чисел с комплекснозначным скалярным произведением и неотрицательной действительной нормой. Гомоморфизм группы на группу операторов, которые действуют на пространстве квантовых состояний, называется ее представлением. В случае изоморфизма говорят о точном представлении группы, с которым мы в дальнейшем и будем иметь дело.

В отличие от абстрактной группы Ли ее представление в виде линейных операторов–матриц, действующих на конечномерном векторном пространстве, обладает важным отличием: для линейных операторов, зависящих от групповых параметров, имеет место не только групповая композиция в виде

[25] Скобку Ли группы Ли часто называют скобкой Ли алгебры Ли.

[26] Здесь мы предполагаем, что читатель освоил описание группы поворотов и квантование спина, так что, опираясь на этот опыт рассмотрения группы поворотов, под гильбертовым пространством мы понимаем конечномерное векторное пространство с евклидовой нормой. Базис этого пространства состоит из общих собственных векторов нескольких эрмитово самосопряженных операторов, которые попарно коммутируют и составляют полный набор наблюдаемых величин физической системы, а размерность гильбертова пространства $\mathcal{D}$ задает свойства старшего вектора состояния в виде набора собственных значений для наблюдаемых из полного набора наблюдаемых. В случае группы поворотов гильбертово пространство состояний со спином s имеет размерность $\mathcal{D}=2s+1$, а полный набор наблюдаемых — это оператор квадрата спина с собственным значением, равным $s(s+1)$ на любом векторе представления, и оператор проекции спина на ось z с собственными значениями m_s.

матричного умножения, но и другие операции, например, дифференцирование матриц по параметрам группы. Поэтому возможно прямое введение производной оператора по параметру, и, как мы увидим, существует определенная связь производной матрицы в представлении группы Ли с понятием производной по направлению в касательном пространстве группы Ли.

Пусть $T(\mathfrak{G}) = G$ — представление группы Ли:

$$g_a \overset{T}{\mapsto} G_a,$$

где индекс $\boldsymbol{a}$ указывает на координату элемента в группе Ли, а $G_{\boldsymbol{a}}$ — соответствующий оператор с той же координатой, который действует на пространстве состояний. Точное представление означает, что единица группы взаимнооднозначно переходит в единичный оператор:

$$e \overset{T}{\leftrightarrow} \mathbb{1}.$$

Определим генератор как производную линейного оператора,

$$\Gamma_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{i}\,\frac{\partial G_a}{\partial a^\alpha}\Big|_{\boldsymbol{a}\to 0}. \tag{II.2.1}$$

В этом определении мнимая единица имеет значение при рассмотрении вещественных групповых координат и физического смысла генератора. После введения метрики Киллинга мы покажем, что в случае невырожденности и положительной определенности этой метрики так определенные генераторы алгебры Ли являются эрмитовыми операторами. Однако линейными преобразованиями на пространстве генераторов над полем комплексных чисел можно перейти к таким наборам линейных комбинаций генераторов, в которых часть этих комбинаций, которые мы также будем называть генераторами, будут неэрмитовыми операторами. Важный для изучения структуры алгебры Ли и классификации алгебр Ли базис Картана–Вейля — один из таких примеров.

Для бесконечно малых преобразований[27]

$$g_{\boldsymbol{a}} \overset{T}{\mapsto} G_a \overset{\text{tangent}}{=} \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{a} \tag{II.2.2}$$

и $\Gamma_\alpha a^\alpha = \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{a} \equiv \Gamma_{\boldsymbol{a}}$. Этот оператор действует как матрица на векторном пространстве рассматриваемого представления. Это означает, что генератор — это элемент касательного пространства в матричном представлении преобразований состояний — элементов векторного пространства с заданным базисом. Тогда с тангенциальной точностью, т. е. если пренебречь нелинейными по векторам касательного пространства параметров группы вкладами $\Gamma_{aa} = \mathcal{O}(a^2)$ и $\Gamma_{bb} = \mathcal{O}(b^2)$ в разложении матриц групповых преобразований по координатам в окрестности нуля координат в касательном пространстве единицы, найдем, что

$$g_a \cdot g_b \overset{T}{\mapsto} G_a \cdot G_b \overset{\text{tangent}}{=} (\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a)(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_b) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b.$$

Записанное в предыдущем параграфе равенство (II.1.32) для произведения двух элементов группы вблизи единичного элемента в операторном представлении с линейной точностью по векторам касательного пространства сводится к виду

$$\begin{aligned} g_a \cdot g_b \overset{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]}, \quad \overset{T}{\mapsto} G_a \cdot G_b \overset{\text{tangent}}{=} G_b \cdot G_a \cdot G_{[a,b]} \mapsto \\ \mapsto \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b \overset{\text{tangent}}{=} \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a\big)\big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_{[a,b]}\big) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b \overset{\text{tangent}}{=} \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a - \mathrm{i}\,\Gamma_{[a,b]} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbb{1} - (\Gamma_a\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\,\Gamma_{[a,b]} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i}\Gamma_{[a,b]} = [\Gamma_a, \Gamma_b]. \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

В конце этой формулы мы ввели стандартное обозначение для коммутатора двух операторов,

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] \overset{\text{def}}{=} \Gamma_a\,\Gamma_b - \Gamma_b\,\Gamma_a. \tag{II.2.4}$$

Для представления группы

$$\Gamma_{[a,b]} = \Gamma_\gamma\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^\gamma = \Gamma_\gamma\, f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta, \qquad [\Gamma_a, \Gamma_b] = a^\alpha b^\beta [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \tag{II.2.5}$$

[27] Обратим внимание на то, что здесь tangent означает переход к преобразованиям, линейным по параметрам группы. Таким образом исследуется групповая структура вблизи единицы группы, когда всеми нелинейностями следует пренебречь, поскольку нелинейность относится к глобальной структуре группы и ее следует изучать дополнительно.

так что тождество (II.2.3) при произвольных малых параметрах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \to 0$, т. е. в логике касательного пространства, сводится к следующему выражению для коммутатора генераторов преобразований

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma_\gamma. \tag{II.2.6}$$

Отметим здесь, что коммутатор двух эрмитовых генераторов является антиэрмитовым, как и единичный оператор, умноженный на мнимую единицу. И для эрмитовости генераторов алгебры Ли важно, что структурные константы состоят из действительных коэффициентов и антисимметричны по перестановке двух нижних индексов.

Итак, мы установили связь коммутатора генераторов групповых преобразований в пространстве состояний со структурными константами группы Ли (II.1.26), (II.1.27), которые возникли при введении скобки Ли.

Справедливость тождества Якоби для генераторов,

$$[\Gamma_a, [\Gamma_b, \Gamma_c]] + [\Gamma_b, [\Gamma_c, \Gamma_a]] + [\Gamma_c, [\Gamma_a, \Gamma_b]] = 0, \qquad \begin{array}{l}\text{циклическая перестановка порядка}\\ \text{следования элементов в двойных}\\ \text{коммутаторах,}\end{array} \tag{II.2.7}$$

элементарно следует из ассоциативности умножения операторов (матриц) при раскрытии входящих в это равенство коммутаторов.

Следовательно, генераторы, которые образуют векторное пространство при условии, что их можно складывать с произвольными комплексными коэффициентами при выполнении дистрибутивных законов, согласно (II.2.6) наделены скобкой Ли (коммутатор антисимметричен, а его результат принадлежит линейной оболочке генераторов), и эта скобка удовлетворяет тождеству Якоби. Поэтому они реализуют представление алгебры Ли.

Задача 14. Рассмотрите генератор группы поворотов на плоскости и найдите его собственные векторы. Запишите матрицу конечных поворотов в терминах генератора и единичной матрицы и ее действие на собственные векторы. Убедитесь, что действие группы SO(2) на собственные векторы с нормой $|\boldsymbol{r}|$ эквивалентно преобразованию группы U(1) на комплексных числах z с модулем $|z| = |\boldsymbol{r}|$ и комплексно сопряженных числах $\bar{z} \equiv z^*$.

2.1 Присоединенное представление

В квантовой механике размерность матрицы, отвечающей генератору Γ_α, зависит от числа базисных состояний, которое в свою очередь тоже не может быть произвольным, а зависит от структуры группы, т. е. коммутационных соотношений для генераторов. Это известно на примере группы поворотов, генераторы которой — компоненты векторного оператора момента вращения $\boldsymbol{j}$. При заданном значении $\boldsymbol{j}^2 = j(j+1)$ базис образуют $2j+1$ состояние с различными проекциями момента на выбранную ось. Выяснение допустимых значений числа базисных состояний для заданной группы — одна из целей проводимого изучения свойств алгебр Ли. Однако всегда существует представление, размерность пространства которого равна числу генераторов, а его структура задана коммутационными соотношениями генераторов алгебры, т. е. алгеброй Ли самой по себе. А именно, переписывая выражение (II.2.6), заметим, что коммутатор

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma_\gamma$$

есть линейное преобразование в векторном пространстве размерности N_G, которое образовано самими генераторами[28]: Γ_α (генератор по имени α) переводит Γ_β (генератор по имени β) в суперпозицию генераторов $\mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma$, что является линейным преобразованием! Иными словами, коммутатор генераторов мы трактуем как действие генератора алгебры, стоящего на первой позиции в коммутаторе, на генератор, записанный на второй позиции. Так как пространство генераторов есть линейная оболочка, построенная на независимых N_G генераторах, то коммутатор (II.2.6) мы рассматриваем как действие оператора Γ_α на базисный вектор Γ_β пространства присоединенного представления, а результат действия — правая часть выражения для коммутатора (II.2.6), которая также является вектором пространства присоединенного представления. А если мы знаем, как действует оператор на любой базисный вектор, то мы можем написать результат действия этого оператора на любой вектор пространства представления. И в силу того, что мы имеем дело с алгеброй, для которой определена операция сложения и умножения на комплексное число, мы знаем, как действует любой оператор, являющийся элементом линейной оболочки на операторах Γ_α.

Приведенные нами рассуждения можно записать в виде следующих формул: введем пространство линейной оболочки генераторов алгебры Ли, $\mathrm{Span}(\{\Gamma\})$ с элементами

$$\Gamma_B \equiv B^\beta \Gamma_\beta \equiv \boldsymbol{B}, \qquad \beta = \overline{\{1, N_G\}},\ B^\beta \in \mathbb{C}. \tag{II.2.8}$$

[28] N_G — число параметров группы Ли, равное числу генераторов и размерности пространства координат в группе.

Тогда, записывая коммутатор

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_B] = [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]B^\beta = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta} B^\beta \Gamma_\gamma = \Gamma_{B'} = B'^\gamma \Gamma_\gamma \in \mathrm{Span}(\{\Gamma\}),$$

устанавливаем, что имеет место преобразование компонент B^β вектора $\boldsymbol{B}$ в компоненты B'^γ вектора $\boldsymbol{B'}$ в векторном пространстве генераторов алгебры Ли:

$$B'^\gamma = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta} B^\beta, \tag{II.2.9}$$

где индекс α указывает на имя генератора Γ_α, коммутатор с которым задает линейное преобразование в векторном пространстве генераторов алгебры Ли.

Установим связь группового преобразования внутреннего автоморфизма возле групповой единицы (II.1.34) с линейными преобразованиями векторов касательного пространства, которую мы вывели в форме (II.1.37):

$$\mathrm{Aut}_{g_a}(g_b) = g_a \cdot g_b \cdot g_a^{-1} \quad \Rightarrow \quad b'^\gamma = b^\gamma + f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = \big(\mathbb{1} + f_a\big)^\gamma_{\ \bullet\beta} b^\beta, \qquad \big(f_a\big)^\gamma_{\ \bullet\beta} \equiv f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha.$$

Запишем эти же выражения в представлении группы Ли

$$g_a \cdot g_b \cdot g_a^{-1} \overset{\text{tangent}}{=} g_{\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} \overset{T}{\longmapsto} \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_a\big)\cdot\big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_b\big)\cdot\big(\mathbb{1} + \mathrm{i}\Gamma_a\big) \overset{\text{tangent}}{=} \mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_b - [\Gamma_a, \Gamma_b] = \\ = \mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_b - \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma a^\alpha b^\beta = \mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}. \tag{II.2.10}$$

Это значит, что коммутатор генератора Γ_a с ковекторным генератором Γ_β задает линейное преобразование $G_{\boldsymbol{a}}$ ковектора Γ_β

$$\Gamma_\beta \mapsto \Gamma_\beta - \mathrm{i}[\Gamma_a, \Gamma_\beta] = \Gamma_\beta + f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma a^\alpha = \Big(\delta^\gamma_\beta + f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha\Big)\Gamma_\gamma = \big(G_{\boldsymbol{a}}\big)^\gamma_{\ \bullet\beta}\Gamma_\gamma. \tag{II.2.11}$$

При этом $N_G \times N_G$-матрица такого линейного преобразования $G_{\boldsymbol{a}}$ задается структурными константами группы, что определяет *присоединенное* (adjoint) или регулярное представление алгебры Ли[29]:

$$\Gamma_\alpha \overset{\text{ad}}{\mapsto} (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\gamma_{\ \bullet\beta} \equiv \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}. \tag{II.2.12}$$

В итоге, линейное преобразование $G_{\boldsymbol{a}}$, связанное с внутренним автоморфизмом группы, запишется в виде, который согласуется с принятым нами определением генератора в (II.2.1) и (II.2.2):

$$\Gamma_\beta \overset{G_{\boldsymbol{a}}}{\longmapsto} G_{\boldsymbol{a}} \circ \Gamma_\beta = \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)a^\alpha\big)^\gamma_{\ \bullet\beta}\Gamma_\gamma, \qquad \mathbb{1}^\gamma_{\ \bullet\beta} = \delta^\gamma_{\ \bullet\beta}. \tag{II.2.13}$$

Эта формула в явном виде указывает на то, что действие группового элемента $G_{\boldsymbol{a}}$, бесконечно близкого к тождественному преобразованию, в присоединенном представлении — это матричное умножение строки Γ_γ на матрицу группового элемента в этом представлении.

В терминах векторного пространства генераторов алгебры Ли $\mathrm{Span}(\{\Gamma\})$ размерности N_G имеют место линейные преобразования компонент векторов

$$B'^\gamma = (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\gamma_{\ \bullet\beta} B^\beta. \tag{II.2.14}$$

Здесь мы специально подчеркнули, что в матричной записи линейного преобразования в ковариантном пространстве генераторов (обратите внимание на то, что «имя» генератора α — это нижний индекс, который связан с преобразованиями координат группы в касательном пространстве[30]) порядок следования ных индексов β и γ обозначен с помощью символа $\bullet$, так как этот порядок становится

[29] В математике записывают определение $\mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, которое читается следующим образом: действие векторного поля $\boldsymbol{a}$ в присоединенном представлении на поле $\boldsymbol{b}$ определяется как скобка Ли этих векторов в касательном пространстве. Но поскольку скобка Ли — это линейное преобразование, т. е. матрица в касательном пространстве, мы фактически приводим это определение в явном виде с учетом введенного множителя $-\mathrm{i}$ при определении генератора как элемента касательного пространства операторов преобразования (см. (II.2.2)): в тензорных обозначениях

$$\big\{\mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})\big\}^\gamma = \big\{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big\}^\gamma = f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = -\mathrm{i}\big(\mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha\big) b^\beta = -\mathrm{i}\big(\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha\big)^\gamma_{\ \bullet\beta} a^\alpha b^\beta = -\mathrm{i}\big(\mathrm{ad}\,\Gamma_{\boldsymbol{a}}\big)^\gamma_{\ \bullet\beta} b^\beta.$$

[30] Для более детального понимания того, как ставятся матричные индексы в формуле (II.2.12), где они согласованы с (II.2.6), напомним, что если a^α — это контрвектор в касательном пространстве координат группового элемента возле единицы, то закон линейного преобразования его компонент можно записать в матричном виде как $a'^\gamma = \Lambda^\gamma_{\ \bullet\beta} a^\beta$, где $\Lambda^\gamma_{\ \bullet\beta}$ — это матрица линейного преобразования координат группы, обратная матрице линейного преобразования базиса в координатном пространстве, а закон линейного преобразования ковектора Γ_β как $\Gamma'_\beta = (\Lambda^{-1})^\gamma_{\ \bullet\beta}\Gamma_\gamma$. Поэтому, если в качестве линейного преобразования, обозначенного матрицей Λ^{-1}, в этих формулах использовать $\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha$, то запись (II.2.12) становится естественной: она повторяет общее правило записи линейного преобразования координат ковектора в частном случае, когда линейное преобразование — это действие коммутатора.

существенным при вычислении композиции двух линейных преобразований как произведения матриц. В этих обозначениях α — это тензорный индекс, который отвечает ковариантному индексу ковектора при преобразованиях координат в касательном пространстве алгебры Ли размерности N_G, а β и γ — это матричные индексы в присоединенном представлении той же размерности N_G. Элементы матрицы, на которые указывают эти индексы, преобразуются при замене базиса в присоединенном представлении, и эта замена базиса представления никак не связана с преобразованиями координат группы возле единицы. Это отличие матричных индексов генератора и его индексного имени необходимо специально подчеркнуть, так как размерности этих индексов в присоединенном представлении совпадают, и может возникнуть недопонимание того, как и какие преобразования изменяют величины с такими разными индексами. Более формально этот вопрос мы разберем ниже на стр. 102, где перечислены все векторные пространства, которые задействованы в описании представления группы Ли в дополнение к касательному пространству координат возле единичного элемента группы.

Итак, запомним наши «убеждения». Спросим себя: на векторы какого пространства действуют матрицы-операторы присоединенного представления? И как устроен базис пространства, в котором эти матрицы имеют вид, зафиксированный в формуле (II.2.12)? Базис составляют N_G генераторов Γ_ν. Соответственно, компоненты элемента в этом векторном пространстве можно записать как B^ν, которые задают разложение по базису так, что $\Gamma_{\boldsymbol{B}} = \Gamma_\nu B^\nu$ в инвариантной записи (без индексов). Матрица-оператор $\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha$, являющийся элементом алгебры Ли, чье присоединенное представление мы строим, есть матрица размера $N_G \times N_G$ с первым верхним и вторым нижним индексом, $(\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\mu}$, так что линейное преобразование компонент B^ν тензорной записи имеет вид[31]

$$B'^\nu = (\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\mu} B^\mu,$$

Эта тензорная свертка может быть представлена как матричное умножение столбца компонент вектора пространства представления на матрицу генератора присоединенного представления ($\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha$, которая стоит слева от вектора $\boldsymbol{B}$. Тогда элемент присоединенного пространства можно записать в виде

$$\Gamma_{\boldsymbol{B}'} = \Gamma_\nu B'^\nu = \Gamma_\nu (\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\mu} B^\mu.$$

Ясно, что по определению присоединенного представления произведение матриц как преобразование в пространстве генераторов сводится к виду

$$(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\beta)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = (\mathrm{ad}\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\mu}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\beta)^\mu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = -f^\nu_{\alpha\mu} f^\mu_{\beta\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma,$$

и с учетом

$$[\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma] = \mathrm{i} f^\mu_{\beta\gamma}\Gamma_\mu, \qquad [\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = \mathrm{i} f^\nu_{\alpha\mu}\Gamma_\nu$$

находим, что

$$(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\beta)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] B^\gamma. \tag{II.2.15}$$

Точно также, переобозначая индексы $\alpha \leftrightarrow \beta$, получаем

$$(\mathrm{ad}\Gamma_\beta \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = [\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\gamma]] B^\gamma = -[\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]] B^\gamma,$$

где мы учли, что коммутатор антисимметричен относительно перестановки матриц. Тогда найдем действие коммутатора двух линейных преобразований в присоединенном представлении

$$(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\beta)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma - (\mathrm{ad}\Gamma_\beta \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = \big([\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]]\big) B^\gamma,$$

что в силу тождества Якоби

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]] + [\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = 0,$$

сводится к

$$-[\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] B^\gamma = [[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \Gamma_\gamma] B^\gamma = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\beta} [\Gamma_\mu, \Gamma_\gamma] B^\gamma = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\beta} (\mathrm{i} f^\nu_{\mu\gamma}) \Gamma_\nu B^\gamma = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\beta}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\mu)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma.$$

Значит, мы установили, что

$$(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\beta)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma - (\mathrm{ad}\Gamma_\beta \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\alpha)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\beta}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\mu)^\nu_{\bullet\gamma}\,\Gamma_\nu B^\gamma.$$

[31] В последующих рассуждениях мы опускаем часть линейного преобразования, которая является тождественным преобразованием.

Это означает, что в присоединенном представлении действительно имеет место необходимое выражение для коммутатора матриц генераторов

$$[\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha, \mathrm{ad}\,\Gamma_\beta] = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\beta}\, \mathrm{ad}\,\Gamma_\mu. \tag{II.2.16}$$

Это соотношение — квадратичное условие на структурные константы группы, так как его матричная запись дает

$$\mathrm{i}f^\nu_{\alpha\mu}\mathrm{i}f^\mu_{\beta\lambda} - \mathrm{i}f^\nu_{\beta\mu}\mathrm{i}f^\mu_{\alpha\lambda} = \mathrm{i}f^\mu_{\alpha\beta}\mathrm{i}f^\nu_{\mu\lambda}. \tag{II.2.17}$$

Задача 15. Покажите, что выражение (II.2.17) представляет из себя запись тождества Якоби как следствия ассоциативности групповой композиции (см. главу 2, **§1. Группа Ли и ее алгебра**, стр. 70) в терминах структурных констант.

Решение. Свернув (II.2.17) с Γ_ν, перепишем это тождество в терминах коммутаторов,

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\lambda]] - [\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\lambda]] = [[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \Gamma_\lambda],$$

что, пользуясь антисимметрией коммутатора, можно привести к тождеству Якоби (II.2.7),

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\lambda]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\lambda, \Gamma_\alpha]] + [\Gamma_\lambda, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = 0.$$

Задача 16. Вычислите размерность присоединенного представления специальной ортогональной группы SO(N).

Решение. Количество углов поворота задается числом плоскостей, в которых эти повороты осуществляются, т. е. неупорядоченной выборкой двух элементов из N,

$$N_G = \dim \mathrm{SO(N)} = C^2_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{N(N-1)}.$$

Задача 17. Вычислите размерность присоединенного представления специальной унитарной группы SU(N).

Решение. Квадратные N × N-матрицы имеют N^2 комплекснозначных элементов, т. е. $2\mathrm{N}^2$ вещественных параметров. Унитарные матрицы U удовлетворяют условию

$$U^\dagger U = \mathbb{1}.$$

Оператор $U^\dagger U$ является эрмитово самосопряженным,

$$\left(U^\dagger U\right)^\dagger = U^\dagger U,$$

и, следовательно, у матрицы этого эрмитово самосопряженного оператора $U^\dagger U$ на диагонали могут быть только N вещественных диагональных элементов, в данном случае равных 1 в силу накладываемого условия унитарности матрицы, а мнимые части диагональных элементов произведения $U^\dagger U$ автоматически равны нулю. Таким образом унитарность накладывает N вещественных условий на параметры унитарной матрицы U. Недиагональные элементы произведения $U^\dagger U$ могут быть комплексными, но в силу эрмитовости $U^\dagger U$ элементы этого произведения ниже диагонали комплексно сопряжены элементам выше диагонали: $\left(U^\dagger U\right)_{mn} = \left(U^\dagger U\right)^*_{nm}$. Число элементов выше диагонали равно сумме арифметической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{N}-k) = \frac{1}{2}\,\mathrm{N(N-1)}.$$

По условию унитарности эти комплексные числа равны нулю, что задает по 2 условия равенства нулю для вещественной и мнимой части для каждого из этих элементов матрицы, т. е. еще $\mathrm{N(N-1)}$ вещественных условий. Из условия унитарности

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

сразу заключаем, что $\det U^\dagger \cdot \det U = 1$, а так как

$$\det U^\dagger = \left(\det U^{\mathrm{T}}\right)^* = \left(\det U\right)^*,$$

то $|\det U| = 1$, т. е. $\det U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\det U)}$. Поэтому специальное условие унимодулярности

$$\det U = 1$$

фиксирует не два параметра, а только один: фазу комплекснозначного детерминанта, т. е. уменьшает число независимых параметров на 1.

В итоге, число независимых вещественных параметров в группе SU(N) сводится к выражению, в котором из общего числа вещественных параметров матрицы вычитается число указаных нами связей, налагаемых унитарностью и унимодулярностью:

$$N_G = \dim \mathrm{SU(N)} = 2\mathrm{N}^2 - \mathrm{N} - \mathrm{N(N-1)} - 1 = \mathrm{N}^2 - 1.$$

2.2 Метрика Киллинга и критерий Картана

Отличие преобразований базиса в пространстве состояний присоединенного представления от преобразований генераторов под воздействием преобразований параметров группы Ли, след произведения двух генераторов, сумма собственных значений генератора компактной полупростой группы.

Матрицы генераторов в присоединенном представлении позволяют *определить инвариант — метрику Киллинга*, симметричный по индексам след произведения матриц, который не меняется при линейных обратимых преобразованиях базиса векторного пространства генераторов[32],

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \cdot \mathrm{ad}\Gamma_\beta) = (\mathrm{ad}\Gamma_\alpha)^{\gamma}_{\bullet\,\mu}(\mathrm{ad}\Gamma_\beta)^{\mu}_{\bullet\,\gamma} = -f^{\gamma}_{\alpha\mu}f^{\mu}_{\beta\gamma}. \tag{II.2.19}$$

В самом деле, в векторном пространстве представления, которое мы в дальнейшем часто называем пространством состояний, отождествляя его с пространством квантовых состояний, вводимым при описании реальных систем в физике, можно преобразовывать базис, не меняя координаты в группе, т. е. оставляя прежний базис в касательном пространстве элемента группы. Например, в группе поворотов 3-мерных векторов евклидова пространства $\boldsymbol{r}$ три угла поворота вокруг трех ортогональных декартовых осей задают 3 генератора — матрицы s_x, s_y и s_z, которые являются матрицами 3×3, имеющими определенный вид в случае преобразований векторов координат $\boldsymbol{r}$, так что этот вид матриц однозначно задает структурные константы группы поворотов, когда в пространстве координат $\boldsymbol{r}$ выбраны декартовы координаты. Единичные векторы вдоль трех осей координат — привычный выбор базиса, который фиксирует элементы матриц генераторов. Однако при рассмотрении представления со спином $s=1$, отличного от векторного пространства декартовых координат, выбор базиса представления может быть иным: стандартный ортонормированный базис состояний $|s,m_s\rangle$, который характеризуется заданным значением проекции спина на ось z, равным m_s. Это базис $|1,m_s\rangle$, где $m_s\in\{+1,0,1\}$. Указанный базис отличается от декартова базиса и задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы s_z. Однако допустúм и такой базис квантовых состояний, который задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы s_x, например. Поэтому при заданных параметрах группы, углах поворотов в декартовых координатах преобразование базиса пространства представления изменяет вид матриц генераторов, не меняя их определения как производных оператора поворота по одному из углов.

Итак, возвращаясь от примера с группой поворотов к общему изложению, констатируем, что при рассмотрении вектора состояний в пространстве присоединенного представления

$$\boldsymbol{B} = B^{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu},$$

где $\boldsymbol{e}_\nu$ — это N_G базисных векторов, а B^ν — компоненты вектора в этом базисе, и при введении преобразования базиса обратимой матрицей S

$$\boldsymbol{e}'_{\mu} = S^{\nu}_{\bullet\,\mu}\boldsymbol{e}_{\nu} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{e} \;\mapsto\; \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}\cdot S,$$

имеют место обратимые преобразования как компонент вектора

$$B^{\nu} \;\mapsto\; B'^{\mu} = \left(S^{-1}\right)^{\mu}_{\bullet\,\nu}B^{\nu},$$

так и матриц линейных преобразований компонент векторов присоединенного представления,

$$\mathrm{ad}\Gamma_\alpha \;\mapsto\; S^{-1}\cdot\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\cdot S \quad\Leftrightarrow\quad \left(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\right)^{\mu}_{\bullet\,\nu} \;\mapsto\; \left(\mathrm{ad}\Gamma'_\alpha\right)^{\mu}_{\bullet\,\nu} = \left(S^{-1}\right)^{\mu}_{\bullet\,\mu'}\cdot\left(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\right)^{\mu'}_{\bullet\,\nu'}\cdot S^{\nu'}_{\bullet\,\nu} \tag{II.2.20}$$

где S — $N_G\times N_G$-матрица преобразования базиса в пространстве состояний. Ясно, что такие преобразования оставляют инвариантным значение следа в (II.2.19), и поэтому величина (II.2.19) называется

[32] При дальнейшем рассмотрении представлений алгебры Ли станет ясно, что векторное пространство представления — это конечномерное пространство состояний с ортонормированным базисом, который задается общими собственными векторами попарно коммутирующих операторов из набора наблюдаемых, включающих в себя эрмитовы генераторы. Размерность пространства присоединенного представления равна числу непрерывных параметров (координат) группы Ли. В пространстве представления можно совершать обратимые преобразования базиса, и именно относительно таких замен базиса в пространстве представления метрика Киллинга инвариантна. Другой вопрос — обратимые преобразования координат в группе, например, в окрестности единицы: это преобразования векторов координат в касательном пространстве. Относительно обратимых преобразований векторов координат метрика Киллинга — ковариантный тензор второго ранга. К примеру, если в координатах возле единицы в присоединенном представлении ввести $\Gamma_{\boldsymbol{a}} = (\mathrm{ad}\Gamma_\alpha)\,a^\alpha$ и $\Gamma_{\boldsymbol{b}} = (\mathrm{ad}\Gamma_\beta)\,b^\beta$, то можно рассмотреть величину

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{a}}\Gamma_{\boldsymbol{b}}) = a^\alpha b^\beta \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\cdot\mathrm{ad}\Gamma_\beta) = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta} = g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \tag{II.2.18}$$

которая инвариантна относительно замены базиса координат, а значит, $g_{\alpha\beta}$ — это ковариантный тензор второго ранга на векторах координат в касательном пространстве. Согласно (II.2.18) метрика Киллинга задает скалярное произведение векторов в касательном пространстве.

инвариантной *метрикой Киллинга*. Метрика Киллинга играет важную роль в теории групп Ли, поскольку она, с одной стороны, определяет объект, инвариантный относительно преобразований базиса в пространстве представления, а с другой стороны, является тензором по отношению к обратимым преобразованиям координат группы в касательном пространстве. Метрика Киллинга инвариантна относительно замены базиса пространства состояний присоединенного представления, которое не зависит от преобразования параметров группы. Индексы матрицы Киллинга суть номера параметров группы Ли, которые не связаны с индексами матриц генераторов группы Ли в присоединенном представлении, хоть и совпадают по размерности. Обсудим это специально, так как совпадение размерности порождает типичную ошибку изучающего теорию групп и алгебр Ли в первый раз. Метрика Киллинга задает геометрическую структуру, позволяющую оперировать с индексами тензоров в касательном пространстве, а значит, и с индексами-именами генераторов преобразований в пространстве состояний. Повторим, что след произведения матриц является числом, на которое можно умножать матрицы-генераторы по стандартным правилам умножения матриц на числа: коммутаторы матриц-генераторов $\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha$ с произвольными числами w равны нулю,

$$[w, \mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha] \equiv w\cdot \mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha - \mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha \cdot w = 0,$$

так как результаты умножения матрицы на число справа либо слева совпадают

$$\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha \cdot w = w\cdot \mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha.$$

Поэтому коммутатор матриц-генераторов с каждым элементом метрики Киллинга, который задан как число, равное следу двух матриц-генераторов, тождественно равен нулю,

$$[g_{\alpha\beta}, \mathrm{ad}\,\Gamma_\gamma] = 0,$$

так как индексы элементов матрицы Киллинга суть имена чисел, а не матричные индексы на пространстве представления, являющегося линейной оболочкой базиса нормированных состояний. Если метрика Киллинга, которая есть тензор с двумя ковариантными индексами относительно преобразований параметров группы Ли (а не базиса пространства представления!), невырождена, то можно определить обратную метрику $g^{\alpha\gamma}$, для которой $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Мы будем полагать, во-первых, что метрика Киллинга как симметричная квадратная матрица $N_G \times N_G$ невырождена и поэтому имеет обратную и, во-вторых, положительно определена, т. е. все ее собственные значения положительны. Первое из условий отвечает *критерию Картана полупростоты группы Ли*, а второе — *компактности группы*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением алгебр Ли для полупростых компактных групп Ли[33].

■ **Критерий Картана** о полупростых группах: если группа имеет инвариантную абелеву подгруппу, то метрика Киллинга вырождена, т. е. детерминант матрицы $g_{\alpha\beta}$ равен нулю, $\det\|g_{\alpha\beta}\| = 0$. И обратно, если метрика Киллинга вырождена, то группа имеет инвариантную абелеву подгруппу Ли, а не одну из дискретных или циклических подгрупп. Значит, для того, чтобы группа Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы метрика Киллинга была невырожденной.

Покажем, что наличие инвариантной абелевой подгруппы Ли приводит к вырождению метрики Киллинга. Действительно, пусть $\mathfrak{G}'$ *абелева* подгруппа Ли. Значит, для ее элементов, координаты которых мы обозначаем символами со штрихом вблизи единицы (при $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \to \boldsymbol{0}$), групповое умножение перестановочно и для билинейного преобразования в касательном пространстве $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ приводит к следующему соотношению:

$$g_{a'}\cdot g_{b'} = g_{b'}\cdot g_{a'} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}') \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}') = 0 \quad\Rightarrow\quad [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] = 0,$$

а значит, алгебра абелевой подгруппы коммутативна и ее генераторы коммутируют между собой:

$$[\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}] = 0.$$

Равенство нулю скобки Ли двух векторов означает, что равен нулю коммутатор соответствующих генераторов, так как для представления группы $T(\mathfrak{G}) = G$ согласно (II.2.5)

$$[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] = 0 \overset{T}{\mapsto} \Gamma_{[a',b']} = \Gamma_\mu\,[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}']^\mu = \Gamma_\mu\, f^\mu_{\alpha'\beta'}(a')^{\alpha'}(b')^{\beta'} = -\mathrm{i}\Gamma_\mu\,(\mathrm{i}f^\mu_{\alpha'\beta'})(a')^{\alpha'}(b')^{\beta'} = -\mathrm{i}[\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}](a')^{\alpha'}(b')^{\beta'} = 0.$$

[33] Положительная определенность метрики Киллинга позволяет задать евклидово скалярное произведение векторов в касательных пространствах элементов группы Ли $\mathfrak{G}$: см. сноску 32 на стр. 76. Координаты этих векторов являются групповыми координатами универсальной накрывающей группы $U_\mathfrak{G}$ (см. описание экспоненциального представления группы в разделе **4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы** главы 2), область изменения которых может быть ограничена, раз в координатном пространстве определена евклидова метрика. При этом следует задать значение элемента группы на границах:

$$\forall \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0},\ \exists k \in \mathbb{R}:\ |k| < +\infty, \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{bord}} = k\cdot \boldsymbol{a}, \quad g_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{bord}}} = e,$$

т. е. на границе компактной области координат группы элемент группы равен единичному. Если условие ограниченности на множество координат нарушено, то получится некомпактная группа Ли с положительно определенной метрикой Киллинга. Пример такой ситуации дают так называемые модули Верма, которые мы не рассматриваем в этом курсе.

Следовательно, структурные константы с двумя нижними индексами, которые относятся к касательному пространству абелевой подгруппы, обращаются в нуль, как для координат в подгруппе (индексы со штрихом, например, γ'), так и для координат вне этой подгруппы (индексы с двумя штрихами, например, γ'')

$$f^{\mu}_{\alpha'\beta'} = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = 0, \quad f^{\gamma''}_{\alpha'\beta'} = 0. \tag{II.2.21}$$

Такое введение индексов с одним и двумя штрихами означает, что метрика Киллинга имеет блочный вид

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha'\beta'} & g_{\alpha'\beta''} \\ \hline g_{\alpha''\beta'} & g_{\alpha''\beta''} \end{array}\right). \tag{II.2.22}$$

Пусть теперь $\mathfrak{G}'$ — *инвариантная* подгруппа: см. определение в (II.1.4). Тогда внутренний автоморфизм ее элементов в окрестности единицы, когда элемент g_a лежит вне подгруппы[34],

$$g_a^{-1} \cdot (g_{c'} \cdot g_a) \overset{\text{tangent}}{=} g_a^{-1} \cdot g_a \cdot g_{c'} \cdot g_{[c',a]} = g_{c'} \cdot g_{[c',a]}$$

также принадлежит этой абелевой подгруппе, т. е. с учетом перехода от элементов группы Ли к элементам алгебры Ли запишем

$$g_{c'} \cdot g_{[c',a]} = g_{b'} \quad \Rightarrow \quad g_{[c',a]} = g_{c'}^{-1} \cdot g_{b'} = g_{\tilde{b}'} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{b}}' = [\boldsymbol{c}', \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{f}_{\alpha'\nu}(c')^{\alpha'} a^{\nu}. \tag{II.2.23}$$

Подчеркнем, что в последнем выражении индекс ν может относиться как к касательному пространству инвариантной подгруппы, так и к касательному пространству вне этой подгруппы.

В математической литературе алгебры и группы рассматриваются по отдельности, так что аналогом инвариантной подгруппы Ли является понятие инвариантной подалгебры Ли $\mathfrak{A}'$ в алгебре $\mathfrak{A}$, которое эквивалентно понятию идеала $\mathfrak{A}'$. Приведем определение идеала: $\mathfrak{A}'$ — идеал, если $\forall \boldsymbol{c}' \in \mathfrak{A}', \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}$ скобка Ли $[\boldsymbol{c}', \boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}'] = \boldsymbol{b}' \in \mathfrak{A}'$.

Итак, инвариантность подгруппы согласно (II.2.23) означает, что алгебра инвариантной подгруппы является идеалом в алгебре Ли, и

$$f^{\gamma''}_{\alpha'\nu} = 0. \tag{II.2.24}$$

Тогда в метрике Киллинга блок с индексами абелевой инвариантной подгруппы обращается в нуль $g_{\alpha'\beta'} = 0$. Покажем это. Согласно определению элементов метрики Киллинга (II.2.19)

$$g_{\alpha'\beta'} = -f^{\nu}_{\alpha'\mu} f^{\mu}_{\beta'\nu},$$

а индекс ν в константах $f^{\nu}_{\alpha'\mu}$, если эти константы отличны от нуля, согласно (II.2.24) может принимать только штрихованные значения γ', и индекс μ в константах $f^{\mu}_{\beta'\nu}$ точно также только штрихованные значения ι', а значит,

$$g_{\alpha'\beta'} = -f^{\nu}_{\alpha'\mu} f^{\mu}_{\beta'\nu} = -f^{\gamma'}_{\alpha'\iota'} f^{\iota'}_{\beta'\gamma'}.$$

Но $f^{\gamma'}_{\alpha'\iota'} = 0$ и $f^{\iota'}_{\beta'\gamma'} = 0$ в силу того, что подгруппа абелева и имеет место (II.2.21). То же верно и для недиагональных элементов со смешанными индексами, $g_{\alpha'\beta''} = 0$, так как согласно определению элементов метрики Киллинга (II.2.19)

$$g_{\alpha'\beta''} = -f^{\nu}_{\alpha'\mu} f^{\mu}_{\beta''\nu}.$$

Индекс ν в константах $f^{\nu}_{\alpha'\mu}$, если эти константы отличны от нуля, согласно (II.2.24) может принимать только штрихованные значения γ':

$$g_{\alpha'\beta''} = -f^{\nu}_{\alpha'\mu} f^{\mu}_{\beta''\nu} = -f^{\gamma'}_{\alpha'\mu} f^{\mu}_{\beta''\gamma'}.$$

Отсюда следует, что индекс μ в константах $f^{\mu}_{\beta''\gamma'}$ принимает только штрихованные значения ι' в силу того, что это свойство идеала, а значит,

$$g_{\alpha'\beta''} = -f^{\gamma'}_{\alpha'\iota'} f^{\iota'}_{\beta''\gamma'} = 0,$$

так как в силу абелевости подгруппы Ли имеет место (II.2.21), и $f^{\gamma'}_{\alpha'\iota'} = 0$. Итак, в матрице метрики есть хотя бы один нулевой столбец или строка $g_{\alpha'\mu} = 0$ в силу симметричности метрики по перестановке индексов,

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & g_{\alpha''\beta''} \end{array}\right). \tag{II.2.25}$$

Это значит, что ее детерминант обращается в нуль.

[34] Если элемент внутреннего автоморфизма g_a принадлежит подгруппе, то образ автоморфизма принадлежит подгруппе в силу самого понятия подгруппы, и утверждение об образе такого автоморфизма становится элементарным. Мы этот случай уже рассмотрели чуть выше.

Верно и обратное утверждение[35], которое дает необходимое условие полупростоты группы: если детерминант $\det\|g_{\alpha\beta}\| = 0$ обращается в нуль, то алгебра содержит нетривиальный абелев идеал, а значит, группа не является полупростой, т. е. невырожденность метрики Киллинга является необходимой для полупростоты группы. В этом случае ранг матрицы Киллинга $r < N_G$, и после линейных преобразований можно обратить в нуль $N_G - r$ столбцов и симметричных им строк[36] в метрике Киллинга. Отсюда можно показать, что имеются $N_G - r$ генераторов, которые образуют алгебру инвариантной подгруппы[37], т. е. идеал, с нулевой метрикой Киллинга. Факт нулевой метрики Киллинга в идеале $\mathfrak{A}'$ позволяет установить так называемую *разрешимость* этой инвариантной подалгебры: образ скобки Ли двух произвольных элементов подалгебры сам является подалгеброй меньшей размерности $\mathfrak{A}''$ или, как пишут $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = \mathfrak{A}''$, причем эту редукцию подалгебр в силу нулевой метрики Киллинга в подалгебре $\mathfrak{A}'$ можно продолжить до тех пор, пока не будет достигнут последний шаг, при котором $[\mathfrak{A}'^{\cdots'}, \mathfrak{A}'^{\cdots'}] = 0$, а значит, на этом шаге редукции алгебр[38] возникает как раз абелева подалгебра $\mathfrak{A}'^{\cdots'}$, т. е. в терминах элементов группы имеется абелева инвариантная подгруппа.

Алгебра вложений $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}'' = [\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] \supset \ldots \supset \mathfrak{A}'^{\cdots'}$ с $[\mathfrak{A}'^{\cdots'}, \mathfrak{A}'^{\cdots'}] = 0$ называется разрешимой. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется нильпотентной, если для любого набора из M ее элементов M-кратный коммутатор обращается в нуль $[\mathfrak{a}_1, [\mathfrak{a}_2, \ldots [\mathfrak{a}_{M-1}, \mathfrak{a}_M] \ldots]] = 0$, а в присоединенном представлении элементы этих алгебр реализуются в виде верхнетреугольных матриц. Нильпотентные алгебры разрешимы. Нильпотентность идеала $\mathfrak{A}'$ в случае нулевой метрики Киллинга доказывается в математических курсах. Более общий взгляд на алгебры Ли, чем рассмотрение алгебр с обратимой метрикой Киллинга, которому мы следуем в этой книге, предполагает введение разбиения Фиттинга всех генераторов алгебры Ли $\mathfrak{A}$ на два класса: нильпотентные генераторы и их корневое дополнение, понятие о котором будет введено нами позже. Заинтересованного читателя мы отсылаем к разделу **2.4 Веса присоединенного представления** главы 3, **§ 2. Неприводимые представления**, где мы сделали специальный комментарий по вопросу о разложении Фиттинга после описания корней присоединенного представления простой компактной группы Ли. ∎

За счет линейных преобразований в касательном пространстве координат группы Ли, относительно которых метрика — это ковариантный тензор второго ранга, можно сначала преобразовать матрицу метрики Киллинга[39] к диагональному виду с положительными матричными элементами, а потом за счет смены масштаба групповых координат добиться того, чтобы метрика Киллинга оказалась бы пропорциональной единичной матрице[40], $g_{\alpha\beta} = \Omega^2\delta_{\alpha\beta}$, $\Omega^2 > 0$.

Задача 18. Вычислите метрику Киллинга в группе поворотов трехмерного евклидова пространства.

Решение. Для группы поворотов структурные константы задаются тензором Леви-Чивиты,

$$f^{\gamma}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'}\mathbb{1}^{\gamma'\gamma}, \tag{II.2.26}$$

где $\mathbb{1}^{\gamma'\gamma}$ — это обратная метрика евклидова пространства $g_{\mathbb{E}}^{\gamma'\gamma}$ в декартовом базисе. Так как с этой метрикой нет различий между верхними и нижними индексами, а

$$(\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)^{\gamma}_{\bullet\,\mu} = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\mu\gamma'}\mathbb{1}^{\gamma'\gamma}, \tag{II.2.27}$$

то, заметив, что верхний индекс структурных констант эквивалентен третьему по счету индексу символа Леви–Чивиты, вычислим метрику Киллинга согласно (II.2.19)

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = -f^{\gamma}_{\alpha\mu}f^{\mu}_{\beta\gamma} &= \left\langle \text{эквивалентиность верхних индексов } \gamma \text{ и } \mu \text{ нижним в декартовом базисе} \right\rangle = \\ &= -\epsilon_{\alpha\mu\gamma}\epsilon_{\beta\gamma\mu} = \left\langle \text{перестановка индексов } \gamma \leftrightarrow \mu \text{ во втором символе Леви-Чивиты} \right\rangle = \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\gamma}\epsilon_{\beta\mu\gamma} = 2\,\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

В итоге, в группе поворотов метрика Киллинга имеет конформно евклидов вид

$$g_{\alpha\beta} = 2\cdot\mathbb{1}_{\alpha\beta}. \tag{II.2.28}$$

[35] Читатель может самостоятельно разобрать доказательство этого неочевидного факта, представленного в ставшими классическими учебниках [5, 8].

[36] Столбец и строка симметричны, когда они пересекаются на диагонали матрицы.

[37] Скалярное произведение любого элемента алгебры $\mathfrak{A}$ на элемент подалгебры $\mathfrak{A}'$, образованной $n' = N_G - r$ генераторами, которые отвечают нулевым строкам и столбцам метрики Киллинга, равно нулю. Поэтому для любого коммутатора элементов алгебры, который также является элементом алгебры Ли,

$$\mathrm{tr}\left([\mathrm{ad}\,\boldsymbol{x}, \mathrm{ad}\,\boldsymbol{y}]\cdot\mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}'\right) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{A},\ \forall \boldsymbol{a}' \in \mathfrak{A}',$$

а так как справедливо равенство следов

$$\mathrm{tr}\left([\mathrm{ad}\,\boldsymbol{x}, \mathrm{ad}\,\boldsymbol{y}]\cdot\mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}'\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{x}\cdot[\mathrm{ad}\,\boldsymbol{y}, \mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}']\right) = 0,$$

то мы заключаем, что элемент алгебры $[\mathrm{ad}\,\boldsymbol{y}, \mathrm{ad}\,\boldsymbol{a}'] \in \mathfrak{A}'$, поскольку он ортогонален любому элементу алгебры Ли, а именно так и определялась подалгебра $\mathfrak{A}'$. Следовательно, $\mathfrak{A}'$ — идеал. А идеал — это алгебра инвариантной подгруппы Ли.

[38] Этот шаг редукции может оказаться и первым, если $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = 0$, т. е., если исходный идеал абелев.

[39] В математике формой Киллинга называют инвариант, построенный из метрики и двух контр-векторов, $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$.

[40] Величину $\Omega \in \mathbb{R}$ называют масштабным или конформным фактором, а саму метрику конформно эквивалентной евклидовой метрике или просто конформно евклидовой метрикой.

Метрика Киллинга позволяет опускать индексы, а обратная к ней поднимать их (если метрика — единичная матрица, которая совпадает со своей обратной матрицей, то нет отличия между верхними и нижними индексами). Вычислим, например,

$$\mathrm{tr}\,([\mathrm{ad}\Gamma_\alpha, \mathrm{ad}\Gamma_\beta]\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma) = \mathrm{i} f^\mu_{\alpha\beta}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\mu\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma) = \mathrm{i} f^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} \equiv \mathrm{i} f_{\alpha\beta|\gamma}. \tag{II.2.29}$$

Подчеркнем, что по договоренности в (II.2.29) опущенный с помощью метрики $g_{\mu\gamma}$ индекс μ структурных констант $f^\mu_{\alpha\beta}$ располагается последним среди нижних индексов[41], $f_{\alpha\beta|\gamma}$. С другой стороны, пользуясь равенством

$$\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma = \mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta + \mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,[\mathrm{ad}\Gamma_\beta, \mathrm{ad}\Gamma_\gamma],$$

выражением для коммутатора

$$[\mathrm{ad}\Gamma_\beta, \mathrm{ad}\Gamma_\gamma] = \mathrm{i}\, f^\mu_{\beta\gamma}\,\mathrm{ad}\Gamma_\mu$$

и аналогичными преобразованиями для произведения $\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma$, получим с учетом определения метрики Киллинга как следа произведения генераторов в присоединенном представлении (II.2.19)

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma) &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta) + \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,[\mathrm{ad}\Gamma_\beta, \mathrm{ad}\Gamma_\gamma]) = \\
&= \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta) + \mathrm{i}\, f^\mu_{\beta\gamma}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\mu) = \\
&= \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta) + \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\gamma}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\mu\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta) + \mathrm{i}\, f^\mu_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\mu} = \\
&= \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta) + \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\gamma}\, g_{\mu\beta} + \mathrm{i}\, f^\mu_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\mu}.
\end{aligned}$$

Учитывая равенство двух следов в начале и в конце цепочки этих равенств (порядок следования матриц в их произведении при взятия следа можно изменять циклически)

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta\,\mathrm{ad}\Gamma_\gamma) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\gamma\,\mathrm{ad}\Gamma_\alpha\,\mathrm{ad}\Gamma_\beta),$$

находим соотношение на структурные константы

$$f^\mu_{\alpha\gamma}\, g_{\mu\beta} + f^\mu_{\beta\gamma}\, g_{\mu\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{\alpha\gamma|\beta} + f_{\beta\gamma|\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{\alpha\gamma|\beta} = -f_{\beta\gamma|\alpha} \quad \Rightarrow \quad -f_{\gamma\alpha|\beta} = f_{\gamma\beta|\alpha}.$$

Структурные константы с тремя нижними индексами оказались антисимметричными по перестановке первого и третьего индексов и в силу их антисимметричности по перестановке первых двух также антисимметричными по перестановке второго и третьего индексов. В итоге, структурные константы с индексами одного типа, только всеми нижними или только всеми верхними, являются полностью антисимметричными, т. е. они меняют знак при перестановке любой пары индексов. Поэтому при записи структурных констант простой компактной группы Ли не указывают разделитель трех ковариантных индексов

$$f_{\alpha\beta\gamma} \equiv f_{\alpha\beta|\gamma}.$$

Если метрика Киллинга группы невырождена и положительно определена, а параметры группы выбраны так, что метрика Киллинга диагональна и пропорциональна евклидовой метрике, то полностью антисимметричны и структурные константы как матрица (имеются в виду $f^\gamma_{\alpha\beta}$ с одним верхним индексом, например, $f^{(3)}_{(12)} = -f^{(2)}_{(13)}$), как мы видели это на примере структурных констант группы поворотов.

При выборе параметров группы такими, что метрика Киллинга становится единичной матрицей, отличие между нижними и верхними индексами исчезает. Тогда в общем случае с помощью метрики можно провести операцию опускания индексов, т. е. переход от контравекторных величин к ковекторным, для того, чтобы определить матрицы генераторов в присоединенном представлении с нижними индексами

$$(\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)^\mu_{\bullet\,\beta} g_{\mu\gamma} \equiv (\mathrm{ad}\,\Gamma_\alpha)_{\gamma\beta} = \mathrm{i} f^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} = \mathrm{i}\, f_{\gamma|\alpha\beta}.$$

Отметим, что в последней формуле при опускании верхнего индекса матрицы в присоединенном представлении мы записали опущенный матричный индекс первым, чтобы сохранить порядок следования

[41] Такая договоренность обусловлена традицией записывать все индексы снизу в случае группы преобразований координат евклидова пространства в декартовых координатах, поскольку евклидова метрика в таких координатах $g^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta}$ равна единичной матрице $g^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}$, так что для компонент генераторов группы поворотов $\hat{l}_\alpha$ их коммутаторы вместо формы записи $[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\hat{l}_\gamma$ приводят в виде $[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{l}_\gamma$, т. е. так, как будто верхний индекс γ был опущен на последнее место в тензоре Леви-Чивиты с помощью метрики евклидова пространства в декартовых координатах. Здесь же отметим также, что в группе поворотов евклидова метрика в декартовых координатах не совпадает с метрикой Киллинга, которая отличается от евклидовой конформным фактором, равным двум.

нумерации строк μ и столбцов β матриц генераторов после опускания индекса $\mu \mapsto \gamma$ (сначала матричный индекс γ, а потом матричный индекс β). В силу антисимметричности структурных констант с индексами одного типа по перестановке любой пары индексов две последовательных перестановки не изменяют значения структурных констант,

$$f_{\gamma|\alpha\beta} = f_{\alpha\beta|\gamma} = f_{\alpha\beta\gamma},$$

а значит, опущенный индекс можно записать первым, а не последним, как мы это делали в определении (II.2.29) (см. также сноску 41 на стр. 80).

Для нас существенным результатом является тот факт, что матрицы генераторов, выраженные через структурные константы $f_{\alpha\beta\gamma}$, являются эрмитово самосопряженными: перестановка порядка следования матричных индексов при транспонировании дает знак минус, а комплексное сопряжение переводит мнимую единицу в $\mathrm{i}^* = -\mathrm{i}$. Подчеркнем при этом, что структурные константы группы Ли являются вещественными, потому что они построены из преобразований вещественных координат в вещественные координаты, так что

$$\{(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)_{\beta\gamma}\}^\dagger = \mathrm{i}^*\, f_{\gamma\alpha\beta} = \mathrm{i}\, f_{\beta\alpha\gamma} = (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)_{\beta\gamma}. \tag{II.2.30}$$

Можно убедиться в том, что для метрики Киллинга, пропорциональной евклидовой метрике, генератор алгебры Ли в присоединенном представлении с одним верхним и одним нижним индексами (имя генератора — отдельный символ) также является эрмитово самосопряженным как матрица.

Ниже в разделе **4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы** главы 2 мы рассмотрим экспоненциальное представление элементов универсальной обертывающей группы и покажем, что матрицы генераторов алгебры Ли в точных представлениях компактных групп Ли эрмитовы. Подчеркнем однако, что линейными преобразованиями на пространстве генераторов можно перейти к такому набору генераторов, в котором некоторые генераторы станут неэрмитовыми. Таким набором является базис Картана-Вейля, который построен в **§ 3. Базис Картана–Вейля** этой главы 2.

Антисимметричность структурных констант гарантирует, что след генератора полупростой группы Ли обращается в нуль,

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_\alpha) = \mathrm{i}\, f^\mu_{\alpha\mu} = \mathrm{i}\, f_{\alpha\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \tag{II.2.31}$$

где мы учли, что свертка антисимметричного по перестановкам «немых» индексов $\mu \leftrightarrow \nu$ символа $f_{\alpha\mu\nu} = -f_{\alpha\nu\mu}$ с симметричным тензором обратной метрики $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ тождественно равна нулю. Таким образом, *сумма вещественных собственных значений эрмитово самосопряженного генератора полупростой компактной группы Ли с учетом вырождения каждого собственного значения*[42] *равна нулю.* В самом деле, так как генератор — это эрмитова матрица, можно в пространстве состояний (представления) перейти к *базису ортонормированных собственных векторов* этой матрицы. Тогда в базисе своих собственных векторов матрица диагональна, и на диагонали стоят её собственные значения, причем каждое собственное значение встречается столько раз, сколько собственных векторов соответствует этому собственному значению (число собственных векторов для выбранного собственного значения называется кратностью вырождения собственного значения). Тогда сумма собственных значений по полной системе базисных состояний в пространстве представления и есть след матрицы генератора. Напомним, что вывод о равенстве нулю суммы собственных значений генератора справедлив для любой полупростой компактной алгебры Ли в силу невырожденности метрики Киллинга и наличия у нее обратной метрики с двумя верхними индексами.

С другой стороны, след матрицы, действующей на пространстве состояний, инвариантен относительно замены базиса состояний (II.2.20), так что вычисление следа в любом базисе как раз и дает сумму собственных значений.

Утверждение о равенстве нулю следа генератора справедливо в любом точном представлении, а не только в присоединенном. Для доказательства рассмотрим след произведения матриц в неприводимом представлении $T_R(\mathfrak{G})$, которое может отличаться от присоединенного представления ad,

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)_R = \mathrm{tr}\,(\Gamma_\beta\Gamma_\alpha)_R \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta - \Gamma_\beta\Gamma_\alpha)_R = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tr}\,([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta])_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta} \mathrm{tr}\,(\Gamma_\gamma)_R = 0, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Пусть существует отличный от нуля ковектор $b_\gamma = \mathrm{tr}\,(\Gamma_\gamma)_R$, который в силу своего определения не меняется при замене базиса векторного пространства представления, аналогичной описанной в формулах (II.2.20). Инвариантен потому, что является следом матрицы, т. е. скаляром относительно замен базиса в пространстве состояний, так как при таких заменах матрицы генераторов ведут себя как тензоры с одним контравекторным и одним ковекторным индексами. След такого тензора при замене базиса с помощью обратимой матрицы S остается неизменным: $\mathrm{tr}\,(S\,\Gamma S^{-1})_R = \mathrm{tr}\,(\Gamma)_R$. Выведенное нами выше

[42] Суммирование ведется по базису ортонормированных собственных состояний представления.

условие равенства нулю следа коммутатора генераторов в любом точном представлении запишется в виде

$$\mathrm{i}f^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathrm{tr}\,(\Gamma_\gamma)_R=0,\ \forall\alpha,\beta\quad\Rightarrow\quad f^{\gamma}_{\alpha\beta}\,b_\gamma=0,\ \forall\alpha,\beta.$$

Рассмотрим алгебру Ли с невырожденной метрикой Киллинга, т. е. случай, когда определена обратная метрика и операция поднимания индекса. Тогда можно ввести контравариантный вектор $b^\gamma=g^{\gamma\gamma'}b_{\gamma'}$ и генератор $\Gamma_b=\Gamma_\gamma b^\gamma$, а затем вычислить коммутатор

$$[\Gamma_b,\Gamma_\alpha]=[\Gamma_\gamma b^\gamma,\Gamma_\alpha]=\mathrm{i}f^{\beta'}_{\gamma\alpha}\Gamma_{\beta'}\,b^\gamma=\mathrm{i}f^{\beta'}_{\gamma\alpha}g_{\beta'\beta}\Gamma^\beta\,b^\gamma=\mathrm{i}f_{\gamma\alpha\beta}\Gamma^\beta\,b^\gamma=$$
$$=\langle\text{две перестановки индекса }\gamma\rangle=\mathrm{i}f_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^\beta\,b^\gamma=\mathrm{i}f^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^\beta\,b_\gamma=0,\quad\forall\alpha.\quad\text{(II.2.32)}$$

Отсюда заключаем, что Γ_b коммутирует со всеми другими генераторами и, следовательно, — это генератор в инвариантной абелевой подгруппе. Однако в полупростой компактной группе нет инвариантных абелевых подгрупп. Поэтому построенный с помощью ковектора b_γ генератор Γ_b может быть равен только нулю, а это значит, что сам ковектор $b_\gamma=0$, т. е.

$$b_\gamma=\mathrm{tr}\,(\Gamma_\gamma)_R=0.\qquad\text{(II.2.33)}$$

Итак, сумма собственных значений генератора полупростой компактной группы Ли равна нулю в любом представлении. С точки зрения физики собственные значения такого генератора — это значения наблюдаемой физической величины в ее собственных квантовых состояниях для системы, пространство состояний которой описывается представлением R группы Ли. Раз эти собственные значения принадлежат вполне определенному дискретному множеству как для заданного представления, так и для других представлений, говорят, что наблюдаемая величина квантуется, а сумма значений – квантов наблюдаемой величины в каждом представлении физической системы равна нулю. Это свойство неочевидно и очень важно в физических моделях и теориях. Например, система может допускать описание своих свойств как симметрии в рамках полупростой компактной группы Ли, только если сумма зарядов различных состояний системы равна нулю, когда эти заряды трактуются как собственные значения некоторой наблюдаемой[43].

Соотношение (II.2.32) можно сформулировать и в терминах группового умножения: композиция элемента группы в координатах касательного пространства с элементом с координатой

$$b^\gamma=g^{\gamma\gamma'}\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\gamma'})_R\qquad\text{(II.2.34)}$$

выражается через композицию элементов, координата одного из которых задается как раз скобкой Ли с выделенным особым вектором $\boldsymbol{b}$ так, что

$$g_b\cdot g_a\overset{\text{tangent}}{=}g_a\cdot g_b\cdot g_{[b,a]},$$
$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]^\beta=b^\gamma a^\alpha f^{\beta}_{\gamma\alpha}=b^\gamma a^\alpha f_{\gamma\alpha\beta'}g^{\beta'\beta}=g^{\beta'\beta}a^\alpha b^\gamma f_{\alpha\beta'\gamma}=g^{\beta'\beta}a^\alpha b_\gamma f^{\gamma}_{\alpha\beta'}=0,\quad\Leftrightarrow$$
$$-\,\mathrm{i}\,b^\gamma a^\alpha\,\mathrm{i}f^{\beta}_{\gamma\alpha}\Gamma_\beta=-\mathrm{i}\,b^\gamma a^\alpha[\Gamma_\gamma,\Gamma_\alpha]=-\mathrm{i}\,a^\alpha[\Gamma_b,\Gamma_\alpha]=-\mathrm{i}\,[\Gamma_b,\Gamma_a]=0\quad\Rightarrow$$
$$g_{[b,a]}=e\quad\Rightarrow\quad g_b\cdot g_a=g_a\cdot g_b,$$

т. е. все элементы группы перестановочны с g_b, а значит, и со всеми элементами с координатами вдоль направления $\boldsymbol{b}$, что и определяет инвариантную абелеву подгруппу Ли с координатами $\boldsymbol{b}(c)=c\cdot\boldsymbol{b}$, что недопустимо для полупростых компактных групп Ли.

В этих построениях мы опирались на равенства в окрестности групповой единицы, т. е. для касательного пространства координат. Для того, чтобы делать точные утверждения для элементов вне рамок бесконечно малых преобразований, необходимо ввести экспоненциальное представление групповых элементов, построенное по представлению алгебры Ли. Эта конструкция подробно описывается в главе 2, **§ 4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина**, раздел **4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы** на стр. 107. Итого: в любом точном представлении в полупростой компактной группе Ли вектор, инвариантный относительно замены базиса представления, всегда равен нулю. Заметим, что след любой линейной суперпозиции генераторов также обращается в нуль.

Другими словами, в полупростой алгебре Ли нет инвариантных не равных нулю векторов в касательном пространстве: вектор $\boldsymbol{b}$ касательного пространства возле единицы группы является инвариантным относительно замены базиса представления, если для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ из касательного пространства скобка Ли $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\equiv 0$, т. е. действие внутреннего автоморфизма $g_a\cdot g\cdot g_a^{-1}$ на элемент группы $g=g_b$ с координатами, равными инвариантному вектору, оставляет g_b неизменным. Отсюда сразу следовало бы, что в группе существует однопараметрическая абелева инвариантная подгруппа, что противоречит условию рассмотрения полупростых групп.

[43] Пример подобной гипотезы мы рассмотрим при изучении спинорных частиц первого поколения Стандартной модели в главе 3, **§ 7. Генераторы, токи, составные состояния и калибровочная гипотеза**.

2.3 Операторы Казимира

Роль метрики Киллинга является важной и при построении однородного полинома второго порядка по степеням генераторов, который называется квадратичным оператором Казимира. Операторы Казимира степени k мы определяем как однородные полиномы по генераторам алгебры Ли со степенью однородности k и с такими коэффициентами, что оператор Казимира коммутирует с любым из генераторов алгебры Ли. Такие операторы, отличные от нуля, существуют для полупростых компактных групп Ли и могут быть явно построены по схеме, схожей с той, что мы сейчас опишем на примере квадратичного оператора Казимира. Квадратичный оператор Казимира в силу коммутативности со всеми генераторами и эрмитовости — физическая величина, которую можно включить в полный набор наблюдаемых квантовой системы наряду с частью генераторов. Итак, покажем, что однородный оператор[44] второй степени

$$\hat{C}_2 \equiv g^{\alpha\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'}g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}\Gamma^{\beta'} \tag{II.2.35}$$

коммутирует с любым из генераторов групповых преобразований, т. е.

$$[\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] = 0. \tag{II.2.36}$$

Эрмитовость так определенного оператора Казимира читатель может показать самостоятельно.

Задача 19. Докажите, что коммутатор

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \tag{II.2.37}$$

Решение. Раскроем определение коммутатора

$$[A, BC] = ABC - BCA$$

и добавим справа специально подобранный нуль

$$0 = -BAC + BAC,$$

так что

$$[A, BC] = ABC - BCA - BAC + BAC = (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C].$$

Пользуясь формулой (II.2.37), вычислим коммутатор генератора с квадратичным оператором Казимира и воспользуемся метрикой для опускания индексов, а также обратной метрикой для поднимания индексов так, что

$$\begin{aligned}[\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] = g^{\alpha\beta}[\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha\Gamma_\beta] = g^{\alpha\beta}\big([\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]\Gamma_\beta + \Gamma_\alpha[\Gamma_\gamma, \Gamma_\beta]\big) = g^{\alpha\beta}\big(\mathrm{i}f^\mu_{\gamma\alpha}\Gamma_\mu\Gamma_\beta + \mathrm{i}f^\mu_{\gamma\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\mu\big) = \\ = g^{\alpha\beta}\big(\mathrm{i}f_{\gamma\alpha\mu}\Gamma^\mu\Gamma_\beta + \mathrm{i}f_{\gamma\beta\mu}\Gamma_\alpha\Gamma^\mu\big) = \mathrm{i}f_{\gamma\alpha\mu}\Gamma^\mu\Gamma^\alpha + \mathrm{i}f_{\gamma\beta\mu}\Gamma^\beta\Gamma^\mu = \mathrm{i}f_{\gamma\alpha\mu}\big(\Gamma^\mu\Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha\Gamma^\mu\big),\end{aligned} \tag{II.2.38}$$

где в последнем равенстве мы заменили немой индекс β на немой индекс α. Получилась свертка симметричного по перестановкам «немых» индексов μ и α выражения $\Gamma^\mu\Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha\Gamma^\mu$ с антисимметричными по перестановкам тех же «немых» индексов структурными константами $f_{\gamma\alpha\mu}$. Такая свертка тождественно равна нулю, и это значит, что построенный с помощью метрики Киллинга квадратичный оператор коммутирует с генераторами полупростой компактной группы Ли (II.2.36) и является таким образом оператором Казимира второй степени.

Для примера в группе поворотов $g_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$, и

$$\hat{C}_2 = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\jmath}^2,$$

т. е. квадратичный оператор Казимира пропорционален квадрату момента вращения.

Другие инвариантные величины — операторы Казимира высших степеней могут быть сконструированы аналогичным образом: необходимо построить с помощью следа k матриц генераторов в присоединенном представлении симметризованный[45] многокомпонентный следовый тензор[46] ранга k в присоединенном представлении

$$g_{\alpha_l\ldots\alpha_k} = \mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\ldots\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_k}) \tag{II.2.39}$$

[44] Генераторы с верхними координатными индексами получаются с помощью обратной метрики: $\Gamma^\alpha = g^{\alpha\alpha'}\Gamma_{\alpha'}$.

[45] Антисимметричный по какой-либо паре вклад тут же сводится к коммутатору, который выражается через линейную комбинацию генераторов, а значит, этот член выражается через величину g с меньшим числом индексов.

[46] Операция $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$ означает, что мы берем сумму следов от композиции генераторов в присоединенном представлении при всех перестановках генераторов, а затем делим эту сумму на число перестановок.

и соответствующий ему однородный по генераторам многочлен степени k

$$\hat{C}_k = g_{\alpha_l \ldots \alpha_k}\, \Gamma^{\alpha_1} \ldots \Gamma^{\alpha_k}. \tag{II.2.40}$$

Так же, как и в случае квадратичного оператора, построенного с метрикой Киллинга, все операторы k-того порядка, построенные как однородные по генераторам алгебры Ли полиномы с помощью симметризованных следовых тензоров ранга k, коммутируют со всеми генераторами алгебры Ли[47] и, следовательно, являются операторами Казимира. Более того, операторы Казимира коммутируют и между собой, поскольку составлены из генераторов, а любой из генераторов перестановочен с операторами Казимира. Принято говорить, что линейные комбинации инвариантов Казимира составляют центр алгебры Ли[48]. В центре алгебры Ли произвольный оператор Казимира, как станет понятно при дальнейшем изложении, выражается в виде полинома от ограниченного набора операторов Казимира. Этот ограниченный набор может включать в себя минимальное количество операторов Казимира, которые называются образующими центра алгебры Ли. Выбор образующих неоднозначен, но число образующих центр алгебры операторов Казимира оказывается равным рангу группы Ли. При таком видении центра алгебры Ли имеет смысл говорить о том, что образующие центра алгебры Ли — это независимые операторы Казимира, а операторы Казимира вне множества образующих центра алгебры Ли являются зависимыми инвариантами[49]. Обратим внимание на то, что вычисление в присоединенном представлении метрики Киллинга и других следовых тензоров $g_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$, если они отличны от нуля, позволяет строить скаляры, сворачивая следовой симметризованный тензор с контравариантными генераторами вида $\Gamma^{\alpha_1} = g^{\alpha_1\alpha_1'}\Gamma_{\alpha_1'}$, чтобы получить инвариант, т. е. величину без индексов, по отношению к линейным преобразованиям в касательном пространстве возле групповой единицы. Эти скаляры — однородные полиномы разных степеней k по генераторам и есть операторы Казимира $\hat{C}_k$, и они инвариантны относительно указанных нами линейных преобразований. Среди линейных преобразований есть те, что порождаются внутренними автоморфизмами

$$\mathrm{Aut}_{g_b}(\hat{C}_k) = G_{\boldsymbol{b}} \cdot \hat{C}_k \cdot G_{\boldsymbol{b}}^{-1} \overset{b\to 0}{=} \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_b\big) \cdot \hat{C}_k \cdot \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_b\big) \overset{b\to 0}{=} \hat{C}_k - \mathrm{i}\big[\Gamma_b, \hat{C}_k\big].$$

азование, порожденное внутренним автоморфизмом, не изменяло оператор Казимира, нужно, чтобы скалярные операторы $\hat{C}_k$ коммутировали со всеми генераторами группы Ли

$$\big[\Gamma_b, \hat{C}_k\big] = 0. \tag{II.2.41}$$

Важно отметить, что в силу симметричности тензоров $g_{\alpha_l\ldots\alpha_k}$ оператор Казимира степени k является эрмитово самосопряженным, и, следовательно, независимые операторы Казимира и коммутирующие между собой эрмитовы генераторы обладают совместным базисом собственных векторов в пространстве представления. Векторное пространство представления называется инвариантным, если для любого ненулевого элемента этого пространства линейная оболочка, построенная из образов действия на этот элемент всех элементов группы, совпадает с самим этим пространством. Пространство представления называется неприводимым, если оно включает в себя единственное инвариантное подпространство, совпадающее с пространством представления, т. е., если в пространстве представления нет других, отличных от пространства представления инвариантных подпространств. Базисные векторы представления с различными собственными значениями оператора Казимира ортогональны, а в силу инвариантности операторов Казимира действие операторов группы на базисные состояния пространства представления с одним и тем же собственным значением оператора Казимира не меняет это собственное значение оператора Казимира. Поэтому состояния с разными собственными значениями оператора Казимира образуют разные инвариантные подпространства представления. Следовательно, все состояния неприводимого представления являются собственными для оператора Казимира с одним и тем же собственным

[47] Мы не проводим доказательство этого утверждения, оставляя его читателю в качество упражнения для самостоятельной работы.

[48] Ясно, что чисто математически любой из генераторов алгебры можно переопределить, добавляя к нему произвольную линейную комбинацию операторов из центра алгебры. Это приведет к тому, что при вычислении коммутаторов между ними в правой части наряду с суммой генераторов со структурными константами возникнут новые вклады с суммой по операторам центра алгебры, т. е. новый тип алгебры. Мы не углубляемся в подобные вопросы, потому что в физике генераторы построены из размерных величин с вполне определенным физическим смыслом, а их переопределение через величины другой размерности требует обоснования причин подобных преобразований. Например, в группе поворотов генераторы момента количества движения имеют вполне определенную размерность действия, а квадрат момента — квадрат действия, так что образование линейной комбинации генератора проекции момента с его квадратом может не иметь физического смысла.

[49] Естественным обобщением описанных полиномиальных инвариантов в центре алгебры Ли являются функции от образующих центра алгебры, если эти функции рассматривать как сходящиеся ряды Тейлора по степеням образующих. Для представлений, пространства которых образованы линейными оболочками собственных состояний операторов Казимира, эти ряды сводятся к числовым рядам Тейлора по степеням собственных значений операторов Казимира.

значением. Таким образом в базисе ортонормированных состояний неприводимого представления оператор Казимира — это единичная матрица с множителем, равным собственному значению оператора Казимира в неприводимом представлении.

Наличие центра алгебры Ли приводит к важным физическим следствиям. *Если рассматривать пространство точного представления группы как пространство собственных векторов независимых инвариантных операторов Казимира, т. е. операторов, образующих центр алгебры Ли, с фиксированными собственными значениями этих образующих, то базис состояний такого пространства называют мультиплетом.* Дело в том, что собственные значения инвариантов Казимира обязаны быть вырождены по собственным значениям одного или нескольких генераторов алгебры Γ_l. Действительно, так как операторы Казимира и генератор Γ_l — это эрмитово самосопряженные операторы, которые коммутируют между собой, можно построить базис состояний представления из совместных собственных состояний образующих центра алгебры и генератора Γ_l. Но в полупростой компактной алгебре Ли найдется хотя бы один генератор Γ_α, который не будет коммутировать с генератором Γ_l, поскольку в противном случае генератор Γ_l относился бы к инвариантной абелевой подгруппе, чего не может быть в полупростой компактной группе Ли. В итоге мы получаем условие вырождения собственного значения оператора Казимира по собственным значениям генератора Γ_l (см. также Приложение, **§ 1. Квантовые понятия и обозначения**, раздел **1.5 Среднее значение, дисперсия и критерий вырождения** на стр. 300). Иначе говоря, в пространстве собственного значения оператора Казимира есть несколько состояний с разными собственными значениями генератора Γ_l.

Может быть несколько операторов типа Γ_l, которые коммутируют друг с другом, и у них есть общий базис. Из таких операторов принято образовывать подалгебру Картана, которую мы определим и рассмотрим в следующем параграфе, и отличать между собой элементы общего базиса этих операторов в пространстве неприводимого представления по наборам их собственных значений. Изучение свойств таких наборов является приоритетной задачей в первую очередь для физических приложений теории групп и алгебр Ли. Однако в большинстве представлений высокой размерности наборам собственных значений генераторов из подалгебры Картана не всегда можно сопоставить единственный собственный вектор. Поэтому наборы генераторов подалгебры Картана плюс операторов Казимира необходимо дополнять другими операторами, которые делают каждый набор собственных значений уникальным и соответствующим только одному состоянию базиса пространства представления, а соответствующий набор операторов — полной системой наблюдаемых физических величин. Поиск таких дополнительных операторов — слабо мотивированная задача для математиков и приоритетная для физиков. Диаграммы Дынкина, которые позволяют классифицировать допустимые алгебры Ли простых компактных групп Ли, могут дать исчерпывающий ответ на то, как такие операторы строить. В самой общей постановке это операторы Казимира подалгебр рассматриваемой алгебры Ли. Выбор тех или иных дополнительных операторов такого рода диктует конкретное неприводимое представление и приборные реализации измерителей наблюдаемых физических величин, соответствующих этим операторам.

Для иллюстрации расчетов кубического оператора Казимира вычислим в группе поворотов следовый тензор третьего ранга по ковариантным групповым индексам. Подстановка матриц генераторов в присоединенном представлении (II.2.27) в формулу для следа произведения трех генераторов приводит к выражению

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_2}\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_3}) &= (\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1})^{\mu}_{\bullet\,\nu}(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_2}))^{\nu}_{\bullet\,\lambda}(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_3}))^{\lambda}_{\bullet\,\mu} = \\ &= \mathrm{i}^3\left(\epsilon_{\alpha_1\nu\mu'}\delta^{\mu'\mu}\right)\left(\epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'}\delta^{\nu'\nu}\right)\left(\epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'}\delta^{\lambda'\lambda}\right) = -\mathrm{i}\left(\epsilon_{\alpha_1\nu\mu'}\delta^{\nu'\nu}\epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'}\right)\left(\delta^{\mu'\mu}\,\epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'}\delta^{\lambda'\lambda}\right) = \\ &= \mathrm{i}(\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\mu'\lambda} - \delta_{\alpha_1\lambda}\delta_{\alpha_2\mu'})\delta^{\mu'\mu}\delta^{\lambda'\lambda}\,\epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'} = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\end{aligned}$$

так что симметризация полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты дает тождественный нуль, и кубический оператор Казимира равен нулю в отличие от квадратичного оператора Казимира, который задает квадрат момента количества движения.

Образующие центр алгебры Ли и, что то же самое, операторы Казимира важны при изучении представлений алгебры Ли: собственные значения независимых операторов Казимира однозначно задают неприводимые представления, которые мы определим позже в главе 3, **§ 2. Неприводимые представления** на стр. 144.

Ответ на вопрос о числе независимых инвариантов мы получим в ходе построения представлений групп Ли.

Задача 20. Докажите, что отличный от нуля след симметризованной композиции генераторов в точном неприводимом представлении $T_R(\mathfrak{G})$ пропорционален следу произведения тех же генераторов в присоединенном представлении полупростой алгебры Ли,

$$\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R = K^R_{\mathrm{ad}}[k]\;\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_k}), \tag{II.2.42}$$

где $K^R_{\rm ad}[k]$ — постоянная, которая не зависит от ни от выбора координат в группе, ни от базиса состояний в представлении.

Решение. В точном представлении $T_R(\mathfrak{G})$ прообраз $\mathbb{1}_R$ — это единственный элемент группы $\mathfrak{G}$, равный единице $\mathfrak{e}$, а отображение генераторов в генераторы присоединенного представления является изоморфизмом,

$$\Gamma_{\alpha_m} \;\leftrightarrow\; {\rm ad}\Gamma_{\alpha_m}, \tag{II.2.43}$$

так что все свойства произведения матриц генераторов и преобразования этого произведения при замене координат группы в двух представлениях совпадают. Отличаются только размерности представлений: $\mathcal{D}_R$ и $\mathcal{D}_{\rm ad} = N_G$.

По условию отличный от нуля симметричный ковариантный тензор k-того ранга относительно преобразований координат группы в касательном пространстве

$$\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\rm tr}\,({\rm ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots{\rm ad}\Gamma_{\alpha_k}) \equiv g_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \tag{II.2.44}$$

является инвариантным относительно замен базиса в векторном пространстве представления, и с его помощью задается инвариантный оператор Казимира k-того порядка, собственное значение которого, вообще говоря, зависит от представления,

$$\hat{C}^R_k = g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\Gamma^{\alpha_1}\cdots\Gamma^{\alpha_k})_R, \qquad \hat{C}^{\rm ad}_k = g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}{\rm ad}\Gamma^{\alpha_1}\cdots{\rm ad}\Gamma^{\alpha_k}. \tag{II.2.45}$$

Для неприводимого представления оператор Казимира — это диагональная матрица в этом представлении, пропорциональная единичной, причем каждый ее ненулевой элемент на диагонали является собственным значением этого оператора в данном представлении:

$$\hat{C}^R_k = C^R_k\cdot\mathbb{1}_R, \qquad \hat{C}^{\rm ad}_k = C^{\rm ad}_k\cdot\mathbb{1}_{\rm ad}.$$

Мы рассматриваем случай, когда $C^{\rm ad}_k \neq 0$.

Матрица

$$\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R \tag{II.2.46}$$

построена из эрмитовых матриц генераторов, а симметризация приводит к тому, что симметризованное произведение является эрмитовой матрицей: для композиции двух эрмитовых матриц это утверждение элементарно, и тогда по индукции умножение симметризованного эрмитова произведения матриц еще на одну эрмитову матрицу с учетом симметрии этого произведения по перестановке матриц опять дает эрмитову матрицу. Следовательно, эрмитова матрица (II.2.46) может быть разложена по базису из единичной матрицы и бесследовых эрмитовых матриц Λ^m с вещественными коэффициентами A^R_m,

$$\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R = Q^R_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\cdot\mathbb{1}_R + \sum\left(A^R_m\right)_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\Lambda^m.$$

И точно также для присоединенного представления

$$\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\rm ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots{\rm ad}\Gamma_{\alpha_k} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\rm ad}}\,g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\cdot\mathbb{1}_{\rm ad} + \sum\left(A^{\rm ad}_m\right)_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\Lambda_{\rm ad})^m.$$

При взятии следа в разложении останется только вклад от единичной матрицы, например,

$${\rm tr}\left(\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\rm ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots{\rm ad}\Gamma_{\alpha_k}\right) = \frac{1}{\mathcal{D}_{\rm ad}}\,g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\cdot{\rm tr}\,\mathbb{1}_{\rm ad} = g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}.$$

В силу изоморфизма неприводимых представлений тензоры над касательным пространством группы, $Q^R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ и $g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$, которые возникают при разложении произведений генераторов

$$\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R \quad\longleftrightarrow\quad \mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{\rm ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots{\rm ad}\Gamma_{\alpha_k}$$

также изоморфны, так как

$$\mathbb{1}_R \;\leftrightarrow\; \mathbb{1}_{\rm ad}, \qquad Q^R_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \;\leftrightarrow\; g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}.$$

Изоморфизм означает, что тензоры отличаются разве что на скалярный множитель,

$$Q^R_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = K^R g_{\alpha_1\ldots\alpha_k},$$

который легко найти, так как

$$g^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\mathcal{S}_{{\rm sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R \equiv C^R_k\cdot\mathbb{1}_R,$$

поэтому

$$g^{\alpha_1\ldots\alpha_k}Q^R_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = C^R_k,$$

откуда

$$C^R_k = K^R g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} = K^R C^{\rm ad}_k\mathcal{D}_{\rm ad},$$

где мы воспользовались определением симметричного ковариантного тензора k-того ранга (II.2.44) и операторов Казимира (II.2.45) в случае присоединенного представления.

Значит,

$$\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\alpha_1}\cdots\Gamma_{\alpha_k})_R = Q^R_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\mathrm{tr}\,\mathbb{1}_R = K^R g_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\cdot\mathcal{D}_R = \frac{C_k^R\mathcal{D}_R}{C_k^{\mathrm{ad}}\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}\cdot g_{\alpha_1\ldots\alpha_k} =$$
$$= K^R_{\mathrm{ad}}[k]\; g_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = K^R_{\mathrm{ad}}[k]\;\mathcal{S}_{\mathrm{sym}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_k}).$$

В итоге получаем

$$K^R_{\mathrm{ad}}[k] = \frac{C_k^R\mathcal{D}_R}{C_k^{\mathrm{ad}}\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}, \qquad C_k^{\mathrm{ad}}\neq 0.$$

Мы показали, что искомый коэффициент $K^R_{\mathrm{ad}}[k]$ действительно определяется собственными значениями операторов Казимира k-того порядка и размерностями представлений.

В частности, в принятой нормировке квадратичный оператор Казимира в присоединенном представлении имеет собственное значение, равное единице, так как

$$\hat{C}_2^{\mathrm{ad}} \equiv g^{\alpha_1\alpha_2}\frac{1}{2}\big(\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_2}+\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_2}\mathrm{ad}\Gamma_{\alpha_1}\big) = g^{\alpha_1\alpha_2}\,\frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}\,g_{\alpha_1\alpha_2}\cdot\mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}\,g^{\alpha_1\alpha_2}g_{\alpha_1\alpha_2}\cdot\mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}\,\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}\cdot\mathbb{1}_{\mathrm{ad}} = \mathbb{1}_{\mathrm{ad}}.$$

Поэтому след произведения двух генераторов в неприводимом представлении пропорционален метрике Киллинга, которая задает след в присоединенном представлении,

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)_R \equiv T_R\,\delta_{\alpha\beta} = C_2^R\,\frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}\,g_{\alpha\beta}, \tag{II.2.47}$$

где введено общепринятое обозначение для постоянной T_R, которая задает коэффициент пропорциональности следа евклидовой метрике $\delta_{\alpha\beta}$ и называется индексом Дынкина.

Другое стандартное обозначение $C_A \equiv T_{\mathrm{ad}}$, и, следовательно, метрика Киллинга простой компактной группы Ли в этих терминах

$$g_{\alpha\beta} = C_A\delta_{\alpha\beta}, \qquad C_A > 0. \tag{II.2.48}$$

Тогда обратная метрика

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{C_A}\,\delta^{\alpha\beta}.$$

Однако в литературе для определения квадратичного оператора Казимира принято использовать оператор, пропорциональный стандартному, когда вместо обратной метрики для свертки генераторов используется символ Кронекера. Мы установили, что

$$\delta^{\alpha\beta} = C_A g^{\alpha\beta}.$$

Тогда, например, квадратичный оператор Казимира (с тильдой) определяют как

$$\tilde{C}_2 \equiv \delta^{\alpha\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = C_A\,\hat{C}_2. \tag{II.2.49}$$

В частности, для присоединенного представления $\tilde{C}_2^{\mathrm{ad}} = C_A$, но при этом выражение для индекса Дынкина остается в силе

$$T_R = \tilde{C}_2^R\,\frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}. \tag{II.2.50}$$

§3. Базис Картана–Вейля

Подалгебра Картана — генераторы из полного набора наблюдаемых в гильбертовом пространстве состояний, ранг группы — размерность подалгебры Картана, веса в присоединенном представлении и система корней, связь между корнем и коммутатором генератора с наблюдаемой из полного набора, корни и пары неэрмитовых генераторов, конформный фактор в метрике Киллинга и коммутаторы генераторов.

Если задана группа Ли, т. е. групповые координаты, структурные константы и, следовательно, алгебра Ли и коммутаторы генераторов группы, то стандартным приемом рассмотрения соотношений в алгебре Ли принято считать такое преобразование генераторов, которое задает переход к базису Картана–Вейля. Базисом Картана–Вейля называется специально организованный набор генераторов группы с помощью введении аналогов повышающих и понижающих операторов в группе поворотов. Это позволяет осуществить классификацию допустимых полупростых компактных групп Ли.

Введенные выше геометрические и алгебраические понятия, такие как метрика Киллинга и коммутаторы, приобретают более наглядный смысл, если рассмотреть генераторы преобразований в терминах пространства состояний, взятого из квантовой механики. Для этого мы в данном параграфе рассмотрим присоединенное представление, в котором генераторы — это матрицы линейных преобразований на пространстве генераторов, т. е. на пространстве размерности N_G. Сами эти матрицы согласно определению присоединенного представления (II.2.12) построены из структурных констант алгебры Ли. Выбор генераторов в форме базиса Картана–Вейля, полученный рассуждениями в присоединенном представлении, справедлив для любого представления в силу того, что вид коммутаторов содержит исключительно структурные константы группы. В частности, коммутационные соотношения в алгебре Ли, которые выводятся с использованием присоединенного представления, будут справедливы и в любом другом представлении, так как эти соотношения определены структурными константами алгебры Ли и не зависят от представления. Для сокращения обозначений в этом параграфе мы опускаем знак присоединенного представления «ad».

3.1 Ранг алгебры Ли и веса базиса собственных состояний

Пусть задана некоторая полупростая компактная алгебра Ли с эрмитовыми генераторами[50], преобразующими состояния пространства представления. Выделим среди генераторов набор попарно коммутирующих Γ_l, который уже не может быть дополнен каким-либо другим независимым генератором, коммутирующим с каждым генератором из этого набора. Выбранные таким способом генераторы Γ_l входят в состав полного набора наблюдаемых. Возьмем базис, состоящий из собственных состояний этого набора коммутирующих генераторов[51]. По определению, эти попарно коммутирующие генераторы образуют подалгебру Картана $\mathfrak{H}$,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \qquad l = \overline{\{1, n\}}, \quad \Gamma_l \in \mathfrak{H}, \tag{II.3.1}$$

где размерность пространства линейной оболочки генераторов Γ_l из полного набора наблюдаемых, т. е. $\dim\mathfrak{H} = n$ называют рангом алгебры Ли. Размерность подалгебры Картана меньше размерности пространства параметров группы $n < N_G$ вследствие полупростоты: иначе все генераторы коммутировали бы, и группа представляла бы из себя произведение инвариантных абелевых подгрупп, образованных элементами с координатами вдоль каждой из осей координатной сетки.

Конечномерный ортонормированный базис пространства состояний $|\boldsymbol{\mu}\rangle$, т. е. пространства представления[52], на котором действуют матрицы генераторов алгебры, задается как совместный набор собствен-

[50] Напомним, что эрмитовость генераторов в присоединенном представлении сразу же следует из антисимметрии структурных констант со всеми нижними индексами, как мы это вывели при получении (II.2.30) на стр. 81. Переопределением непрерывных параметров группы вблизи единицы можно добиться того, что положительно определенная метрика станет диагональной и пропорциональной единичной матрице. При такой метрике различия между верхними и нижними индексами исчезают. И матрица с векторным и ковекторным индексами остается эрмитовой.

[51] Из линейной алгебры нам известно, что, если для эрмитово самосопряженных матриц существует базис совместных собственных векторов, то эти матрицы коммутируют. Верно и обратное: для попарно коммутирующих эрмитово самосопряженных матриц можно построить совместный базис собственных векторов, существование которого неочевидно для бесконечномерных матриц и эрмитово самосопряженных операторов общего вида. Это вынуждает нас апеллировать к математическому обоснованию квантовой механики, в которой вводится постулат о полноте набора собственных векторов эрмитово самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве квантовых состояний любой рассматриваемой физической системы. Математическое рассмотрение задачи позволяет сформулировать условия, налагаемые на пространство представления, обеспечивающие полноту общей системы собственных векторов, что составляет содержание спектральной теоремы функционального анализа. Для физических приложений важно наличие такого базиса, а не математически строгое описание условий его существования, поскольку физика не рассматривает системы, в которых построение базиса собственных состояний эрмитово самосопряженных операторов невозможно.

[52] Практически на протяжении всего изложения в книге мы молча подразумеваем, что обозначение состояния типа $|\boldsymbol{\mu}\rangle$ относится к представлению с заданными значениями инвариантов Казимира, которые не указываются в явном виде. Кроме того, набор генераторов подалгебры Картана не является полным набором наблюдаемых. В полный набор войдут

ных векторов всех генераторов подалгебры Картана с вещественными собственными значениями[53],

$$\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_l|\boldsymbol{\mu}\rangle, \qquad \mu_l \in \mathbb{R}. \tag{II.3.2}$$

Набор собственных значений $\boldsymbol{\mu}$ состоит из компонент ковектора размерности n, которые преобразуются по тому же закону, что и генераторы алгебры при замене непрерывных групповых параметров. Если ввести линейное обратимое преобразование той части координат в касательном пространстве, которая отвечает генераторам подалгебры Картана,

$$(a')^{l'} = S^{l'}_{\bullet\, l} a^l, \tag{II.3.3}$$

то для генераторов подалгебры Картана такая замена переменных индуцирует линейное преобразование

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l \big(S^{-1}\big)^{l}_{\bullet\, l'}, \tag{II.3.4}$$

откуда можно найти действие генераторов со штрихом на базисные векторы состояний,

$$\Gamma'_{l'}|\boldsymbol{\mu}\rangle = \big(S^{-1}\big)^{l}_{\bullet\, l'}\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}\rangle = \Big(\boldsymbol{\mu}_l \big(S^{-1}\big)^{l}_{\bullet\, l'}\Big)\,|\boldsymbol{\mu}\rangle = \boldsymbol{\mu}'_{l'}|\boldsymbol{\mu}\rangle. \tag{II.3.5}$$

Таким образом состояние остается собственным для штрихованного генератора из подалгебры Картана, и имеет место закон преобразования ковектора $\boldsymbol{\mu}$,

$$\boldsymbol{\mu}'_{l'} = \boldsymbol{\mu}_l \big(S^{-1}\big)^{l}_{\bullet\, l'}. \tag{II.3.6}$$

Эти ковекторы в математике принято называть весами или весовыми векторами.

Заметим, что преобразования в касательном пространстве координат группы Ли отличаются от преобразований базиса в пространстве квантовых состояний $|\boldsymbol{\mu}\rangle$: эти два сорта преобразований никак не связаны, они могут проводиться независимо друг от друга. Преобразования в касательном пространстве координат группы Ли осуществляются действительными матрицами, а на пространстве состояний — комплексными. Для того, чтобы подчеркнуть это различие между ковекторным пространством, в котором заданы наборы собственных значений генераторов подалгебры Картана, и векторным пространством представления группы, мы систематически используем для элементов пространства весов термин «вектор» или «ковектор», а для элементов пространства представления группы термин «состояние» (или «квантовое состояние»).

Важно подчеркнуть, что преобразования с заменой базиса в касательном пространстве координат группы возле единицы (II.3.3)–(II.3.6) при наличии нескольких весовых ковекторов $\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\mu}^{(k)}$ переводят компоненты каждого весового вектора из набора $\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\mu}^{(k)}$ в компоненты $\boldsymbol{\mu}'^{(1)}, \dots \boldsymbol{\mu}'^{(k)}$. Поэтому и в связи с тем, что в математической литературе под весами подразумеваются наборы собственных значений генераторов подалгебры Картана, называемые компонентами весов и зависящие от выбора параметров группы, логично отступить от математической традиции и ввести для нормированных на единицу собственных состояний генераторов подалгебры Картана квантовомеханические обозначения

$$|k\rangle \quad \text{вместо} \quad |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle,$$

поскольку вне зависимости от выбора базиса в касательном пространстве справедливы наборы из n уравнений на собственные значения для каждого состояния[54] $|k\rangle$

$$\Gamma_l|k\rangle = (\boldsymbol{\mu}^{(k)})_l|k\rangle, \qquad \Gamma'_{l'}|k\rangle = (\boldsymbol{\mu}'^{(k)})_{l'}|k\rangle. \tag{II.3.7}$$

Эти соотношения важны с точки зрения физической интерпретации: два набора наблюдаемых из числа генераторов подалгебры Картана обладают одним и тем же базисом состояний, причем эти собственные состояния для разных наборов генераторов подалгебры Картана имеют разные наборы собственных значений, которые мы называем весовыми векторами (а точнее ковекторами), и которые как компоненты

операторы Казимира, собственные значения которых являются идентификаторами пространства представления, а также другие операторы, которыми удобно выбрать операторы Казимира подгрупп рассматриваемой группы Ли. Оператор Казимира пропорционален единичной матрице на пространстве состояний одного собственного значения этого оператора, но физические задачи требуют оперирования сразу несколькими представлениями, что превращает собственные значения операторов Казимира в значимую информацию.

[53] Для присоединенного представления этот набор состоит из N_G векторов. Для других представлений размерность пространства собственных векторов $\mathcal{D}$, вообще говоря, может быть другой.

[54] С точки зрения терминологии квантовой механики индекс k является полноценным набором квантовых чисел, в отличие от компонент веса, так как однозначно указывает на состояние. А вот один и тот же весовой вектор может быть набором собственных значений нескольких состояний базиса пространства представления.

ковекторов связаны между собой стандартными преобразованиями при замене наборов генераторов из подалгебры Картана согласно (II.3.4) и (II.3.6).

В этих обозначениях также становится более наглядным утверждение о различии двух типов преобразований. Первый тип возникает при фиксированном выборе подпространства координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, так что переход от одних координат этого n-мерного подпространства к другим приводит к преобразованию для генераторов подалгебры Картана, которое описывается обратимой действительнозначной матрицей S размером $n \times n$ в виде (II.3.4):

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l \big(S^{-1}\big)^{l}_{\bullet\, l'}.$$

Второй тип преобразований возникнет, если в алгебре Ли от одной подалгебры Картана перейти к другой подалгебре Картана, т. е. если выбрать другое подпространство координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, что приведет в пространстве представления к переходу от исходного $\mathcal{D}$-мерного базиса собственных состояний одного набора генераторов подалгебры Картана, вообще говоря, к новому $\mathcal{D}$-мерному базису собственных векторов другого набора генераторов подалгебры Картана с помощью унитарной матрицы Σ размером $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ в виде

$$|k'\rangle = |k\rangle \big(\Sigma\big)^{k}_{\bullet\, k'}.$$

Матрица Σ будет отлична от единичной, если среди нового набора генераторов подалгебры Картана есть хотя бы один, который не коммутирует с каким-либо генератором из исходного набора генераторов подалгебры Картана, так как в этом случае у такой пары генераторов нет совместного базиса собственных состояний. Итак, матрицы S и Σ отличаются своими размерами, действуют в пространствах разной природы, имеют разный физический смысл, а значит, и сами эти два типа преобразований независимы. Для примера, в группе поворотов с алгеброй ранга один в трехмерном пространстве присоединенного представления со спином $s = 1$ с исходным базисом состояний $|s, m_s\rangle$, собственным для проекции спина s_z с собственными значениями m_s, можно перейти к новому базису состояний, собственных для оператора проекции спина s_y, например. Компоненты спина s_z и s_y не коммутируют, так что это преобразование второго типа, переход к новому базису состояний будет описываться унитарной матрицей 3×3, отличной от единичной, в то время как преобразование первого типа, т. е. преобразование генераторов подалгебры Картана в данном случае, — это просто умножение генератора s_z на действительное число, отличное от нуля.

Выбор генераторов подалгебры Картана фиксирует набор весов $\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\mu}^{(k)}$, так что бывает удобней использовать обозначение

$$|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \quad \text{вместо} \quad |k\rangle$$

для базиса состояний, но надо понимать, что двум разным $k \neq k'$ может соответствовать один и тот же набор собственных значений $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = \boldsymbol{\mu}^{(k')}$, а сами собственные состояния $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ и $|\boldsymbol{\mu}^{(k')}\rangle$, т. е. $|k\rangle$ и $|k'\rangle$, при этом должны принадлежать одному собственному векторному подпространству с фиксированным набором компонент $\boldsymbol{\mu}$ как собственных значений генераторов из подалгебры Картана и быть линейно независимыми.

Если генераторы подалгебры Картана пронумеровать индексом $l \in \big\{\overline{1,n}\big\}$, то веса можно разделить на «положительные» и «отрицательные» по знаку первой по порядку отличной то нуля компоненты $\boldsymbol{\mu}_l$: у положительного веса первая по счету отличная от нуля компонента больше нуля, а у отрицательного меньше нуля. Также вводится *понятие старшего веса представления (highest weight): старший — это вес, который выбран из конечного множества положительных весовых векторов согласно процедуре последовательного отсева так, чтобы значение первой по счету компоненты $\boldsymbol{\mu}_1$ было максимально, затем при выбранном максимальном значении $\boldsymbol{\mu}_1$ значение второй по счету компоненты $\boldsymbol{\mu}_2$ было максимально и точно также далее для всех последующих значений компонент по порядку.*

Ясно, что понятия положительных и отрицательных весов, а также старшего веса зависят как от выбора генераторов в подалгебре Картана, так и от замены параметров в касательном подпространстве координат, отвечающих одному конкретному выбору подпространства подалгебры Картана. В частности, мы встретимся с ситуацией, когда при выборе положительных и отрицательных весов удобно задать один набор генераторов в касательном пространстве, а при анализе физических характеристик базисных состояний, т. е. собственных значений $\boldsymbol{\mu}_l$, — другой.

Размерность векторов собственных значений[55] $\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots \boldsymbol{\mu}^{(k)}$ для квантовых состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ равна n, но само число разных собственных состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ зависит от размерности пространства представле-

[55] Число компонент у весового вектора равна рангу группы. Если линейными преобразованиями в пространстве параметров группы можно добиться ситуации, при которой компоненты весового вектора с номером l' обращаются в нуль, то генератор подалгебры Картана $\Gamma_{l'}$ в точном представлении сам тогда должен быть равен нулю, что исключено по определению точного представления полупростой компактной группы Ли.

ния[56], которое мы обозначаем символом $\mathcal{D}$. В присоединенном представлении, которое мы рассматриваем в этом параграфе, число базисных состояний равно размерности пространства параметров группы N_G, т. е. $\mathcal{D} = N_G$. В общем случае эрмитовы матрицы генераторов подалгебры Картана — это матрицы $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а значит, у них есть $\mathcal{D}$ общих для генераторов из подалгебры Картана собственных квантовых состояний, которые образуют базис пространства представления, причем мы знаем, что этот базис всегда можно выбрать ортонормированным.

И здесь наступает удобный момент сделать небольшое отступление, чтобы обратить внимание читателя на такое характерное для курсов квантовой механики понятие, как полная система коммутирующих наблюдаемых. Для систематического изложения этого вопроса мы отсылаем читателя к любому современному учебнику по квантовой механике, например, к [10], а здесь же лишь кратко резюмируем результаты этого рассмотрения. В нашем контексте это просто набор попарно коммутирующих операторов на пространстве состояний. Часть их — генераторы подалгебры Картана. В квантовой механике показано, что у набора попарно коммутирующих операторов *существует* общий базис из собственных векторов, причем векторы, отличающиеся хотя бы на одно собственное значение из набора, автоматически ортогональны (см. Приложение **§1. Квантовые понятия и обозначения** на стр. 292, а также курс [1], который мы указали в качестве пререквизита к данному учебному пособию). Но если существует собственное подпространство с одним и тем же набором собственных значений, которое более чем одномерно, то такая система коммутирующих наблюдаемых называется неполной. И нужно искать дополнительные операторы, для которых это подпространство будет разбито на одномерные собственные подпространства с разными собственными значениями этих дополнительных операторов, тоже эрмитовых, как и генераторы подалгебры Картана. В нашем рассмотрении это будут операторы Казимира подгрупп рассматриваемой группы Ли. И собственные состояния внутри этих более чем одномерных подпространств тоже автоматически будут ортогональными друг другу и всем ранее определенным. Нормировка такого ортогонального базиса до ортонормированного уже вопросов не вызывает.

Итак, продолжая основную канву исследования пространства представления алгебры Ли, заметим, что каждый генератор из подалгебры Картана при действии на базисное состояние дает то же состояние, умноженное на действительное число — собственное значение генератора на этом состоянии. Поскольку полный набор наблюдаемых часто не исчерпывается только генераторами подалгебры Картана и групповыми инвариантами Казимира, как мы увидим на примере группы SU(3), а система коммутирующих эрмитово самосопряженных операторов называется полной, если каждому уникальному набору собственных значений этих операторов соответствует только одно собственное состояние, то в дальнейшем изложении мы будем разбирать, какие операторы нужно добавить к генераторам подалгебры Картана и групповым операторам Казимира, чтобы сделать систему коммутирующих наблюдаемых полной.

Инварианты Казимира необходимы для того, чтобы отличать одно неприводимое представление от другого. В рамках одного представления они пропорциональны единичному оператору на пространстве состояний. Поэтому с точки зрения математики эти операторы нет необходимости включать в набор коммутирующих наблюдаемых, так как они не влияют на полноту системы наблюдаемых. Но для физики эта информация значима, так как в физических процессах при взаимодействиях физических систем могут появляться новые системы с другими пространствами представлений одной и той же группы Ли. Тогда необходимо рассматривать пространства, образованные состояниями с разными собственными значениями операторов Казимира. Состояния с разными собственными значениями инвариантов Казимира ортогональны, но, что более важно, при действии групповых операций состояния с одними значениями инвариантов не могут преобразовываться в состояния с другими значениями инвариантов, т. е. подпространства с фиксированным набором собственных значений инвариантов Казимира являются инвариантными при действии на них группы. Следовательно, неизменность собственных значений операторов Казимира является необходимым признаком неприводимости представления. В наших построениях мы исследуем именно неприводимые представления.

Еще раз повторим, что в общем случае указание веса квантового состояния может быть недостаточным для того, чтобы однозначно задать квантовое состояние. Важно подчеркнуть, что при вырождении веса, когда ему отвечают более одного базисного состояния представления и количество различных наборов собственных значений – весов меньше $\mathcal{D}$, количество ортонормированных базисных квантовых состояний по-прежнему равно размерности представления $\mathcal{D}$.

Итак, базисные состояния пространства представления можно пронумеровать, указывая в их аргументе в явном виде как

$$\text{весовой вектор } \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \text{ так и собственные значения } \tau_1^{(k)}, \dots \tau_q^{(k)}$$

для других q операторов из полного набора наблюдаемых в формате

$$|\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}\rangle, \text{ где } k \in \overline{\{1, \mathcal{D}\}}.$$

[56] В представлении группы поворотов, ранг которой равен 1, при $s = 1$ базис состояний включает в себя $\mathcal{D} = 2s + 1 = 3$ вектора $|s, m_s\rangle$: $|1, +1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, -1\rangle$.

Индексы собственных значений операторов полной системы коммутирующих наблюдаемых называются квантовыми числами: в данном случае k — это тоже квантовое число[57]. В силу полноты системы наблюдаемых соответствие квантового числа k и набора собственных значений $\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_q^{(k)}$ взаимнооднозначно, так что

$$|k\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_q^{(k)}\rangle.$$

Квантовыми числами можно считать сам набор собственных значений

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_q^{(k)}.$$

Подобный вариант записи допустим и удобен, поскольку безликий номер состояния расшифровывается в явном виде с указанием физических характеристик, т. е. собственных значений наблюдаемых величин в квантовом состоянии. Однако, во-первых, подобная запись зависит от выбора координат в группе Ли. Во-вторых, использование такого наименования предполагает более аккуратное описание соответствия состояния и собственных значений генераторов из подалгебры Картана. А именно, необходимо указать операторы в полном наборе наблюдаемых, собственные значения которых различают разные состояния с одними и теми же значениями компонент весового вектора[58], причем эти операторы наряду с групповыми инвариантами Казимира не могут быть линейными комбинациями групповых инвариантов и генераторов подалгебры Картана. Вырождение как раз относится к одинаковым собственным значениям генераторов из подалгебры Картана и групповых инвариантов в совместном базисе, т. е. отличия между базисными состояниями отвечают разным собственным значениям других операторов, построенных из генераторов алгебры Ли[59].

Пример использования понятия квантового числа — представление группы поворотов со спином s. Стандартное обозначение базисного состояния $|s, m_s\rangle$ использует 2 квантовых числа, но если m_s — это собственное значение проекции спина на ось z, то s — это квантовое число, которое задает собственное значение квадрата спина, т. е. s — это индекс собственного значения квадрата спина,

$$\boldsymbol{s}^2|s, m_s\rangle = s(s+1)|s, m_s\rangle.$$

Указание собственного значения оператора Казимира важно не только физически, но и математически: тензорное произведение двух неприводимых представлений приводимо и раскладывается в прямую сумму по неприводимым представлениям с разными значениями операторов Казимира[60]. Эта сумма — одно из проявлений принципа суперпозиции состояний в квантовой механике, когда возможные квантовые состояния записываются в виде линейной суммы других состояний с коэффициентами, которые ограничены только условием конечной нормы суммы. Этот же принцип проявляется при построении состояний представления как суперпозиции базисных состояний этого представления группы.

В дальнейшем изложении мы в основном будем пользоваться сокращенным обозначением для нормированного на единицу базисного состояния

$$|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \text{ вместо полной записи в виде } |\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \ldots, \tau_q^{(k)}\rangle,$$

так как в фокусе нашего внимания будут именно весовые векторы. Если вес невырожден, то его указание в качестве идентификатора базисного состояния при заданных значениях инвариантов Казимира однозначно указывает на это квантовое состояние.

• Метрика Киллинга в подалгебре Картана и разложение по весовым векторам

Введем обозначение: пусть вектор $\boldsymbol{l}$ — элемент ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ в пространстве весов, т. е. $\boldsymbol{l}$ имеет единственную отличную от нуля и равную единице координату на l-том месте,

$$(\boldsymbol{l})_m = \delta_{lm}, \qquad l, m \in \overline{1, n}. \tag{II.3.8}$$

[57] В физической традиции принято ставить в соответствие каждой наблюдаемой из полного набора свое квантовое число. Например, оператор квадрата спина имеет собственное значение $s(s+1)$, а квантовым числом выбирают s. С точки зрения комбинаторики любой набор дискретных индексов можно свести к одному индексу, которым и является в нашем случае номер k у состояния из базиса пространства представления.

[58] Напомним, что вырождением по какой-либо величине в квантовой механике называется ситуация, когда в более чем одномерном собственном подпространстве одного оператора можно построить базис из собственных векторов другого, дополнительного оператора, причем элементы этого базиса отличаются собственными значениями этого дополнительного оператора.

[59] В действительности в группе могут быть подгруппы со своими операторами Казимира — инвариантами подгруппы, но в случае простой группы эти инварианты подгрупп не могут быть инвариантами всей группы, и именно различные собственные значения таких инвариантов подгрупп отвечают за разные собственные состояния с одним и тем же весовым вектором, т. е. отвечают за вырождение веса при заданных собственных значениях инвариантов Казимира самой группы, причем количество состояний с одним и тем же весом называют кратностью вырождения весового вектора.

[60] См. главу 4 о сложении моментов количества движения, раздел **1.1 Сложение моментов вращения**, **§1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов**.

Тогда собственное значение $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)}$ выражается в виде скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)} = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)})$, и

$$\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)})|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle. \tag{II.3.9}$$

Такая запись позволит нам вычислить часть элементов метрики Киллинга, которые были определены как след произведения генераторов. В заданном базисе состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ (в векторном пространстве представления размерности $\mathcal{D}$) след оператора, т. е. след матрицы или композиции матриц — это сумма диагональных матричных элементов оператора по всем базисным состояниям гильбертова пространства. В частности, для произведения матриц генераторов подалгебры Картана находим, что

$$\operatorname{tr}(\Gamma_l\Gamma_{l'}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle\boldsymbol{\mu}^{(k)}|\,\Gamma_l\Gamma_{l'}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle\boldsymbol{\mu}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle\,(\boldsymbol{l}', \boldsymbol{\mu}^{(k)})\,(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}). \tag{II.3.10}$$

Посколькусимметричная квадратичная вещественная форма Киллинга на подпространстве подалгебры Картана[61], которая задается элементами метрики

$$g_{ll'} = \operatorname{tr}(\Gamma_l\Gamma_{l'}) = \operatorname{tr}(\Gamma_{l'}\Gamma_l),$$

является положительно определенной, так как алгебра, которую мы рассматриваем, компактная и полупростая, то матрицу $g_{ll'}$ можно привести к диагональному виду посредством обратимых линейных вещественных преобразований генераторов Γ_l, т. е. преобразованием генераторов из полного набора наблюдаемых так, чтобы в новом базисе $g_{ll'} = b_l\delta_{ll'}$, где $b_l > 0$. После этого можно перемасштабировать генераторы подалгебры Картана за счет преобразования групповых координат, так, чтобы $b_l = 1$. Получаем компоненты метрики Киллинга для генераторов подалгебры Картана: $g_{ll'} = \delta_{ll'}$,

$$g_{ll'} = \operatorname{tr}(\Gamma_l\Gamma_{l'}) = \delta_{ll'}. \tag{II.3.11}$$

Если состояния нормированы на единицу, а мы по умолчанию везде в книге считаем все базисные состояния нормированными на единицу,

$$\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle = \delta^{k_1k_2},$$

то в новом базисе, в котором $g_{ll'} = \delta_{ll'}$, соотношение (II.3.10) в силу определения компонент вектора $\boldsymbol{l}$ (II.3.8) дает

$$\delta_{ll'} = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\boldsymbol{l}', \boldsymbol{\mu}^{(k)})\,(\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{l}', \boldsymbol{l}), \tag{II.3.12}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mu}_l^{(k)}\,\boldsymbol{\mu}_{l'}^{(k)} = \delta_{ll'} \tag{II.3.13}$$

так, как если бы n-мерные евклидовы векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$, отвечающие базису квантовых состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$, образовывали бы ортонормированный базис[62] в n-мерном евклидовом пространстве! Отличие заключается в том, что суммирование в (II.3.13) идет в пределах от 1 до $\mathcal{D}$ — размерности точного представления $\mathcal{D}$, а не от 1 до размерности векторного пространства весов.

[61] Во всем этом разделе мы вычисляем следы матриц в присоединенном представлении, которое определяет метрику Киллинга, но, поскольку наша цель состоит в том, чтобы вычислять коммутаторы генераторов, то значение этих коммутаторов не зависят от того, в каком представлении мы их получаем, так как для точных представлений алгебры Ли имеет место изоморфизм, сохраняющий один и тот же вид коммутаторов независимо от представления. Для краткости записи мы опускаем знак ad в выражениях, где вычисляются следы матриц. Вместе с тем напомним, что согласно **задаче 20** на стр. 86 след симметризованного произведения матриц генераторов в одном представлении пропорционален следу тех же матриц в другом представлении, а коэффициент пропорциональности — это скаляр по отношению к преобразованиям координат группы.

[62] Соотношение полноты ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_k$ в n-мерном векторном пространстве с евклидовой метрикой

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{e}_k\,(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}),$$

имеет очевидный геометрический смысл: любой вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве можно разложить по базису в виде суммы проекций на базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$. Умножив вектор $\boldsymbol{a}$ в его разложении по базису на вектор $\boldsymbol{b}$ скалярно, получим формулу

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_k)\,(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a}),$$

которое выглядит как (II.3.12), а роль ортонормированного базиса выполняют весовые векторы.

Вместе с тем, определение ортонормированного базиса $\boldsymbol{l} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ и связь собственных значений генераторов подалгебры Картана $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)} = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)})$ на базисных состояниях представления позволяет задать каждое состояние $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ и его весовой вектор $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ в виде точки с координатами $\boldsymbol{\mu}_l^{(k)}$ в n-мерном пространстве с ортогональными осями, заданными векторами базиса $\boldsymbol{l}$. Набор таких точек называется весовой диаграммой представления.

Линейная оболочка весовых векторов $\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}\})$ простой компактной группы Ли имеет размерность, равную рангу группы n,

$$\dim\big(\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}\})\big) = n. \tag{II.3.14}$$

В самом деле, эта размерность не может быть больше n, поскольку все весовые векторы имеют n компонент, не больше. В линейной оболочке $\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}\})$ часть весовых векторов может выражаться через другие весовые векторы, поскольку в суперпозиции разрешены и целые и не целые коэффициенты. Однако, если размерность $\dim\big(\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{\mu}^{(k)}\})\big) = \tilde{n} < n$, то заменой базиса в касательном пространстве групповых координат можно перейти к такому базису, в котором генераторы подалгебры Картана разделяются на две ортогональные группы $\{\Gamma_\perp\}$ и $\{\tilde{\Gamma}\}$, в которых первые имеют веса тождественно равные нулю, а вторые лежат в пространстве, размерностью $\tilde{n}$. Поэтому матрицы всех генераторов из $\{\Gamma_\perp\}$ имеют матричные элементы

$$\langle\boldsymbol{\mu}^{(k)}|\Gamma_\perp|\boldsymbol{\mu}^{(k')}\rangle \equiv 0.$$

В этом случае все такие генераторы представлены нулевыми матрицами, но в точном представлении простой компактной группы число таких генераторов должно быть раным нулю, что доказывает (II.3.14).

3.2 Веса и система корней алгебры Ли

Мы установили, что присоединенное представление характеризуется $\mathcal{D} = N_G$ весовыми векторами[63] $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ размерности ранга группы n. Эти веса или весовые векторы являются характеристиками[64] N_G базисных состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ пространства представления, т. е. базиса гильбертова пространства состояний[65]. Действие генератора из подалгебры Картана на базисное состояние пространства представления сводится к умножению на соответствующее элементу базиса собственное значение генератора. Действие остальных генераторов переводит базисное состояние в суперпозицию базисных состояний, так как генераторы — это матрицы линейных преобразований в пространстве представления. Поэтому такие линейные преобразования можно характеризовать набором, состоящим из разностей весовых векторов, т. е. из разностей собственных значений – весов, которыми характеризуется базис состояний в пространстве представления,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)} = \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} - \boldsymbol{\mu}^{(k_1)}. \tag{II.3.15}$$

Эти векторы $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}$, как и векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ с компонентами – собственными значениями матриц подалгебры Картана, являются n-мерными векторами, которые в рамках математической традиции мы будем называть корнями алгебры Ли или корневыми векторами при условии ,что они не равны нулевому вектору. Напомним, что собственные векторы $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ матриц (II.2.12), составленных из структурных констант алгебры Ли $f^\gamma_{\alpha\beta}$,

$$(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\gamma_{\bullet\beta} = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{II.2.12}$$

определяются этими структурными константами, что придает особую роль рассуждениям в присоединенном представлении. Все коммутационные соотношения, выведенные в терминах весовых и корневых векторов в присоединенном представлении, взаимнооднозначно переходят в коммутационные соотношения в терминах тех же самых весовых и корневых векторов в любом точном представлении. Как мы увидим при дальнейшем изучении присоединенного представления, в коммутаторы генераторов алгебры Ли явно входят только корневые векторы этой алгебры Ли. Поэтому система корневых векторов — это характеристика алгебры Ли, введенная в присоединенном представлении неявно в терминах структурных констант алгебры через весовые векторы, а это значит, что корни как векторы, которые входят

[63] При нумерации весов мы учитываем то, что часть из них может повторяться, т. е. подпространство собственных векторов с заданным набором собственных значений генераторов подалгебры Картана, с заданными компонентами веса может иметь размерность больше единицы. Количество повторов одного и того же весового вектора в наборе базисных состояний называется кратностью вырождения весового вектора, а соответствующее базисное состояние в подпространстве с заданным весом характеризуется кроме собственно веса также дополнительным квантовым числом, которое нумерует собственные значения одного из операторов, дополняющих генераторы подалгебры Картана до полного набора наблюдаемых.

[64] Вес — это набор собственных значений генераторов из подалгебры Картана.

[65] Поскольку мы ведем изложение в терминах фиксированного набора генераторов подалгебры Картана, мы предпочитаем использовать обозначение для базисных состояний $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ вместо $|k\rangle$.

в коммутационные соотношения алгебры Ли, являются универсальной системой корневых векторов для любого точного представления алгебры Ли.

Подчеркнем, что, вообще говоря, не все возможные разности весов реализуются линейными преобразованиями, которые можно представить в форме линейной комбинации генераторов алгебры Ли, т. е. *не все корни в* (II.3.15) *являются корнями алгебры Ли.*

Ясно, во-первых, что линейное преобразование – переход от базисного состояния с одним весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}$ к другому базисному состоянию с другим весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}$ можно осуществить не только в результате единственного преобразования за счет действия линейной комбинации генераторов алгебры Ли, которое описывается корнем $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}$, но и построить как последовательность из нескольких преобразований в алгебре Ли, каждое из которых характеризуется своим корнем $\boldsymbol{\alpha}^{(k'_1k'_2)}$. Это значит, что итог такой последовательности преобразований даст тот же корень,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)} = \boldsymbol{\alpha}^{(k_1k'_2)} + \boldsymbol{\alpha}^{(k'_2k'_3)} + \ldots + \boldsymbol{\alpha}^{(k'_{(n-1)}k'_n)} + \boldsymbol{\alpha}^{(k'_nk_2)}, \tag{II.3.16}$$

и, следовательно, *корень алгебры Ли может выражаться в виде суммы других корней алгебры Ли с целыми коэффициентами.* Это верно в силу того, что корни алгебры Ли — лишь некоторые из всех возможных разностей весов, коих не так много. В формуле (II.3.16) мы записали последовательность корней от одного веса к другому, соблюдая нумерацию весов по порядку, так что корневые векторы складываются, но в этом же равенстве можно перенести все векторы с правой части в левую за исключением одного, и тогда вместо сложения получится вычитание корневых векторов. Подобная специфическая линейная зависимость корней алгебры Ли исключительно с целыми коэффициентами возникает из за того, что веса образуют конечное дискретное множество в n-мерном векторном пространстве, построенном в виде линейной оболочки весовых векторов.

Во-вторых, у каждого корня есть противоположный, так как наряду с линейным преобразованием – переходом от базисного состояния с одним весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}$ к другому базисному состоянию с другим весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}$ существует и обратное линейное преобразование – переход от базисного состояния с весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}$ к базисному состоянию с весом $\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}$, а значит,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k_2k_1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} = -\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}. \tag{II.3.17}$$

Чуть ниже это элементарное равенство для корневых векторов мы используем для того, чтобы установить его связь с коммутаторами генераторов алгебры Ли.

Для дальнейших построений удобно ввести понятие положительного корня так же, как и для весовых векторов: согласно зафиксированному порядку счета генераторов подалгебры Картана у положительного корневого вектора первая отличная от нуля компонента по определению положительна. Тогда пары k_1k_2, которые согласно формуле (II.3.15) задают положительные корни $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}$, можно пронумеровать в каком-либо порядке натуральным индексом m, т. е. превратить множество положительных корней $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}$ в упорядоченное множество $\boldsymbol{\alpha}_m$, которое мы обозначим $\{\boldsymbol{\alpha}_+\}$. Отрицательные корни образуют множество $\{\boldsymbol{\alpha}_-\}$.

Более того, теперь специфическая линейная зависимость корней (II.3.16) перепишется в виде

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \sum_{m'} c_{mm'}\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \qquad c_{mm'} \in \mathbb{Z}. \tag{II.3.18}$$

С ее помощью мы можем ввести определение простого положительного корня: *простой положительный корень* не может быть представлен в виде суперпозиции положительных корней (II.3.18) с натуральными (положительными целыми) коэффициентами $c_{mm'}$. Ясно, что не являющиеся простыми положительные корни выражаются через простые положительные корневые векторы формулой (II.3.18) с натуральными коэффициентами.

3.3 Корневое дополнение генераторов подалгебры Картана

Ниже мы покажем, что каждому положительному корню алгебры Ли $\boldsymbol{\alpha}_m$ соответствует отрицательный корень $-\boldsymbol{\alpha}_m$. Поэтому общее число корней чётно. Из общих соображений такая ситуация представляется достаточно естественной, так как у группового преобразования, связывающего два вектора с разными весами, всегда есть обратное преобразование. Из чётного числа корней следует, что неабелева группа ранга 1 наряду с генератором подалгебры Картана включает в себя еще как минимум 2 генератора для положительного и отрицательного корня, соответственно, так что число групповых параметров не может быть меньше трех. Это значит, что не существует простой компактной группы Ли с двумя групповыми параметрами.

Мы утверждаем, что число корней алгебры Ли равно числу генераторов вне подалгебры Картана, которые, таким образом, образуют дополнение подалгебры Картана до всей алгебры Ли. Генераторы

из такого дополнения мы будем называть генераторами корневого дополнения $\{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\}$, т. е. в алгебре Ли всего $N_G - n$ корней.

Общее число базисных линейных преобразований, из которых в виде линейных комбинаций можно построить все линейные преобразования между базисными состояниями присоединенного представления с изменением веса не меньше числа генераторов вне подалгебры Картана $N_G - n$. В противном случае, если число недиагональных генераторов алгебры Ли, изменяющих состояния базиса, меньше, чем $N_G - n$, необходимо было бы добавить несколько генераторов до полного числа генераторов, равного N_G в группе Ли размерности N_G. Эти добавочные генераторы были бы уже диагональными, никак не изменяли бы базисные состояния и входили бы в число генераторов подалгебры Картана, что противоречит самому определению этой подалгебры: она уже не может быть расширена дополнительными коммутирующими генераторами. Значит, число линейных преобразований с изменением веса базисного состояния (лестничные преобразования) равно количеству генераторов корневого дополнения подалгебры Картана или превышает его. Поэтому в общем случае не все линейные преобразования, которые изменяют веса базисных состояний и могут быть помечены соответствующим корневым вектором, являются генераторами алгебры Ли (!).

Вообще говоря, может оказаться, что одному и тому же корню алгебры Ли соответствует несколько линейных преобразований от одного базисного состояния к другому, когда разность весов для базисных состояний на выходе и входе линейного преобразования совпадает. Это именно так, если упорядоченных пар состояний базиса с заданной разностью весов конечного и начального состояний, т. е. корнем, более одной. Из таких линейных преобразований можно строить линейные комбинации, которые тоже будут линейными. Коммутатор любой матрицы такого линейного преобразования с генератором из подалгебры Картана будет иметь типовой вид на подпространстве с базисом соответствующей упорядоченной пары конечного и начального состояний. Введем по определению такое линейное преобразование, которое переводит все возможные начальные состояния упорядоченных пар с заданным корнем в конечные, и будем называть его корневым генератором $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$ с заданным корнем $\boldsymbol{\alpha}_m$. Все возможные в том смысле, что если начальное состояние содержит тот или иной собственный вектор подалгебры Картана с ненулевым коэффициентом из упорядоченной пары состояний с заданным корнем, то и конечное собственное состояние из этой пары также входит в результат действия с ненулевым коэффициентом.

Итак, все линейные преобразования алгебры Ли в пространстве присоединенного представления суть линейные комбинации $N_G - n$ обратимых линейных преобразований[66] одного базисного состояния в другое с изменением веса этого базисного состояния и n преобразований, которые оставляют неизменным вес состояния и сохраняют само базисное состояние, домножая это состояние на собственное значение соответствующего генератора.

Те линейные преобразования, их генераторы и матрицы, которые меняют вес состояния на ненулевую величину (корень) будем называть лестничными операторами. Матрицы линейных преобразований размерности $N_G \times N_G$, которые действуют на пространстве состояний присоединенного представления (к этим линейным преобразованиям относятся и генераторы алгебры Ли), можно записать в виде суммы матриц размера $N_G \times N_G$ как лестничного типа, так и диагональных, используя обозначения квантовой механики через бра- и кет-векторы

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|. \tag{II.3.19}$$

Корневыми операторами мы будем называть только те лестничные операторы, которые входят в рассматриваемую алгебру Ли. Выражение (II.3.19) можно записать в более общем виде, если ввести в него комплексную фазу

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^{(k_1 k_2)}} \langle\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|,$$

что практически никак не изменит дальнейшее рассмотрение, за исключением вывода о том, что эту свободу с выбором фазы можно использовать, нужным образом устраняя другие фазы. Например, когда линейное преобразование переводит одно нормированное на единицу состояние в другое нормированное на единицу состояние с некоторым коэффициентом так, чтобы коэффициент при нормированном базисном состоянии был бы действительным и положительным. Напомним, что линейное преобразование можно умножить на произвольное число, так как умножение на число оставляет преобразование линейным. Чуть ниже мы еще раз подчеркнем этот факт при вычислении коммутаторов.

Бра-вектор состояния, эрмитово сопряженный кет-вектору (комплексно сопряженная строка, построенная из столбца кет-вектора состояния) [10, 11],

$$\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}| = \left(|\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle\right)^{\dagger}$$

[66] Если одно базисное состояние линейно преобразуется в другое, т. е. в отличный от нуля образ, который является базисным состоянием с точностью до не равного нулю множителя, то существует и линейное преобразование этого образа в исходное состояние: и эту пару линейных преобразований мы называем взаимной парой обратимых преобразований, так как их последовательное действие на исходное базисное состояние оставляет это состояние неизменным.

также является собственным для эрмитово самосопряженного генератора подалгебры Картана с вещественным собственным значением, которое указано в обозначении состояния,

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)}|\Gamma_l = \mu_l^{(k_2)}\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)}|. \tag{II.3.20}$$

Так как согласно уравнению на собственные векторы (II.3.2) столбец базисного кет-вектора и строка базисного бра-вектора являются собственными при умножении на эрмитово самосопряженную матрицу генератора подалгебры Картана Γ_l

$$\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_l|\boldsymbol{\mu}\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \big(\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}\rangle\big)^\dagger = \big(\mu_l|\boldsymbol{\mu}\rangle\big)^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \langle\boldsymbol{\mu}|\Gamma_l = \langle\boldsymbol{\mu}|\mu_l,$$

то умножение матрицы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|$ слева и справа на матрицу генератора подалгебры Картана приводит к формулам

$$\Gamma_l\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}} = \mu_l^{(k_2)}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}, \qquad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}\Gamma_l = \mu_l^{(k_1)}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}.$$

Коммутатор генератора из подалгебры Картана Γ_l с введенными матрицами линейных преобразований $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}$ равен[67]

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}] = \big(\mu_l^{(k_2)} - \mu_l^{(k_1)}\big)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}} = \alpha_l^{(k_1k_2)}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}. \tag{II.3.21}$$

Подчеркнем важный факт: при вычислении коммутатора (II.3.21), имеющего основополагающее значение при рассмотрении линейных преобразований, генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}$ можно умножить на не равное нулю число $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}} \mapsto C_{12}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}$, $C_{12} \neq 0$, после чего коммутатор не изменяется, поскольку операция вычисления коммутатора является линейной по каждому из своих операторных или матричных аргументов.

В тех же терминах кет- и бра-векторов матрицы генераторов из подалгебры Картана диагональны в базисе своих собственных векторов, так что они коммутируют со всеми диагональными матрицами ($k_1 = k_2$). Точнее,

$$\Gamma_l = \sum_{k=1}^{N_G} \mu_l^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k)}|, \tag{II.3.22}$$

что также можно записать в стандартных матричных обозначениях. Для этого напомним, что линейные преобразования генераторов в присоединенном представлении

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta B^\beta] = \Gamma_\nu(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\nu_{\ \bullet\beta}B^\beta \equiv \Gamma_\nu B'^\nu$$

мы записывали как матричное умножение столбца B^β на матрицу $(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\nu_{\ \bullet\beta}$,

$$B'^\nu \equiv (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^\nu_{\ \bullet\beta}B^\beta, \tag{II.3.23}$$

где Γ_ν выступали в качестве базисных элементов пространства генераторов алгебры Ли. Тогда и для матричных преобразований пространства B^βв терминах квантовомеханических состояний

$$|k\rangle \equiv |\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$$

мы постулируем тот же порядок следования матричных индексов, что и у матриц присоединенного представления в (II.3.23), с очевидной подстановкой обозначений:

для компонент вектора B^β при подстановке $\beta \mapsto k$

$$B^k = \langle k|B\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}^{(k)}|B\rangle, \tag{II.3.24}$$

при подстановке $\nu \mapsto k'$

$$B'^{k'} = \langle k'|B'\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}^{(k')}|B'\rangle,$$

а также для матрицы оператора

$$(\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^{k'}_{\ \bullet k} \equiv \big(\hat\Gamma_\alpha\big)^{k'}_{\ \bullet k},$$

[67] Данное выражение остается верным и в том случае, когда генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1k_2)}}$, действуя на состояния, отличные от $|\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}\rangle$, дает нуль, поскольку и справа, и слева от равенства получится нуль-состояние.

который задает преобразование $|B'\rangle = \hat{\Gamma}_\alpha |B\rangle$. Поэтому

$$B'^{k'} = (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^{k'}_{\bullet k} B^k \quad \Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|B'\rangle = \big(\hat{\Gamma}_\alpha\big)^{k'}_{\bullet k}\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|B\rangle = \sum_{k=1}^{N_G}\langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\hat{\Gamma}_\alpha|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|B\rangle,$$

где в последнем равенстве мы использовали полноту ортонормированного базиса собственных состояний:

$$\sum_{k=1}^{N_G}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}| = \mathbb{1},$$

при

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \delta^{k'}_k.$$

В итоге получаем

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\hat{\Gamma}_\alpha|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \big(\hat{\Gamma}_\alpha\big)^{k'}_{\bullet k} = (\mathrm{ad}\ \Gamma_\alpha)^{k'}_{\bullet k}. \tag{II.3.25}$$

Для операторов подалгебры Картана

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \mu^{(k)}_l \delta^{k'}_k, \quad \text{нет суммирования по } k.$$

Таким образом матричная запись генератора подалгебры Картана имеет вид

$$\big(\hat{\Gamma}_l\big)^{k'}_{\bullet k} = \mu^{(k)}_l \delta^{k'}_k, \quad \text{нет суммирования по } k.$$

Это выражение показывает, что в пространстве линейных преобразований генераторов присоединенного представления можно определить N_G линейных преобразований $\mathfrak{e}_d$ в виде диагональных матриц $N_G \times N_G$, в которых на d-том месте на главной диагонали стоит 1, а остальные матричные элементы равны 0:

$$(\mathfrak{e}_d)^{k'}_{\bullet k} = \delta^d_k \delta^{k'}_d, \qquad \text{нет суммирования по } d \in \big\{\overline{1,\mathcal{D}}\big\}. \tag{II.3.26}$$

Матрицы–генераторы подалгебры Картана разлагаются по этому базису

$$\hat{\Gamma}_l = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu^{(d)}_l \mathfrak{e}_d \quad \Rightarrow \quad \big(\hat{\Gamma}_l\big)^{k'}_{\bullet k} = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu^{(d)}_l (\mathfrak{e}_d)^{k'}_{\bullet k} = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu^{(d)}_l \delta^d_k \delta^{k'}_d = \mu^{(k)}_l \delta^{k'}_k, \quad \text{нет суммирования по } k.$$

■

Отсюда заключаем, что в число n генераторов подалгебры Картана входят только n вполне определенных эрмитовых суперпозиций из $\mathcal{D} = N_G > n$ диагональных матриц $\mathfrak{e}_d$ в присоединенном представлении. Метрика Киллинга в секторе генераторов подалгебры Картана

$$g_{ll'} = \mathrm{tr}\big(\Gamma_l \Gamma_{l'}\big) = \sum_{k,k'} \mu^{(k)}_l \delta^{k'}_k \mu^{(k')}_{l'} \delta^k_{k'} = \sum_k \mu^{(k)}_l \mu^{(k)}_{l'}.$$

Линейной заменой координат группы можно сделать картановский блок метрики Киллинга компактной полупростой группы равным $g_{ll'} = b_l \delta_{ll'}$, $b_l > 0$, т. е. диагональным положительно определенным, а затем за счет изменения масштаба параметров группы, этот блок метрики Киллинга для генераторов подалгебры Картана можно преобразовать и к виду единичной матрицы. ■

Матричные обозначения для линейных преобразований $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}}$ запишутся согласно (II.3.19) и (II.3.25) в виде

$$\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}}\big)^{k'}_{\bullet k} = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k')}|\boldsymbol{\mu}^{(k_2)}\rangle\langle \boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \delta^{k'}_{k_2}\delta^{k_1}_k. \tag{II.3.27}$$

Перед тем, как двигаться дальше, напомним читателю, что мы получили N_G генераторов дифференцированием по вещественным параметрам группы Ли. Все эти генераторы — эрмитовы матрицы. Выбрали из них максимальное число n коммутирующих между собой попарно — подалгебру Картана.. Теперь вводим совместный для n матриц базис собственных векторов в пространстве присоединенного представления. В этом базисе оставшиеся матрицы генераторов имеют определенный вид. Так как мы имеем дело с алгеброй Ли, а не группой, то допустимы суперпозиции матриц всех N_G генераторов. В процессе приготовления базиса Картана–Вейля мы вычитанием линейных комбинаций матриц подалгебры Картана из матриц–генераторов корневого дополнения устраняем диагональные элементы этих матриц, а отказом от эрмитовости матриц корневого дополнения можем привести их в виде лестничных операторов.

Таким образом среди матриц-генераторов алгебры Ли корневого дополнения подалгебры Картана не будет матриц с отличными от нуля диагональными элементами, так как все допустимые для заданной компактной полупростой алгебры Ли диагональные матрицы — это генераторы подалгебры Картана. Все диагональные матрицы присоединенного представления алгебры Ли разлагаются в суперпозицию по базису матриц-генераторов подалгебры Картана, другие диагональные матрицы, которые разлагаются по базису $\mathfrak{e}_d$ (II.3.26), коммутируют с матрицами-генераторами подалгебры Картана, но не имеют отношения к алгебре Ли, так как в противном случае они пополняли бы множество генераторов из подалгебры Картана, которое уже исчерпано по построению: в корневом дополнении подалгебры Картана есть только матрицы генераторов с нулевыми диагональными элементами. При $k_1 \neq k_2$

$$\operatorname{tr}\left(\Gamma_l \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}}\right) = \sum_{k,k'} \left(\hat{\Gamma}_l\right)^{k'}_{\bullet\, k} \left(\hat{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)}}\right)^{k}_{\bullet\, k'} = \sum_{k,k'} \mu_l^{(k)} \delta^{k'}_{k} \delta^{k}_{k_2} \delta^{k_1}_{k'} = \mu_l^{(k_1)} \delta^{k_1}_{k_2} = 0. \tag{II.3.28}$$

Таким образом, метрика Киллинга имеет блочный вид: один блок для подалгебры Картана (генераторы пронумерованы индексом типа l), другой для генераторов, не входящих в подалгебру Картана (генераторы пронумерованы индексом типа m), т. е. в матричном виде метрика Киллинга выглядит как

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{ll'} & g_{lm'} \\ \hline g_{ml'} & g_{mm'} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} g_{ll'} & 0 \\ \hline 0 & g_{mm'} \end{array}\right). \tag{II.3.29}$$

Из явной записи лестничных линейных преобразований с изменением веса состояния в матричных обозначениях (II.3.27) получаем

$$\operatorname{tr}\left(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_2 k'_2)}}\right) = \sum_{k,k'} \left(\hat{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}}\right)^{k'}_{\bullet\, k} \left(\hat{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_2 k'_2)}}\right)^{k}_{\bullet\, k'} = \sum_{k,k'} \delta^{k'}_{k_1} \delta^{k_1}_{k} \delta^{k}_{k'_2} \delta^{k_2}_{k'} = \delta^{k_1}_{k'_2} \delta^{k_2}_{k'_1}. \tag{II.3.30}$$

Следовательно, отличны от нуля только элементы метрики для матриц с противоположными значениями корневых векторов, т. е. при $k'_1 = k_2$ и $k'_2 = k_1$. Эрмитово сопряжение связывает лестничные операторы противоположных по знаку корней:

$$\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}} = \left(|\boldsymbol{\mu}^{(k'_1)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}|\right)^{\dagger} = |\boldsymbol{\mu}^{(k_1)}\rangle\langle\boldsymbol{\mu}^{(k'_1)}| = \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k'_1 k_1)}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}}.$$

Поскольку групповые преобразования — это обратимые преобразования, а преобразования группы Ли возле единицы в присоединенном представлении — это линейные преобразования, которые выражаются в виде суммы тождественного преобразования и генератора, умноженного на малый параметр, то и эти линейные преобразования должны быть обратимыми в присоединенном представлении. В частности, если такое линейное преобразование за счет действия генератора переводит базисное состояние в другое базисное состояние, то обратное линейное преобразование должно содержать генератор, который переводит образ линейного преобразования исходного базисного состояния обратно в это же исходное состояние. Мы только что показали, что генератор такого обратного линейного преобразования — это генератор с противоположным значением корня, т. е. эрмитово сопряженный генератор для исходного генератора с заданным значением корня. Этот факт позволяет, как мы уже указывали это чуть выше на стр. 95, для каждого положительного корневого вектора $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}$ и матрицы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}}$ алгебры Ли ввести следующие обозначения: корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m$ из упорядоченного множества положительных корней и соответствующую этому корню матрицу $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$. По построению эрмитово сопряженная к $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$ матрица $\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}_m} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ определяет такое линейное преобразование от одного базисного состояния с определенным весом к другому, что разность весов образа и исходного состояния равна противоположному, отрицательному корню.

Не все линейные преобразования, построенные в виде суперпозиций лестничных матриц могут входить в состав линейных преобразований в алгебре Ли, т. е. не все корни $\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k'_1)}$, построенные как разности весов в присоединенном представлении, являются корнями алгебры Ли. Для матриц $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, которые являются линейными комбинациями лестничных матриц с одним значением корня, корневой блок метрики Киллинга с точностью до множителя, который зависит от выбора масштаба координат в группе Ли (масштабное преобразование $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \mapsto \Omega_m \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$), задается следом, который вычислен в явном виде чуть выше в (II.3.30). После замены двойного индекса корня $(k_1 k_2)$ на индекс m упорядоченного множества положительных корней алгебры Ли этот блок принимает вид

$$g_{mm'} = \operatorname{tr}\left(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\right) = \Omega_m^2\, \delta_{mm'}. \tag{II.3.31}$$

Если лестничный генератор преобразует не одно, а несколько базисных состояний, то в след войдет число таких базисных состояний, и мы можем включить этот множитель в Ω_m^2. Например, если в пространстве

присоединенного представления существуют две пары ортонормированных состояний с одной и той же разностью весов $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\mu}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \boldsymbol{\mu}^{(4)} - \boldsymbol{\mu}^{(3)}$, то общий вид корневого оператора с комплексными коэффициентами c_1 и c_2 задается формулой

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = |\boldsymbol{\mu}^{(2)}\rangle c_1 \langle \boldsymbol{\mu}^{(1)}| + |\boldsymbol{\mu}^{(4)}\rangle c_2 \langle \boldsymbol{\mu}^{(3)}|,$$

а след, определяющий соответствующий диагональный элемент метрики Киллинга, равен

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}}) = |c_1|^2 + |c_2|^2 = \Omega^2.$$

Важно, что коммутатор лестничного генератора с генератором подалгебры Картана, установленный нами для матриц в присоединенном представлении, в силу изоморфизма всех точных представлений алгебр Ли, никак не изменяет своего вида при переходе от присоединенного представления к другому точному представлению.

Покажем, что можно построить эрмитово самосопряженные матрицы

$$\Gamma^R_m = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big), \qquad \Gamma^I_m = -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big), \tag{II.3.32}$$

для которых вычисление следов в случае, когда $\Omega_m = 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma^R_m\Gamma^R_{m'}\big) &= \mathrm{tr}\,\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big)\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big)\Big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) = \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma^I_m\Gamma^I_{m'}\big) &= \mathrm{tr}\,\Big(\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big)\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big)\Big) = \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) = \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + \tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'},\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma^R_m\Gamma^I_{m'}\big) &= -\mathrm{tr}\,\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big)\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big)\Big) = \\ &= -\mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) - \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}\big) = \\ &= 0 - \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\,\delta_{mm'} + 0 = 0,\end{aligned}$$

в итоге дает

$$\mathrm{tr}\,\big(\Gamma^R_m\Gamma^R_{m'}\big) = \mathrm{tr}\,\big(\Gamma^I_m\Gamma^I_{m'}\big) = \delta_{mm'}, \qquad \mathrm{tr}\,\big(\Gamma^R_m\Gamma^I_{m'}\big) = 0. \tag{II.3.33}$$

Еще раз напомним, что не все недиагональные матрицы (II.3.19) соответствуют генераторам алгебры Ли, а только те из них, которые являются линейными суммами генераторов, не входящих в подалгебру Картана.

В полупростой компактной алгебре Ли можно перейти к координатам, в которых метрика Киллинга единичная. При этом среди линейных преобразований в присоединенном представлении с базисом состояний, составленным из совместных собственных состояний генераторов подалгебры Картана, выделяют матрицы-генераторы подалгебры Картана — n диагональных матриц с вещественными диагональными элементами–весами, и $N_G - n$ недиагональных лестничных матриц, отвечающих положительным и противоположным им, отрицательным корням, для которых строятся эрмитовы матрицы-генераторы $\Gamma^{R,I}_m$, так что эрмитовы матрицы Γ_l и $\Gamma^{R,I}_m$ составляют весь набор генераторов алгебры Ли с единичной метрикой Киллинга.

Итак, все генераторы алгебры Ли разбились на две группы:

- первая группа — попарно коммутирующие эрмитовы генераторы подалгебры Картана Γ_l,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \qquad l, l' \in \big\{\overline{1,n}\big\}, \tag{II.3.34}$$

- вторая группа — лестничные генераторы корневого дополнения подалгебры Картана, $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, каждый из которых изменяет вес базисного состояния так, что получается состояние с другим весом, и каждому из этих генераторов отвечает свое значение корня алгебры Ли $\boldsymbol{\alpha}$, в то время как коммутатор с генератором подалгебры Картана согласно (II.3.21) задается выражением

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}] = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}_m)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}. \tag{II.3.35}$$

Те из лестничных операторов, которые можно построить из генераторов алгебры Ли, мы будем называть корневыми операторами, генераторами и матрицами. Из (II.3.35) следует, что каждый из лестничных операторов с одним и тем же значением корня удовлетворяет одному и тому же коммутационному соотношению с генераторами подалгебры Картана, если даже эти лестничные операторы построены так, что они действуют на разные базисные состояния. Но это значит, что все лестничные преобразования с одним и тем же корнем алгебры Ли — это действие одного и того же корневого генератора на разные базисные состояния присоединенного представления! Таким образом, *соответствие корневых генераторов алгебры Ли и корней алгебры Ли является взаимнооднозначным*.

Это разбиение генераторов алгебры Ли на подалгебру Картана и корневые генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$

$$\{\Gamma\} = \{\Gamma_l\} + \big(\{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_+}\} + \{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_-}\}\big) = \{\Gamma_l\} + \{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\}, \tag{II.3.36}$$

в основе которого лежат коммутационные соотношения (II.3.34) и (II.3.35), а также взаимнооднозначное соответствие корней алгебры Ли и корневых генераторов, составляет концепцию построения базиса генераторов Картана–Вейля в алгебре Ли: вместо структурных констант, отвечающих некоторому выбору непрерывных параметров группы Ли в касательном пространстве группы, и соответствующих им генераторов осуществляют переход к генераторам подалгебры Картана и корневым генераторам, а коммутаторы и структурные константы переформулируются в терминах корней алгебры Ли. Полнота коммутационных соотношений в базисе Картана–Вейля будет достигнута, если записать вид коммутатора двух корневых генераторов, что мы проделаем чуть ниже.

Итак, в терминах базиса Картана–Вейля групповая структура компактной полупростой алгебры Ли размерности N_G определяется её рангом n и системой из $(N_G - n)/2$ положительных n-мерных корней. Можно отталкиваться от конкретной группы Ли и при заданных структурных константах группы определить набор генераторов в подалгебре Картана, совместный базис пространства представления из собственных состояний этих генераторов в присоединенном представлении, плюс набор весов — собственных значений генераторов из подалгебры Картана на базисных состояниях. Затем найти среди матриц линейных преобразований на пространстве присоединенного представления те генераторы, которые переводят одно базисное состояние в другое. Однако имеет смысл и другой подход — от общего к частному: определить ограничения, накладываемые на группу и алгебру Ли самим определением группы и алгебры Ли. В рамках такого подхода определяют полный допустимый для алгебр Ли набор свойств корней, которым соответствуют линейные преобразования одного базисного состояния в другое в присоединенном представлении. Исходя из этих свойств, *перечисляют все возможные наборы структурных констант алгебр Ли*. Это позволяет построить полную классификацию полупростых и компактных групп и алгебр Ли. Именно на такой задаче описания алгебр Ли мы фокусируем все наше изложение. *Перечень допустимых положительных корней полупростой компактной алгебры Ли и их свойств как раз и есть классификация этих алгебр Ли.*

3.4 Набор генераторов Картана–Вейля

В целях классификации алгебр полупростых компактных групп Ли необходимо установить все допустимые наборы генераторов и виды их коммутаторов в базисе Картана–Вейля.

Если коммутатор генераторов в подалгебре Картана равен нулю по построению самой этой подалгебры, то для вывода коммутационных соотношений генераторов из корневого дополнения используем то, что действие корневого генератора $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$ на базисные состояния $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ будет давать с точностью до множителя базисное состояние представления, отвечающее весу $\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_m$, т. е.

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \sim |\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_m\rangle, \qquad \boldsymbol{\alpha}_m \neq 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_m \in \{\text{множество корней алгебры Ли}\}.$$

Таким образом мы сводим действие линейных преобразований корневого дополнения на пространстве представления к переходам между собственными состояниями операторов подалгебры Картана, сформированными в ортонормированный базис $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$, и тогда можно установить, что

$$\begin{aligned}
\Gamma_l\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle &= (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_m)\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle, \\
\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle &= (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)})\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle.
\end{aligned}$$

Имея в виду, что полученные равенства справедливы для любого базисного состояния $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$, и вычитая из первого соотношения второе, получим следующее коммутационное соотношение

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{II.3.37}$$

где мы опустили номер корневого вектора m, так как коммутатор имеет такой вид для любого корня. Генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$, как мы видели, не являются эрмитово самосопряженными: $\Gamma^\dagger_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$. Действительно, эрмитово сопряжение коммутатора (II.3.37) дает

$$[\Gamma_l, \Gamma^\dagger_{\boldsymbol{\alpha}}] = -(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\, \Gamma^\dagger_{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{II.3.38}$$

т. е. генератор $\Gamma^\dagger_{\boldsymbol{\alpha}}$ имеет такое же коммутационное соотношение с генераторами из подалгебры Картана, что и $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$, но с учетом смены знака корня, т. е. с подстановкой $\boldsymbol{\alpha} \mapsto -\boldsymbol{\alpha}$. Поэтому

$$\Gamma^\dagger_{\boldsymbol{\alpha}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}. \tag{II.3.39}$$

Следовательно,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = (\boldsymbol{l}, -\boldsymbol{\alpha})\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} = -(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}. \tag{II.3.40}$$

Физический смысл корневых генераторов $\Gamma_{\pm\boldsymbol{\alpha}}$ состоит в том, что они производят сдвиг собственных значений генераторов из полного набора наблюдаемых на величину $\pm\boldsymbol{\alpha}$. Если корень $\boldsymbol{\alpha}$ положительный, то генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ называют повышающими, а $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}$ — понижающими. То, что такие генераторы всегда можно построить, следует из двух фактов, установленных в присоединенном представлении:

1. генераторы алгебры Ли представляют собой линейные преобразования в векторном пространстве генераторов,

2. эрмитовы генераторы подалгебры Картана как линейные операторы (матрицы) на векторном пространстве генераторов, т. е. на пространстве присоединенного представления, можно диагонализовать совместно и построить их общий базис собственных состояний в пространстве присоединенного представления.

Итак, в теории представлений групп Ли мы имеем дело с тремя векторными пространствами:

- первое — касательное пространство координат группы размерности N_G над полем действительных чисел; (II.3.41)

- второе — пространство состояний представления над полем комплексных чисел с базисом из собственных кет-векторов подалгебры Картана $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$; размерность этого гильбертова пространства $\mathcal{D}$, равная числу векторов этого базиса, определяется представлением алгебры генераторов Ли; для присоединенного представления $\mathcal{D} = N_G$; (II.3.42)

- третье — n-мерное пространство над полем действительных чисел, элементами которого являются векторы собственных значений $\boldsymbol{\mu}$ для генераторов из подалгебры Картана и векторы $\boldsymbol{\alpha}_m$, связанные с линейными преобразованиями, т. е. с генераторами из корневого дополнения подалгебры Картана $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, переводящими базисные состояния $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ в суперпозицию других базисных состояний с весовыми векторами $\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_m$; размерность $\dim(\boldsymbol{\mu}) = \dim(\boldsymbol{\alpha}) = n$ — ранг алгебры Ли; векторы $\boldsymbol{\mu}$ называют *весами* (или весовыми векторами), а векторы $\boldsymbol{\alpha}$ — *корнями* (или корневыми векторами), и они образуют два конечных дискретных набора векторов в n-мерном пространстве. (II.3.43)

Выясним, какое значение принимает элемент метрики Киллинга для двух генераторов, отвечающих разным корневым векторам. Для этого запишем след для генераторов с разными значениями сдвигов, используя значение коммутатора генератора из алгебры Картана с повышающим генератором (II.3.37),

$$\operatorname{tr}([\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Затем раскроем коммутатор по определению и воспользуемся тем, что первую матрицу в произведении матриц под знаком следа можно переместить на последнее место в произведении, так что

$$\operatorname{tr}([\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \operatorname{tr}(\Gamma_l \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}} - \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_l\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}} \Gamma_l - \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_l\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_l]) = -(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\beta}) \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}),$$

т. е.

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}) \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = -(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\beta}) \operatorname{tr}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}).$$

Поскольку $\boldsymbol{l}$ — это любой вектор из ортонормированного базиса в n-мерном пространстве, то либо

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}, \qquad \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) \neq 0,$$

либо

$$\boldsymbol{\beta} \neq -\boldsymbol{\alpha}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = 0.$$

В базисе нормированных на единицу собственных состояний подалгебры Картана след вычисляется как сумма диагональных матричных элементов по всем элементам базиса

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}\,|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle.$$

Но

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}\,|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \sim |\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\rangle,$$

и

$$\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\rangle \neq 0, \qquad \text{если } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Поэтому нормировку генераторов $\Gamma_{\pm\boldsymbol{\alpha}}$ можно сделать такой, что[68]

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0, \\ 0, & \text{при } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq 0. \end{cases} \tag{II.3.44}$$

что устанавливает вид элементов метрики Киллинга как следа двух генераторов, отвечающих корневым векторам. Очевидно также, что

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_l) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_l\,|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}) \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\,|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \sim \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}) \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}\rangle = 0,$$

так как $\langle \boldsymbol{\mu}^{(k)}|\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}\rangle = 0$, т. е.

$$g_{\alpha l} = \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_l) = 0. \tag{II.3.45}$$

Таким образом в обозначениях кет- и бра-векторов мы наглядно показали, что метрика Киллинга имеет блочный вид при разбиении генераторов на два блока: подалгебры Картана и корневого дополнения. Метрика Киллинга полностью определена для всех пар генераторов из базиса Картана–Вейля в соотношениях (II.3.11), (II.3.44) и (II.3.45).

Задача 21. В случае $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ докажите, что $\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_l) = 0$, используя формулу

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_l) = \mathrm{tr}\,([\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]\,\Gamma_l).$$

Установим теперь вид коммутатора генераторов для противоположных корневых векторов $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]$. Для этого запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] + [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_l]] + [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]] = 0,$$

и воспользуемся известными коммутаторами (II.3.37), так что

$$[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] + (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] + (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = 0. \tag{II.3.46}$$

Коммутатор $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]$, который является оператором и принадлежит множеству линейных комбинаций из генераторов алгебры Ли, является элементом подалгебры Картана, т. е. выражается в виде линейной

[68] По построению генераторов $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}$ как эрмитово сопряженных друг к другу, $\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}$, их линейные комбинации, которые можно ввести по аналогии со случаем момента количества движения в виде

$$\Gamma^{R}_{\boldsymbol{\alpha}} = (\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}})/\sqrt{2} \text{ и } \Gamma^{I}_{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathrm{i}(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}})/\sqrt{2},$$

являются эрмитовыми, а соответствующие элементы метрики Киллинга имеют евклидов вид: диагональные элементы $g_{RR} = g_{II} = 1$, а недиагональные $g_{RI} = g_{yIR} = 0$. В явном виде, например,

$$g_{RR} = \mathrm{tr}\,(\Gamma^{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma^{R}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}) = 1, \qquad g_{RI} = \mathrm{tr}\,(\Gamma^{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma^{I}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{i}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}) = 0.$$

комбинации генераторов из полного набора наблюдаемых Γ_l. Поэтому $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]$ можно записать в виде суперпозиции генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = B_{l'}\Gamma_{l'},$$

где в последнем равенстве мы использовали соглашение Эйнштейна о суммировании по паре повторяющихся («немых») индексов: знак суммы по таким индексам опущен. Найдем коэффициенты $B_{l'}$. Сначала запишем

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_l\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]) = \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\,[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_l]) = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_l,$$

так как для евклидовой метрики Киллинга[69] (II.3.44) $\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) = 1$. С другой стороны,

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_l\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]) = B_{l'}\mathrm{tr}\,(\Gamma_l\,\Gamma_{l'}) = B_{l'}\delta_{ll'} = B_l.$$

Получаем, что $B_l = \alpha_l$, т. е. коэффициенты разложения B_l — это компоненты корневого вектора, т. е. проекции корневого вектора $\boldsymbol{\alpha}$ на орты базиса единичных векторов $\boldsymbol{l}$, и

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = \sum_l (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,\Gamma_l = \alpha_l\Gamma_l, \tag{II.3.47}$$

где в последнем равенстве подразумевается соглашение Эйнштейна о суммировании по «немым» индексам. Вид этого коммутатора, который мы сейчас вывели в случае евклидовой метрики Киллинга, не изменится, если метрика конформно плоская (см. изложение ниже и вывод формулы (II.3.50)).

В случае $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq 0$ тождество Якоби и коммутатор (II.3.37) дают

$$\begin{aligned}
[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] + [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_l]] + [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, [\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]] &= 0 \quad \Rightarrow \\
[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] - (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\beta})\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] + (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha})\,[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] &= 0 \quad \Rightarrow \\
[\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] &= (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}].
\end{aligned}$$

Это значит, что коммутатор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}} \equiv [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$ удовлетворяет такому же коммутационному соотношению

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}] = [\Gamma_l, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}},$$

что и корневой генератор с вектором $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq 0$, если такой корень существует,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}] = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}.$$

Но в силу того, что каждому корню алгебры Ли поставлен в соответствие единственный генератор алгебры Ли, это значит, что генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}} \equiv [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$ и $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$ пропорциональны[70]. Следовательно[71],

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}. \tag{II.3.48}$$

При этом, если сумма $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$ не является корневым вектором алгебры Ли, то $N_{\alpha,\beta} = 0$ (предлагаем читателю поразмыслить об этом самостоятельно).

В итоге, с помощью построений в присоединенном представлении алгебры Ли мы показали, что коммутационные соотношения для исходных эрмитово самосопряженных генераторов полупростой компактной алгебры Ли можно эквивалентным образом записать для набора генераторов, состоящего из 2 типов: генераторов выбранной подалгебры Картана $\{\Gamma_l\}$ размерностью ранга алгебры Ли $\dim\{\Gamma_l\} = n$ и корневых генераторов лестничного типа $\{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\}$, которые взаимнооднозначно связаны с корнями алгебры Ли $\{\boldsymbol{\alpha}\}$. Система корневых векторов алгебры Ли включает в себя положительные корни $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$ и противоположные им отрицательные корни, а метрика Киллинга за счет масштабных преобразований

[69] Обобщение вывода в случае конформно плоской метрики Киллинга проведено чуть ниже при выводе формулы (II.3.50). Здесь же мы специально упрощаем рассмотрение.

[70] Коммутатор $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$ — это элемента алгебры Ли, который мы обозначили $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}} \equiv [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$. Действие этого генератора на базисное состояние $|\boldsymbol{\mu}\rangle$ при $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ может дать состояние с другим весом $|\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\rangle$. Поэтому в разложении $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}$ по генераторам алгебр Ли не может быть вклада от генераторов подалгебры Картана, которые не меняют вес у состояния.

[71] В обозначении корневого генератора мы используем жирный шрифт для греческих букв, так как это корневые векторы. А в коэффициентах N — греческие индексы обычного, нежирного шрифта. В рамках конкретной алгебры Ли эти индексы в коэффициентах — это номера корней, а номера не зависят от ортогональных преобразований в наборе подалгебры Картана, которые взаимно однозначно преобразуют одни оси координат в вещественном пространстве весов и корней в другие оси.

координат группы возле единицы может быть сведена к конформно евклидовой форме (см. определение в сноске 40 на стр. 79)

$$\begin{aligned} g_{ll'} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{l'}) = \Omega^2 \delta_{ll'}, \\ g_{mm'} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}) = \Omega^2 \delta_{mm'}, \\ g_{lm} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}) = 0. \end{aligned} \tag{II.3.49}$$

Коммутатор

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}] = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}_m)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$$

имеет один и тот же вид как в случае евклидовой, так и в случае конформно евклидовой метрики Киллинга.

Вычисление коэффициентов $B_{l''}$ в ковариантных терминах метрики Киллинга с двумя нижними индексами и обратного к ней тензора с двумя верхними индексами при записи коммутатора

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}]\Big|_{m'=m} = B_{l''} g^{l''l'} \Gamma_{l'}$$

в конформно евклидовой метрике дает

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot [\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}])\Big|_{m'=m} = B_{l''} g^{l''l'} \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{l'}) = B_{l''} g^{l''l'} g_{ll'} = B_{l'} \delta_l^{l'} = B_l,$$

что с другой стороны равно

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot [\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}])\Big|_{m'=m} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot [\operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}, \operatorname{ad}\Gamma_l])\Big|_{m'=m} = \\ &= (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}_{m'}) \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}})\Big|_{m'=m} = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}_m)\, g_{mm'}\Big|_{m'=m} = (\boldsymbol{\alpha}_m)_l\, \Omega^2. \end{aligned}$$

Поэтому $B_l = (\boldsymbol{\alpha}_m)_l \Omega^2$. Запись коммутатора сопряженных корневых генераторов примет вид

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}]\Big|_{m'=m} = (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{l})\, \Omega^2 g^{ll'} \Gamma_{l'} = (\boldsymbol{\alpha}_m)_l\, \delta^{ll'} \Gamma_{l'} = (\alpha_m)_l \Gamma_l. \tag{II.3.50}$$

Описанная нами система генераторов алгебры Ли в форме подалгебры Картана и их корневого дополнения и есть базис Картана–Вейля полупростой компактной алгебры Ли. Запись коммутаторов в базисе Картана–Вейля имеет вид, инвариантный относительно конформно ортогональных преобразований координат в касательном пространстве группы возле единицы: эти преобразования сохраняют конформно евклидов вид метрики Киллинга.

Резюмируя, запишем установленный набор коммутационных соотношений в базисе Картана–Вейля с конформно евклидовой метрикой Киллинга

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, \Gamma_{l'}] &= 0, & g_{ll'} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_l \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{l'}) = \Omega^2 \delta_{ll'}, \\ [\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] &= \alpha_l\, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, & \alpha_l &= (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha}), \\ [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] &= \alpha_l \Gamma_l, & g_{\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{\alpha}} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) = \Omega^2, \\ [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] &= N_{\alpha,\beta} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}, & g_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}) = 0, \qquad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq 0. \end{aligned} \tag{II.3.51}$$

Теперь, когда самый общий вид коммутаторов генераторов в базисе Картана–Вейля установлен, для классификации полупростых компактных алгебр Ли необходимо определить, какими могут быть корневые векторы и их скалярные произведения в произвольной полупростой компактной алгебре Ли, а также вычислить значения коэффициентов $N_{\alpha,\beta}$, если известны корневые векторы алгебры Ли.

§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина

Число простых положительных корней, экспоненциальное представление элементов группы, коммутационные соотношения и скалярные произведения корневых векторов, базис в пространстве корневых векторов, повышающие последовательности простых положительных корней и число шагов повышения, дочерние корневые последовательности, диаграммы Дынкина, классификация допустимых связных диаграмм, двойные и тройные линии, ветвления.

При построении базиса Картана–Вейля мы пронумеровали генераторы подалгебры Картана $\Gamma_l \in \mathfrak{H}$ с помощью индекса l. Затем ввели понятия положительных $\{\boldsymbol{\alpha}_+\}$ и отрицательных $\{\boldsymbol{\alpha}_-\}$ корневых векторов $\boldsymbol{\alpha}$ (см. определение весов и корней в (II.3.43)), разделяя их по знаку первой ненулевой компоненты α_l. После этого мы определили понятие простого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}$, который не может выражаться через сумму других положительных корней. Каждый оставшийся положительный корень может выражаться в виде линейной комбинации простых положительных корней с натуральными коэффициентами в суперпозиции, как мы это описали на стр. 95 в формуле (II.3.18)[72].

Докажем, что число простых положительных корней не может быть меньше размерности векторного пространства корней и весов, т. е. ранга группы n. В самом деле, предположим противное: пусть число простых положительных корневых векторов меньше ранга алгебры Ли. Покажем, что в этом случае алгебра не является полупростой. Итак, если число корневых генераторов, которые соответствуют простым положительным корням, меньше числа генераторов в подалгебре Картана, то линейная оболочка, которая образована всевозможными суперпозициями простых положительных корневых векторов с вещественными коэффициентами, образует векторное пространство, которое обозначается как $\text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, , \boldsymbol{\alpha}_m\} \equiv \text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}\})$, размерности[73] $\tilde{n} < n$. В этой линейной оболочке в качестве конечного подмножества содержится набор всех положительных и отрицательных корневых векторов алгебры Ли. Пространство $\text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}\})$ по смыслу корневых генераторов и соответствующих им корневых векторов является подпространством в n-мерном пространстве $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}\})$, образованном линейной оболочкой из весов $\boldsymbol{\mu}$ — векторов собственных значений для собственных состояний матриц генераторов из подалгебры Картана. В этом случае в n-мерном пространстве можно выделить подпространство $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\perp\})$ размерности $\tilde{n}' = n - \tilde{n} > 0$, ортогональное подпространству $\text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}\}) = \text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\parallel\})$ линейной оболочки простых положительных корней. Веса в ортогональном подпространстве $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\perp\})$ инвариантны относительно действия повышающих и понижающих генераторов. Значит, пространство весов $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}\})$ можно разложить на два ортогональных подпространства – «корневое» $\text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}\}) = \text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\parallel\})$ и «инвариантное» $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\perp\})$, и, следовательно, такое разбиение соответствует переходу к таким координатам группы, в которых сама подалгебра Картана составлена из генераторов $\{\Gamma_\perp\}$ и $\{\Gamma_\parallel\}$, собственные векторы которых в присоединенном представлении[74] имеют веса в линейных оболочках $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\perp\})$ и $\text{Span}(\{\boldsymbol{\mu}_\parallel\}) = \text{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_+^{\text{prime}}\})$, соответственно. При этом согласно такому построению

$$[\Gamma_{l\perp}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = (\boldsymbol{\alpha})_{l\perp}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = 0,$$

т. е. генераторы $\Gamma_{l\perp}$ подалгебры Картана из подмножества $\{\Gamma_\perp\}$ коммутируют со всеми генераторами вне подалгебры Картана. Напомним, по построению базиса Картана–Вейля генераторы, соответствующие корням алгебры, изменяют собственные значения генераторов подалгебры Картана, а мы установили, что для генераторов подалгебры Картана из «инвариантного» подпространства $\{\Gamma_\perp\}$ собственные значения не меняются. Поэтому наличие подпространства инвариантных весов указывает на то, что действие всех генераторов алгебры оставляет его инвариантным, а значит, подгруппа $\mathcal{G}_\perp$, генераторами которой являются операторы из подалгебры $\{\Gamma_\perp\}$, — это инвариантная абелева подгруппа[75]. Наличие такой нормальной подгруппы противоречит условию о том, что мы изучаем полупростые группы.

[72] Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — простые положительные корневые векторы, а генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}$ при действии на элементы базиса из собственных состояний генераторов подалгебры Картана $|\boldsymbol{\mu}\rangle$ отображают один элемент базиса на другой, сдвигая вес состояния на соответствующий корень (с возможным изменением нормировки собственного состояния). Тогда может оказаться, что существует генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$, который отвечает сдвигу весового вектора на $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, и этот корень тоже будет положительным, но уже не будет простым, так как он равен сумме двух положительных корней.

[73] Размерность линейной оболочки набора векторов может быть меньше числа этих векторов в наборе.

[74] Для наглядности рассуждений о генераторах и пространствах линейных оболочек корней и весов мы проводим изложение в присоединенном представлении, чтобы не отвлекаться на обобщения и специфику других представлений группы Ли.

[75] Произведение элементов $g_\perp \cdot g_\parallel \approx g_\parallel \cdot g_\perp \cdot g_{[\perp,\parallel]}$ в силу $[\perp, \parallel] = 0$ и $g_{[\perp,\parallel]} = e$ в итоге сводится к коммутативности и инвариантности: $g_\perp \cdot g_\parallel = g_\parallel \cdot g_\perp$. Если какой-либо генератор коммутирует со всеми другими генераторами, то элементы группы из соответствующей данному генератору подгруппы перестановочны с элементами как этой подгруппы, так и с элементами из дополнения этой подгруппы, т. е. любому элементу группы (см. раздел **4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы**.

4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы

Для вывода о том, что элементы группы коммутируют, если генераторы коммутируют, необходимо перейти от приближенных равенств в окрестности единицы, которые отвечают коммутаторам генераторов, к точным равенствам для элементов группы. Для этого можно использовать изоморфизм групповой структуры возле единицы групповой структуре возле любого другого элемента группы. В самом деле, определение генератора группы возле единицы в некотором представлении $T(\mathfrak{G}) = G$

$$\Gamma_\alpha = \mathrm{i}\lim_{\boldsymbol{a}\to\mathbf{0}} \frac{\partial G_a}{\partial a^\alpha} \tag{II.4.1}$$

можно сначала переписать в виде дифференцирования вдоль направления $\boldsymbol{a}$, сделав подстановку малого параметра в виде поля[76] $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}(u) = u\,\boldsymbol{a}$ при $u \to 0$,

$$G_{a(\mathrm{d}u)} - \mathbb{1} \equiv \mathrm{d}G_{a(\mathrm{d}u)} = -\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\mathrm{d}u, \qquad \mathrm{d}u \to 0, \quad \Gamma_{\boldsymbol{a}} = \Gamma_\alpha a^\alpha. \tag{II.4.2}$$

После умножения справа на $G_{a(u)}$ можно воспользоваться при $u \to 0$ равенством, справедливым в первом приближении,

$$G_{a(\mathrm{d}u)} \cdot G_{a(u)} = \big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\mathrm{d}u\big)\cdot\big(\mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}u\big) \approx \mathbb{1} - \mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}(u + \mathrm{d}u) = G_{a(u+\mathrm{d}u)}.$$

С учетом элементарного равенства $\mathbb{1}\cdot G_{a(u)} = G_{a(u)}$ найдем

$$G_{a(u+\mathrm{d}u)} - G_{a(u)} \equiv \mathrm{d}G_{a(u)} = -\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\mathrm{d}u\, G_{a(u)}, \qquad u \to 0,\ \mathrm{d}u \to 0, \quad \Gamma_{\boldsymbol{a}} = \Gamma_\alpha a^\alpha, \tag{II.4.3}$$

что эквивалентно

$$\mathrm{d}G_{a(u)}\cdot G^{-1}_{a(u)} = -\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\mathrm{d}u, \qquad u \to 0,\ \mathrm{d}u \to 0. \tag{II.4.4}$$

Изоморфизм групповой структуры в разных точках, т. е. при любом значении параметра u, означает, что дифференциальное уравнение (II.4.4) можно записать и в любой другой точке при $u \neq 0$: правая часть формулы (II.4.4) не зависит от u.

$$\mathrm{d}G_{a(u)}\cdot G^{-1}_{a(u)} = -\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\mathrm{d}u, \tag{II.4.5}$$

где *матрица генератора* Γ_a *не зависит от точки*, которая описывается координатой $u \neq 0$. Подчеркнем, что всегда можно выбрать групповые координаты так, чтобы матрица генератора Γ_a оставалась одной и той же и при $u \neq 0$, а это значит, что малые преобразования возле единицы группы и малые преобразования возле другого элемента описывают групповое преобразование с одним и тем же геометрическим смыслом малого приращения групповой координаты возле всех элементов группы. Для примера одно и то же значение генератора в группе поворотов относительно фиксированной оси возле разных элементов группы означает, что приращение координаты как возле групповой единицы, так и возле любого другого элемента группы — это приращение угла поворота, а не какого-то иного параметра координат группы. Следовательно, и сама эта групповая координата — это угол поворота вокруг заданной оси. Таким образом уравнение на матричную экспоненту,

$$\frac{\mathrm{d}G_{a(u)}}{\mathrm{d}u} = -\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}\cdot G_{a(u)}, \tag{II.4.6}$$

имеет решение

$$G_{a(u)} = G_0\exp\{-\mathrm{i}\Gamma_{\boldsymbol{a}}u\},$$

где $G_0 = \mathbb{1}$, и можно положить $u = 1$ так, чтобы

$$G_a = \exp\{-\mathrm{i}\Gamma_a\} = \exp\{-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha\}. \tag{II.4.7}$$

Это — экспоненциальное представление элементов группы, которое возникает при описанном выборе координат в группе: такой выбор координат как раз и означает, что генераторы по заданному направлению возле любой точки группы одни и те же, что и возле единицы.

Экспоненциальное представление позволяет разделить группы координат, откуда следует, что, если в пространстве генераторов выделены два подпространства взаимно коммутирующих генераторов $\{\Gamma_\perp\}$ и $\{\Gamma_\parallel\}$, то и элементы подгрупп

$$G_\perp = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_\perp}, \qquad G_\parallel = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_\parallel}$$

[76] В математической литературе подобное построение обычно используют в формате, который называют однопараметрической абелевой группой преобразований (параметр u) по фиксированному направлению $\boldsymbol{a}$.

коммутируют.

Заметим теперь, что введение глобальных координат при записи элементов группы в экспоненциальной форме (II.4.7) гарантирует, что локальная групповая структура возле любой точки в точности совпадает с групповой структурой возле единицы (явный изоморфизм бесконечно малых групповых преобразований возле различных элементов группы). Экспоненциальное представление в виде матриц можно считать реализацией абстрактной группы на векторном пространстве, в котором действуют матрицы. Саму такую абстрактную группу с ассоциативным умножением, изоморфном матричному, называют универсальной обертывающей группой для исходной группы Ли и ее алгебры Ли. По построению алгебра Ли и алгебра универсальной обертывающей группы изоморфны. Что касается исследования глобальной структуры группы Ли, то оно требует дополнительного инструмента, который в математике называют гомотопией.

■

Введем траекторию координат $\boldsymbol{a}$ на отрезке «времени» $t \in [0;1]$: $\boldsymbol{a}(t)$. Гомотопией двух путей $\boldsymbol{a}_0(t)$ и $\boldsymbol{a}_1(t)$ назовем непрерывное преобразование, зависящее от параметра $\xi \in [0;1]$, $\boldsymbol{a}(\xi,t)$ такое, что $\boldsymbol{a}(0,t) = \boldsymbol{a}_0(t)$, а $\boldsymbol{a}(1,t) = \boldsymbol{a}_1(t)$, т. е. это непрерывное перемещение одного пути в другой. Среди всех путей рассматривают множество циклов: $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}(1)$. Тогда среди циклов можно ввести классы эквивалентности: гомотопные циклы эквивалентны. Всё множество координат глобально можно характеризовать его гомотопическими классами: классами эквивалентности циклов. Например, один класс — это все циклы, которые могут быть стянуты в одну точку, т. е. элемент класса — это тривиальный цикл $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_\star$. Если в пространстве есть выколотая точка, то цикл вокруг такой точки (охватывающий ее) не стягивается в точку, и это элемент другого гомотопического класса. Множества с единственным гомотопическим классом – тривиальным – называют односвязными («без дыр»).

Можно наряду с гомотопическими классами пространства координат рассматривать отображение циклов во множество чисел, например. Название такого отображения по аналогии с отображением векторов во множество чисел (ковекторы) — коциклы. Но поскольку путь характеризуется касательным ковектором к точке на пути, циклы можно рассматривать как 1-формы ω, а интеграл по циклу как коцикл. Для замкнутого пути по теореме Стокса можно перейти от интеграла 1-формы к интегралу от 2-формы по поверхности с границей на цикле,

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega,$$

и тогда говорят о 2-коцикле. Мы не станем вдаваться в эти построения в рамках данного курса, но на известном нам примере спина укажем, что экспоненциальное представление алгебры со спином $1/2$ при полном обороте вокруг оси давало не тождественное преобразование $\mathbb{1}$, как это должно быть в группе поворотов, а $-\mathbb{1}$. В таком случае говорят, что экспоненциальное представление группы, построенное по представлению алгебры Ли, дает представление универсальной обертывающей группы Ли. В примере со спином группа SU(2) — универсальная накрывающая (обертывающая) группы SO(3). Отличие в глобальной структуре этих групп описывается наличием ядра отображения SU(2) на SO(3), состоящего из дискретной группы $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$: при гомоморфизме групп прообраз тождественного преобразования называется ядром, и в случае отображения группы SU(2) на группу SO(3) говорят, имеет место изоморфизм $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(3)$, т. е. SU(2) дважды накрывает SO(3).

Развернутое изложение подобных вопросов пытливый читатель может найти в книге Уорнера [7]. О роли 2-коциклов сказано в **§ 3. Проективные представления группы Ли** Приложения. ■

В математических курсах доказывается, что универсальная обертывающая группа является односвязной.

• Эрмитовость генераторов компактной группы

Экспоненциальное представление элементов группы позволяет доказать эрмитовость генераторов компактной группы. В самом деле, компактность означает, во-первых, что метрика Киллинга невырождена и все ее собственные значения как матрицы положительны, так что в касательном вещественном векторном пространстве вводится скалярное произведение с конформно евклидовой метрикой Киллинга. Вещественные структурные константы группы Ли и ее евклидово конформная метрика Киллинга позволяют построить базис генераторов в виде прямой суммы подалгебры Картана и ее корневого дополнения — базис Картана–Вейля со всеми вытекающими из этого факта свойствами корней. Во-вторых, компактность означает, что в вещественном векторном пространстве глобальных координат, заданных для экспоненциального представления элементов группы, есть конечные границы, причем конечность определяется благодаря наличию евклидовой длины в таком пространстве координат. В компактной группе на границе координат элемент группы равен единичному[77], т. е.

$$\forall \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \quad \exists\, k \in \mathbb{R}, \quad |k| < +\infty \;:\quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{bord}} = k \cdot \boldsymbol{a}, \quad G_{\mathrm{bord}} = \exp\{-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha_{\mathrm{bord}}\} = \mathbb{1}. \tag{II.4.8}$$

[77] Предположим противное. Если на границе $\boldsymbol{a}_{\mathrm{bord}}$ по направлению $\boldsymbol{a}$ значение группового элемента отлично от единицы

$$G_{\mathrm{bord}} = \exp\{-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha_{\mathrm{bord}}\} = g_B \neq \mathbb{1},$$

то в группе определены элементы в виде степени $(g_B)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Следовательно, все ненулевые степени g_B в экспоненциальном представлении элементов группы соответствуют групповым координатам $m \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{bord}}$ вне области компактности, а это значит, что $\boldsymbol{a}_{\mathrm{bord}}$ не является границей компактности групповых координат.

Подчеркнем, что координаты границы по каждому направлению не зависят от точного представления группы, т. е. они являются общими для всех точных представлений группы. Таким образом, в компактной группе Ли по любому направлению задана граница координат, где для оператора $\Gamma_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})} \equiv \Gamma_\alpha a^\alpha_{\mathrm{bord}}$ групповой элемент равен обратному и

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})}} = \mathbb{1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})}}.$$

Единичная матрица эрмитово самосопряженная, а это значит, что ее запись в виде $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\Gamma_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})}}$ тоже эрмитова матрица, и

$$\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\Gamma^\dagger_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})}} = \mathbb{1}, \qquad \forall \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}.$$

Но это возможно для произвольного направления в координатном пространстве, если только эрмитово сопряженный оператор на границе удовлетворяет равенству

$$\Gamma^\dagger_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})} = \zeta\Gamma_{\mathrm{bord}(\boldsymbol{a})}, \qquad \zeta = \pm 1,$$

причем знак плюс или минус может быть только одним и тем же для всех направлений в пространстве координат группы в силу все того же произвола в выборе направления, так что непрерывный или даже гладкий переход от одного направления к другому не может сопровождаться дискретным скачком знака.

Покажем, что антиэрмитовы генераторы противоречат коммутационным соотношениям группы. Структурные константы являются вещественными, поэтому при эрмитовом сопряжении коммутатора найдем

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma \quad \Rightarrow \quad [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]^\dagger = [\Gamma^\dagger_\beta, \Gamma^\dagger_\alpha] = -\mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\dagger_\gamma \quad \Rightarrow \quad [\zeta\Gamma_\beta, \zeta\Gamma_\alpha] = -\mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\,\zeta\,\Gamma_\gamma.$$

С учетом антисимметрии коммутатора находим

$$\zeta^2[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\,\zeta\,\Gamma_\gamma.$$

Отсюда следует, что $\zeta = 1$, и *все генераторы бесконечно малых сдвигов групповых координат и, как следствие, элементов компактной группы вдоль произвольного направления в вещественном пространстве координат группы являются эрмитово самосопряженными!*

В математической литературе рассматривают представления алгебр Ли с невырожденной положительно определенной метрикой Киллинга, т. е. представления компактной *алгебры* Ли, которые являются более широким объектом, чем представления компактной *группы* Ли, так как условия конечной границы координат компактной группы (II.4.8) в более общем случае представлений алгебры не имеют место, а значит, и генераторы в представлении компактной алгебры Ли не обладают свойством эрмитово самосопряженных матриц. В такой ситуации не приходится говорить о квантовании собственных значений генераторов, а представления компактной алгебры Ли уже не являются представлениями компактной группы Ли с этой алгеброй Ли. Пример — модули Верма алгебры группы SU(2), которые не являются представлениями компактной группы SU(2), а относятся к представлению некомпактной накрывающей группы.

4.2 Ранг группы и число простых положительных корней

Мы доказали, что число простых положительных n-мерных корневых векторов равно или превышает ранг алгебры Ли n, так как размерность линейной оболочки простых положительных корней не может быть меньше ранга полупростой компактной алгебры Ли. Напомним: *простой положительный корневой вектор непредставим в виде суммы двух других положительных корней.*

Докажем теперь, что *число простых положительных корней равно рангу группы* n.

(1) Сначала покажем, что разность простых положительных корней не может быть корнем.

(2) Затем установим, что скалярное произведение двух простых положительных корневых векторов отрицательно или равно нулю.

(3) После этого докажем, что базис n-мерного пространства, построенный из n простых положительных корневых векторов, не допускает существования дополнительного $(n+1)$-ого простого положительного корня при выполнении условия **(2)**.

Разность различных простых положительных корневых векторов не может быть положительным корнем, так как из $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$ следует, что $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$, т. е. $\boldsymbol{\alpha}$ не есть простой положительный корень, что противоречит исходному положению. Эта разность не может быть и отрицательным корнем $-\boldsymbol{\gamma}$: $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}$, что недопустимо. В итоге, разность различных простых положительных

корней не может быть корневым вектором. На языке коммутационных соотношений в базисе Картана-Вейля это утверждение записывается в виде

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = 0, \quad N_{\alpha,-\beta} = 0, \qquad \text{для простых положительных корней } \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}. \tag{II.4.9}$$

Используя установленное ранее значение коммутатора для генераторов с противоположными значениями корней и коммутатора корневого генератора с генератором подалгебры Картана, находим

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \alpha_l \Gamma_l] = \alpha_l [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_l] = \alpha_l \big(-\beta_l \Gamma_{\boldsymbol{\beta}} \big) = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}.$$

Запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] + [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] + [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]] = 0.$$

Из него следует, что в базисе Картана–Вейля (II.3.51)

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = -[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]] - [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = -N_{-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}] - N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}],$$

где в случае простых положительных корней $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ следует положить $N_{-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \equiv 0$, так как корень из разности двух простых положительных корней запрещен (см. (II.4.9)). Коммутатор в конце формулы согласно соотношениям в базисе Картана–Вейля запишется в виде

$$[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}] = N_{-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}.$$

Итак, для двойного коммутатора устанавливаем тождество

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}} = -N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} N_{-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}.$$

Мы установили связь скалярного произведение двух простых положительных корней с коэффициентами в коммутаторах для генераторов базиса Картана–Вейля,

$$-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} N_{-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}. \tag{II.4.10}$$

Из антисимметрии коммутатора двух разных лестничных генераторов в базисе Картана–Вейля (II.3.51) следует, что

$$N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = -N_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}, \tag{II.4.11}$$

так как

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = N_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}} = -[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = -N_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}.$$

Наконец, пользуясь метрикой Киллинга для $\mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) = g_{\beta,-\beta} = \Omega^2 > 0$ (см. (II.3.49)) и стандартными коммутационными соотношениями в базисе Картана–Вейля (II.3.51), легко записать

$$\mathrm{tr}\,([\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) = N_{-\alpha,\beta+\alpha} \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) = N_{-\alpha,\beta+\alpha}\, g_{\beta,-\beta} = N_{-\alpha,\beta+\alpha}\, \Omega^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,([\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{tr}\,(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}} - \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) = \\
&= \mathrm{tr}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) = \\
&= \mathrm{tr}\,([\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}]\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}) = N_{\beta+\alpha,-\beta}\, g_{\alpha,-\alpha} = N_{\beta+\alpha,-\beta}\, \Omega^2, \\
\mathrm{tr}\,([\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{tr}\,(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}} - \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}) = \\
&= \mathrm{tr}\,(\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}) = \\
&= \mathrm{tr}\,([\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]\, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}) = N_{-\beta,-\alpha}\, g_{-\alpha-\beta,\alpha+\beta} = N_{-\beta,-\alpha}\, \Omega^2,
\end{aligned}$$

а значит,

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha}. \tag{II.4.12}$$

Так как комплексные фазы корневых генераторов можно всегда выбрать так, чтобы коэффициенты $N_{\alpha,\beta}$ в определении базиса Картана–Вейля (II.3.51) были вещественными[78], то эрмитово сопряжение

[78] В базисе Картана–Вейля (II.3.51) можно сделать подстановку $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, где $\phi_m \in \mathbb{R}$ — фаза преобразования, и такое преобразование никак не изменит коммутатор генератора из подалгебры Картана Γ_l с повышающим или понижающим корневыми генераторами, т. е. не изменит корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m$,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}] = (\boldsymbol{\alpha}_m)_l \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m},$$

но при этом фаза константы $N_{m,m'}$ в коммутаторе корневых операторов

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}] = N_{m,m'} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_{m'}},$$

изменится.

коммутатора $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$ с учетом тождества $\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}$ дает

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]^{\dagger} = N_{\alpha,\beta}\, \Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = -N_{\alpha,\beta}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} = N_{-\alpha,-\beta}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}.$$

Поэтому

$$N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta}, \tag{II.4.13}$$

а из тождества (II.4.12) устанавливаем

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha} = N_{-\beta,-\alpha} = -N_{\beta,\alpha} = N_{\alpha,\beta}. \tag{II.4.14}$$

• Знак скалярного произведения двух простых положительных корней

Согласно цепочке формул (II.4.10), (II.4.11) и (II.4.14) окончательно устанавливаем, что скалярное произведение двух простых положительных корней в случае, если их сумма также является корнем, отрицательно

$$-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = N^2_{\alpha,\beta}, \tag{II.4.15}$$

а в случае, если их сумма не является корнем, равно нулю, так как $N_{\alpha,\beta} = 0$. Это значит, что коммутатор корневых генераторов для двух разных простых положительных корней имеет вид

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = \pm\sqrt{-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} \cdot \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}, \tag{II.4.16}$$

но в этом соотношении необходимо установить правило выбора знака перед арифметическим корнем, поскольку смена порядка генераторов в коммутаторе приводит и к смене знака перед корнем, т. е. само правило определения знака связано с выбором порядка простых положительных корней.

Задача 22. Покажите, что для положительного корня $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ — это простые положительные корни,

$$g_{\boldsymbol{\gamma},-\boldsymbol{\gamma}} = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \operatorname{ad}\Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}) = g_{\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{\alpha}} = g_{\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\beta}}.$$

Примечание. Используйте коммутатор $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}$ из соотношений для базиса Картана–Вейля (II.3.51), тождество Якоби и формулу (II.4.15): $N^2_{\alpha,\beta} = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Теперь приступим к доказательству того, что n простых положительных корней образуют неортогональный базис в n-мерном пространстве векторов, а значит, и любые $k \leqslant n$ простых положительных корней образуют базис своей k-мерной линейной оболочки: число простых положительных корней задает размерность векторного пространства своей линейной оболочки.

Пусть число простых положительных корневых векторов больше размерности векторного пространства, построенного как линейная оболочка этих корней, $\dim \operatorname{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}^{\text{prime}}_{+}\}) = n$. Но тогда среди этих простых положительных корневых векторов найдутся ровно n корней $\{\boldsymbol{\alpha}_m\} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$, линейная оболочка которых имеет размерность, равную рангу алгебры $\dim \operatorname{Span}(\{\boldsymbol{\alpha}_m\}) = n$. Эти n простых положительных корней $\{\boldsymbol{\alpha}_m\} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ образуют базис n-мерной линейной оболочки всех положительных корней, и, значит, любой оставшийся вне этого базиса простой положительный корень $\{\boldsymbol{\gamma}\}$ разлагается по базису $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$,

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_i c^{(+)}_i \boldsymbol{\alpha}_i - \sum_{i'} c^{(+)}_{i'} \boldsymbol{\alpha}_{i'}, \qquad c^{(+)}_i > 0,\ -c^{(+)}_{i'} < 0, \qquad i' \neq i,$$

где мы выделили множества простых положительных векторов базиса $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$ по знаку коэффициентов, которые обозначили индексами i и i'. Сгруппируем вклады так, чтобы множители перед векторами этого базиса из простых положительных корней и оставшимся простым положительным корнем $\boldsymbol{\gamma}$ были исключительно положительными,

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \sum_i c^{(+)}_i \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\gamma} + \sum_{i'} c^{(+)}_{i'} \boldsymbol{\alpha}_{i'},$$

и вычислим квадрат вектора $\boldsymbol{\epsilon}$, пользуясь его записью двумя способами,

$$\boldsymbol{\epsilon}^2 = \left(\Big(\sum_i c^{(+)}_i \boldsymbol{\alpha}_i \Big), \Big(\boldsymbol{\gamma} + \sum_{i'} c^{(+)}_{i'} \boldsymbol{\alpha}_{i'} \Big) \right) = \sum_i c^{(+)}_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\gamma}) + \sum_{i,i'} c^{(+)}_i c^{(+)}_{i'} (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i'}) \leqslant 0, \qquad i' \neq i.$$

Неравенство возникает из-за того, что $c_i^{(+)} > 0$, $c_{i'}^{(+)} > 0$, и из-за условия на скалярное произведение любой пары не равных друг другу простых положительных корней

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -N_{\alpha,\beta}^2 \leqslant 0. \tag{II.4.15}$$

Однако квадрат вектора не может быть меньше нуля, и, следовательно, $\boldsymbol{\epsilon}^2 = 0$, а сам вектор может быть равен только нулю $\boldsymbol{\epsilon} = 0$, откуда

$$\boldsymbol{\gamma} = -\sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \boldsymbol{\alpha}_{i'}, \qquad c_{i'}^{(+)} > 0.$$

Таким образом, любой простой положительный корневой вектор, не вошедший в базис, разлагается по базису простых положительных корней $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$ исключительно с отрицательными коэффициентами $-c_{i'}^{(+)} < 0$. Но это значит, что первая по порядку отличная от нуля компонента корневого вектора $(\boldsymbol{\gamma})_l$ выражается в виде

$$(\boldsymbol{\gamma})_l = -\sum_{i'} c_{i'}^{(+)} (\boldsymbol{\alpha}_{i'})_l,$$

где среди компонент $(\boldsymbol{\alpha}_{i'})_l$ могут быть только неотрицательные первые по порядку отличные от нуля или нули, причем хотя бы одна из этих компонент должна быть положительной, а значит, $\boldsymbol{\gamma}_l < 0$. Стало быть, $\boldsymbol{\gamma}$ — это отрицательный корневой вектор, а значит, предположение о том, что кроме базиса из n простых положительных корней могут существовать другие простые положительные корни, было неверно.

Это доказательство справедливо и для любой выборки из k простых положительных корней: размерность их линейной оболочки не превышает числа этих корней, и, как мы только что показали, размерность их линейной оболочки не может быть и меньше числа простых положительных корней в выборке, так как в противном случае «лишние корни» оказались бы не положительными, а отрицательными.

В итоге, доказательство всех трех положений, сформулированных в начале раздела **4.2 Ранг группы и число простых положительных корней** главы 2, **§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина** на стр. 109, завершено, и число простых положительных корней равно рангу группы n.

Полнота системы n корневых векторов дает возможность осуществить в n-мерном пространстве весов и корней, построенном как линейная оболочка ортонормированных базисных векторов $\{\boldsymbol{l}\}$, переход к базису простых положительных корневых векторов $\{\boldsymbol{\alpha}_+\}$.

4.3 Последовательности корней, классы скалярных произведений простых положительных корней

Рассмотрим теперь α-последовательность[79] для корня $\boldsymbol{\beta}$ в виде сумм, построенных *из двух различных простых положительных корней* с равным нулю или натуральным коэффициентом $\varkappa$:

$$\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\alpha},\ \ldots,\ \boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha},\ \ldots,\ \boldsymbol{\beta}+\varkappa_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}^{\max}\boldsymbol{\alpha},$$

которая может быть только конечной, так как в базисе представления $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ конечное число состояний[80] и, следовательно, конечное число шагов $\varkappa_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}^{\max}$, т. е. $0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}^{\max}$. В силу тождества Якоби

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] - [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]].$$

Далее, пользуясь стандартными коммутационными соотношениями в базисе Картана–Вейля (II.3.51), получаем в левой части тождества

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \alpha_l\Gamma_l] = \alpha_l[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_l] = -\alpha_l(\beta_l + \varkappa\alpha_l)\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}} = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha})\,\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}},$$

а в правой

$$\begin{aligned}[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] &= N_{\beta+\varkappa\alpha,-\alpha}\,[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+(\varkappa-1)\boldsymbol{\alpha}}] = \\ &= N_{\beta+\varkappa\alpha,-\alpha}\,N_{\alpha,\beta+(\varkappa-1)\alpha}\,\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}-[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]] &= -N_{\beta+\varkappa\alpha,\alpha}\,[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}+(\varkappa+1)\boldsymbol{\alpha}}] = \\ &= -N_{\beta+\varkappa\alpha,\alpha}\,N_{-\alpha,\beta+(\varkappa+1)\alpha}\,\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}.\end{aligned}$$

[79] В приводимом построении последовательности мы полагаем, что простые положительные корни различны, $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. В дальнейшем мы покажем, что последовательность кратных корней $\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\alpha}, \ldots$ ограничена единственным, первым членом. Если же корни не являются простыми, то нужно проводить специальное исследование соответствующих последовательностей.

[80] Напомним, что мы рассматриваем только конечномерные представления алгебр Ли.

Если для произведения коэффициентов в конце последней формулы ввести обозначение

$$\mathcal{A}_{\varkappa} \stackrel{\text{def}}{=} N_{\beta+\varkappa\alpha,\alpha}\, N_{-\alpha,\beta+(\varkappa+1)\alpha},$$

то с учетом антисимметрии символов $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$, которая следует из антисимметричности коммутатора, получим для произведения коэффициентов

$$N_{\beta+\varkappa\alpha,-\alpha}\, N_{\alpha,\beta+(\varkappa-1)\alpha} = N_{\alpha,\beta+(\varkappa-1)\alpha}\, N_{\beta+\varkappa\alpha,-\alpha} = \big(-N_{\beta+(\varkappa-1)\alpha,\alpha}\big)\big(-N_{-\alpha,\beta+\varkappa\alpha}\big) = \mathcal{A}_{\varkappa-1}.$$

Для тождества Якоби наши выкладки дают

$$\begin{aligned}
&[\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] = [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}]] - [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}]] \quad \Leftrightarrow \\
&\qquad -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha})\,\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}} = \Big(N_{\beta+(\varkappa-1)\alpha,\alpha}\, N_{-\alpha,\beta+\varkappa\alpha} - N_{\beta+\varkappa\alpha,\alpha}\, N_{-\alpha,\beta+(\varkappa+1)\alpha}\Big)\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad -\Big((\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \varkappa\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})\Big)\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}} = \Big(\mathcal{A}_{\varkappa-1} - \mathcal{A}_{\varkappa}\Big)\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}.
\end{aligned}$$

При условии, что генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}}$ существует, находим рекуррентную формулу

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \varkappa\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}_{\varkappa} - \mathcal{A}_{\varkappa-1}. \tag{II.4.17}$$

Но

$$\mathcal{A}_{-1} = N_{\beta-\alpha,\alpha}\, N_{-\alpha,\beta} = 0,$$

поскольку для простых положительных корневых векторов $N_{-\alpha,\beta} = 0$, так как разность двух простых положительных корней не может быть корнем (см. начало раздела **4.2 Ранг группы и число простых положительных корней** на стр. 109). Значит,

$$\mathcal{A}_{\varkappa} = \sum_{q=0}^{\varkappa} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \sum_{q=0}^{\varkappa} q\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = (\varkappa+1)\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \tfrac{1}{2}\,\varkappa(\varkappa+1)\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}). \tag{II.4.18}$$

Пусть $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}$ — максимальное допустимое число шагов в последовательности. Тогда коэффициент $N_{\beta+\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\alpha,\alpha}$, который входит в комутатор $[\Gamma_{\beta+\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\alpha}, \Gamma_{\alpha}] = N_{\beta+\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\alpha,\alpha}\Gamma_{\beta+(\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}+1)\alpha}$, равен нулю: генератор $\Gamma_{\beta+(\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}+1)\alpha}$ не существует. Поскольку цепочка в последовательности генераторов по определению обрывается на шаге с номером $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}$, заключаем, что $\mathcal{A}_{\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}}$ в рекурренции (II.4.18) обращается в нуль, и для $\boldsymbol{\alpha}$-последовательности

$$\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = -2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} \geqslant 0. \tag{II.4.19}$$

Совершенно аналогично в β-последовательности $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$,..., $\boldsymbol{\alpha}+\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}$ максимально допустимое число членов

$$\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = -2\,\frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})} \geqslant 0. \tag{II.4.20}$$

Для компактности терминологии будем называть корневые генераторы, увеличивающие вес базисного состояния на положительный корень, *повышающими* операторами, а генераторы, увеличивающие вес базисного состояния на простой положительный корень — повышающими операторами простого корня. Из коммутаторов повышающих операторов простого корня строятся *все* повышающие операторы заданной алгебры группы Ли. Подчеркнем, что для построения всех повышающих корневых генераторов необходимо исследовать цепочки, не только построенные из пар простых положительных корней, но и цепочки, возникающие из пар всех положительных корней, которые появляются в последовательностях цепочек пары простых положительных корней.

Мы рассмотрели цепочки корневых векторов для двух простых положительных корней. Когда простых положительных корней больше двух, воспользуемся упорядоченным множеством простых положительных корней $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$, $m \in \overline{1,n}$ и сопоставим $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{\beta} \mapsto \boldsymbol{\alpha}_j$, так что в этих обозначениях

$$\varkappa^{\max}_{ij} = -2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)} \equiv -a_{ij}, \qquad \varkappa^{\max}_{ji} = -2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_i)}{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)} \equiv -a_{ji}, \tag{II.4.21}$$

где a_{ij} называют матрицей Картана. Очевидно, что диагональный член матрицы Картана $a_{ii} = 2$ (нет суммирования по i), но при $i = j$ формулы (II.4.21), которые были выведены для двух различных простых положительных корней, неприменимы, и такую ситуацию рассматривают отдельно: см.**задачу 23**

на стр. 114. Итог: кратных, т. е. удвоенных, утроенных и т.д. положительных корней $2\boldsymbol{\alpha}_i$, $3\boldsymbol{\alpha}_i$ ... не существует.

Натуральные или нулевые значения $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}$ и $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}$ в (II.4.19) и (II.4.20) накладывают ограничения на сами корневые векторы. Более того, поскольку скалярное произведение корневых векторов евклидово,

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \cos\phi\,\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})},$$

то имеет место неравенство Шварца

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\,(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}),$$

т. е.

$$l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} \equiv \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = \left(-2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\right)\left(-2\,\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}\right) = 4\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})} \leqslant 4, \tag{II.4.22}$$

а равенство возникает, только если корневые векторы параллельны. Однако, так как $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}$ и $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}$ неотрицательны, указанное равенство достигается только при $\boldsymbol{\beta} \uparrow\uparrow -\boldsymbol{\alpha}$, что недопустимо для двух положительных корневых векторов. Поэтому допустимая область значений произведения числа шагов в последовательностях двух простых положительных корней задается в виде

$$l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = \{0,1,2,3\}. \tag{II.4.23}$$

При этом равенство $l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = 0$ имеет место, только если корни ортогональны, т. е. когда $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = 0$.

Так как скалярное произведение двух простых положительных корней отрицательно или равно нулю, то из

$$l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = 4\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\,(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})} \tag{II.4.24}$$

сразу следует, что

$$\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\,(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}}, \qquad \text{или} \qquad \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)\,(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^{\max}_{ij}\varkappa^{\max}_{ji}}. \tag{II.4.25}$$

Если $l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$, то

$$\frac{\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}}{\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\varkappa^{\max}_{ij}}{\varkappa^{\max}_{ji}} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)}, \tag{II.4.26}$$

и отношение числа шагов пары последовательностей равно отношению квадратов длин взятой пары простых положительных корневых векторов.

При выводе значения коммутатора двух генераторов, соответствующих двум простым положительным корням,

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}},\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}},$$

мы показали, что

$$N^2_{\alpha,\beta} = -(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \tfrac{1}{2}\,\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = \tfrac{1}{2}\,\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}\,(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}). \tag{II.4.27}$$

Аналогично можно вывести коммутаторы для произвольных, необязательно простых корневых векторов, и таким образом полностью восстановить *все коммутационные соотношения* для генераторов группы Ли[81].

Корневые векторы, возникшие в ходе построения последовательностей из простых корней, можно также рассмотреть на предмет построения последовательностей с их участием.

Задача 23. Покажите, что в α-последовательности $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}$, $3\boldsymbol{\alpha}$,..., $(\varkappa^{\max}+1)\boldsymbol{\alpha}$ для простого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}$ максимальное допустимое число шагов $\varkappa^{\max}_{aa} = 0$, т. е. не существует корневых векторов, кратных простому положительному корню.

[81] Буквальное применение соотношения (II.4.27) в случае замены простого положительного корня $\boldsymbol{\beta}$ на простой отрицательный корень $-\boldsymbol{\beta}$ дало бы $N^2_{\alpha,-\beta} = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) < 0$, что невозможно. Но это значит, что сделанное при выводе формулы предположение о том, что коммутатор $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}},\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}]$ отличен от нуля, неверно, так что мы получаем дополнительное доказательство факта $N_{\alpha,-\beta} = 0$ для двух простых положительных корней.

Решение. Поскольку корневой генератор коммутирует сам с собой

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = N_{\alpha,\alpha}\Gamma_{2\boldsymbol{\alpha}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\alpha,\alpha} \equiv 0.$$

Поэтому цепочка в последовательности, построенной в виде сумм одного и того же корня, обрывается при первом же шаге, и корневые генераторы с кратными простыми положительными или отрицательными корнями не существуют. Заметим, что тождество $N_{\alpha,\alpha} \equiv 0$ верно в случае любого корневого вектора, т. е. *любые кратные корневому векторы не являются корнями алгебры Ли.*

Задача 24. Определите допустимое число шагов в дочерней α-последовательности $q\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$, $q\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\alpha}$,..., $q\boldsymbol{\beta}+\varkappa'^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}$, которая может возникнуть после построения родительской β-последовательности $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$,..., $\boldsymbol{\alpha}+\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}$ на q-том шаге при $q \geqslant 2$.

Решение. Воспользуемся проведенным исследованием для последовательности $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\alpha}$,..., $\boldsymbol{\beta}+\varkappa\boldsymbol{\alpha}$, сделав подстановку $\boldsymbol{\beta} \mapsto q\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$. Тогда в согласии с построениями на стр. 112 для величин

$$\mathcal{A}^{(q)}_{\varkappa} = N_{q\beta+(\varkappa+1)\alpha,\alpha}\, N_{-\alpha,q\beta+(\varkappa+2)\alpha},$$

имеет место рекуррентное соотношение

$$\mathcal{A}^{(q)}_{\varkappa} = \mathcal{A}^{(q)}_{\varkappa-1} + q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\varkappa+1)\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}). \tag{II.4.28}$$

Но

$$\mathcal{A}^{(q)}_{-1} = 0,$$

так как $N_{-\alpha,q\beta+\alpha} = 0$, поскольку эта величина входит в коммутатор

$$[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{q\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}}] = N_{-\alpha,q\beta+\alpha}\Gamma_{q\boldsymbol{\beta}},$$

а у вектора, кратного корню $\boldsymbol{\beta}$, который не может быть корнем алгебры Ли, не существует соответствующего генератора. Значит,

$$\mathcal{A}^{(q)}_{\varkappa} = \sum_{r=0}^{\varkappa}\big(q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (r+1)\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\big) = q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\varkappa+1) + \frac{1}{2}(\varkappa+2)(\varkappa+1)\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

Максимальное число шагов определяется из условия $\mathcal{A}^{(q)}_{\varkappa^{\max}_{(q)}} = 0$,

$$\varkappa^{\max}_{(q)} = q\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} - 2,$$

где, как и прежде,

$$\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = -2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})} \geqslant 0. \tag{II.4.19}$$

На самом деле построение корней алгебры Ли по системе ее простых положительных корней в случае, когда простых положительных корней более двух, можно провести с помощью группы отражений Вейля, которую мы рассмотрим в разделе **2.3 Операция вейлевского отражения** главы 3, **§2. Неприводимые представления**.

• Элементы схем Дынкина

На схемах Дынкина изображают простые положительные корневые векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ и $\boldsymbol{\alpha}_j$ в виде пары точек, которые соединяются $l_{ij} = \varkappa^{\max}_{ij}\varkappa^{\max}_{ji}$ числом прямых линий, характеризующих эти корни. Несложно перечислить типы возможных соединений:

- при $\varkappa^{\max}_{ij}\varkappa^{\max}_{ji} = 1 = l_{ij}$ единственная линия соединяет корневые векторы одинаковой длины (напоминаем, что согласно (II.4.26) отличное от нуля число линий равно отношению квадратов длин простых положительных корней);
- при $\varkappa^{\max}_{ij}\varkappa^{\max}_{ji} = 2 = l_{ij}$ две линии соединяют корни, один из которых в $\sqrt{2}$ раз длинней;
- при $\varkappa^{\max}_{ij}\varkappa^{\max}_{ji} = 3 = l_{ij}$ три линии соединяют корни, один из которых в $\sqrt{3}$ раз длинней;
- на двойных и тройных линиях стрелка указывает направление от большего корня к меньшему (см. диаграммы на рис. 2.4).

Если корни ортогональны, то они не соединяются линией. Для ортогональных простых положительных корней коммутатор равен нулю (см. (II.4.27)), и нет построенных по ним последовательностей, а поэтому групповые структурные константы с индексами этих корней обращаются в нуль:

$$\left.\begin{array}{ll} [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} = 0 & \text{при } (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0 \\ [\Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = 0, & \text{если } \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \text{ — простые положительные корни} \\ [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma^{\dagger}_{\boldsymbol{\beta}}] = [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = 0, & \text{если } \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \text{ — простые положительные корни} \end{array}\right\} \Rightarrow\ [\Gamma^{R,I}_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma^{R,I}_{\boldsymbol{\beta}}] = 0.$$

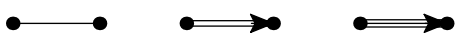


Рис. 2.4: Возможные типы соединений двух простых положительных корневых векторов на диаграмме Дынкина, когда скалярное произведение этих корневых векторов отлично от нуля.

Эрмитовы операторы $\Gamma^{R,I}$ получаются из корневых Γ и $\Gamma^\dagger$ согласно правилу

$$\Gamma^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^\dagger + \Gamma), \qquad \Gamma^I = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\Gamma^\dagger - \Gamma)$$

с указанием в этих формулах самого корневого вектора в виде нижнего индекса. Здесь надо иметь в виду, что переход от эрмитовых генераторов алгебры Ли к базису Картана–Вейля означает, что и структурные константы группы записываются в этом базисе, т. е. это константы $N_{\alpha,\beta}$ — численные коэффициенты в выражениях для коммутаторов двух генераторов $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}]$, задающих билинейный автоморфизм этих генераторов со всеми свойствами скобки Ли.

Перепишем для дальнейших построений важную формулу (II.4.25) в виде

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}}\,||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||, \quad ||\boldsymbol{\alpha}||^2 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}), \qquad ||\boldsymbol{\beta}||^2 = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \qquad \text{или} \\
&(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{l_{ij}}\,||\boldsymbol{\alpha}_i||\cdot||\boldsymbol{\alpha}_j||, \quad ||\boldsymbol{\alpha}_i||^2 = (\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i), \quad ||\boldsymbol{\alpha}_j||^2 = (\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j), \quad l_{ij} = \varkappa_{ij}^{\max}\varkappa_{ji}^{\max}.
\end{aligned} \tag{II.4.29}$$

4.4 Связные диаграммы

Диаграмма Дынкина — это изображение всех простых положительных корней алгебры Ли в виде точек с линиями, которые могут соединять эти корни по правилам, которые мы описали в **§ 4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина**, раздел **4.3 Последовательности корней, классы скалярных произведений простых положительных корней** главы 2. На такой диаграмме можно ввести классы эквивалентности, которые называются компонентами связности: класс эквивалентности простого положительного корневого вектора, который изображается точкой на диаграмме Дынкина, образован всеми корнями, с которыми исходный корень последовательно соединен линиями. Число компонент связности полупростой компактной алгебры Ли не обязательно равно единице. Диаграмма называется связной, если у нее одна компонента связности.

В связной диаграмме Дынкина заданы не равные нулю скалярные произведения простых положительных корней и коэффициенты $N_{ij} = \sqrt{-(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)}$, определенные этими скалярными произведениями в согласии с (II.4.15), которые входят в коммутационные соотношения для генераторов, соответствующих простым положительным корням диаграммы, $[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_j}] = N_{ij}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j}$, а также косвенно определены и коммутаторы генераторов для всех построенных по парам корней цепочек последовательностей корней (см. **задачу 24** и построение дочерних последовательностей корней на стр. 115).

Если в диаграмме Дынкина есть, например, две компоненты связности, т. е. простые положительные корни образуют базис двух ортогональных пространств $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ и $\{\boldsymbol{\alpha}'\}$ размерности $\tilde{n}$ и $\tilde{n}'$, где ранг алгебры равен $n = \tilde{n} + \tilde{n}'$, то

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha'}] = N_{\alpha,\alpha'}\Gamma_{\alpha+\alpha'} = 0, \quad \text{так как} \quad N^2_{\alpha,\alpha'} = -(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}') \equiv 0,$$

подалгебра Картана при подходящем выделении групповых координат также состоит из двух подпространств генераторов с размерностями $\tilde{n}$ и $\tilde{n}'$, а генераторы из этих подалгебр Картана имеют коммутаторы

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = (\boldsymbol{l},\boldsymbol{\alpha})\Gamma_\alpha, \qquad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha'}] = (\boldsymbol{l}',\boldsymbol{\alpha}')\Gamma_{\alpha'}, \qquad [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha'}] = (\boldsymbol{l},\boldsymbol{\alpha}')\Gamma_{\alpha'} = 0, \qquad [\Gamma_{l'}, \Gamma_\alpha] = (\boldsymbol{l}',\boldsymbol{\alpha})\Gamma_\alpha = 0.$$

Таким образом генераторы, относящиеся к двум различным связным диаграммам, имеют перекрестные коммутаторы, которые обращаются в нуль. Поэтому говорят, что алгебра генераторов для несвязных диаграмм Дынкина является прямой суммой алгебр, отвечающих связным диаграммам: $\Gamma \oplus \Gamma'$. Подобные коммутационные соотношения означают, что вблизи единицы группы Ли заданные векторами из двух ортогональных пространств элементы группы коммутируют

$$g_a \cdot g'_b \overset{\text{tangent}}{=} g'_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} = g'_b \cdot g_a, \qquad \text{так как } g_{[a,b]} = e.$$

В таком случае[82] говорят, что группа Ли является прямым произведением подгрупп: $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$. При этом каждая из подгрупп является инвариантной, т. е. сама группа не является простой. Это значит, что *простым компактным группам Ли отвечают связные диаграммы Дынкина.*

[82] На стр. 107 мы показали, что не приближенные, а точные утверждения о коммутативности элементов подгрупп можно сделать, используя экспоненциальное по координатам и генераторам представление для элементов группы (II.4.7).

Типы диаграмм Дынкина существенно ограничены следующими правилами, которые следуют из линейной независимости простых положительных корневых векторов, составляющих базис n-мерного корневого пространства (см. стр. 110 в **§4. Корневые векторы и диаграммы Дынкина**, раздел **4.2 Ранг группы и число простых положительных корней** главы 2), а также того, что скалярное произведение евклидово.

• Запрещены замкнутые петли

В самом деле, допустим противное: пусть k простых корней $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$ образуют цикл, в котором последовательно соединены корни $\boldsymbol{\alpha}_{p-1}$ с $\boldsymbol{\alpha}_p$ и первый с k-ым, и $k\geqslant 3$. Для простого положительного корня алгебры Ли ведем вектор единичной длины, направленный по корню,

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p=\frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_p)}}\,\boldsymbol{\alpha}_p,$$

и назовем его вектором корневого «луча» (или корневым направлением). Тогда на диаграмме Дынкина в петле из корней, где линиями последовательно соединены корни по порядку их нумерации индексом p, отличны от нуля согласно (II.4.25) только скалярные произведения векторов корневых «лучей» с последовательными номерами,

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1})=-\tfrac12\sqrt{\varkappa^{\max}_{p,p+1}\varkappa^{\max}_{p+1,p}},$$

где $\varkappa^{\max}_{p,p+1}\varkappa^{\max}_{p+1,p}\equiv\ell_p\geqslant 1$ — число линий, соединяющих p-й корень с $p+1$-м. Тогда квадрат нормы суммы векторов корневых направлений в замкнутой петле равен

$$\Big(\sum_{p=1}^{k}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\Big)\Big(\sum_{p'=1}^{k}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p'}\Big)=k+2\sum_{p<p'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_p).$$

Но в петле из корней соединены линиями только следующие друг за другом корни, так что

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p'})=\begin{cases}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}), & \text{при } p'=p+1,\\ 0 & \text{при } p'\neq p+1.\end{cases}$$

В этой формуле мы полагаем, что $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k+1}\equiv\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1$: петля замкнулась. Поэтому

$$\Big(\sum_{p=1}^{k}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\Big)\Big(\sum_{p'=1}^{k}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p'}\Big)=k+2\sum_{p}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1})=k-\sum_{p=1}^{k}\sqrt{l_p}\leqslant k-\sum_{p=1}^{k}1=0.$$

Равенство нулю квадрата нормы суммы корневых направлений цикла достигается, когда все они соединены одной линией. Это возможно лишь при условии линейной зависимости этих корней, что противоречит исходному положению о простоте корней. Когда имеется хотя бы одна кратная линия, т. е. хотя бы одно l_p больше единицы, получается отрицательный квадрат евклидова вектора. В итоге петля на диаграмме Дынкина запрещена.

• Из корня исходит не более трех линий

Пусть $k\geqslant 2$ простых корней[83] соединены линиями с корнем $\boldsymbol{\alpha}_0$. Тогда все корни $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_k$ попарно ортогональны, так как иначе какая-либо пара из них соединялась бы линией, и возникала бы замкнутая петля из трех корней, что противоречит предыдущему правилу запрета циклов. Итак, $(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_{p'})=0$ при $p\neq 0$ и $p'\neq 0$. Обозначим тильдой нормированные на единицу корневые направления, так что

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)=-\tfrac12\sqrt{l_p},\qquad l_p=\{1,2,3\}.$$

Тогда проекция корневого «луча» в центре «звездочки» на подпространство, образованное векторами «лучей» других корней звезды, равна[84]

$$\sum_{p=1}^{k}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p=-\tfrac12\sum_{p=1}^{k}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\sqrt{l_p},$$

[83] Случай $k=1$ отвечает соединению между двумя корнями, который нами уже изучен.
[84] Это так в силу попарной ортогональности корней $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_k$.

а ортогональная к подпространству компонента имеет квадрат нормы

$$\Big(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0 - \sum_{p=1}^{k}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\Big)^2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0^2 + \Big(\sum_{p=1}^{k}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\Big)^2 - 2\Big(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0, \Big(\sum_{p=1}^{k}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p\Big)\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{k} l_p - 2\sum_{p=1}^{k}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p)^2 = 1 + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{k} l_p - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k} l_p = 1 - \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{k} l_p \leqslant 1 - \frac{k}{4}.$$

Эта норма может быть только положительной: равенство нулю означает отсутствие ортогональной компоненты и линейную зависимость простых положительных корневых векторов, что невозможно. Отсюда $k \leqslant 3$. Следовательно, разрешены только

- $k = 3$, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ — тройные звездочки с одинарными линиями,
- $k = 2$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ — двойное соединение и одинарное,
- $k = 2$, $l_1 = 1$, $l_2 = 1$ — два одинарных соединения,

но запрещены точки с любыми вариантами из четырех линий, включая следующие варианты (см. рис. 2.5)

- $k = 2$, $l_1 = l_2 = 2$,
- $k = 2$, $l_1 = 3$, $l_2 = 1$,
- $k = 3$, $l_1 = 2$, $l_2 = l_3 = 1$.

В случае $k = 1$ из точного выражения для вычисленной нами выше нормы следует, что возможна единственная связная диаграмма Дынкина с тройным соединением: на ней есть только два корня, которые соединены тройной линией.



Рис. 2.5: Запрещенные соединения центрального корневого вектора на диаграмме Дынкина.

Итак, диаграмма может включать в себя только звездочки или двойные соединения. Поэтому встает вопрос о том, сколько таких множественных соединений может быть на одной диаграмме. Следовательно, необходимо рассмотреть варианты наличия на диаграмме двух звездочек, двух двойных соединений и варианта со звездочкой и двойным соединением на одной связной диаграмме Дынкина.

• На диаграмме может быть только одно двойное соединение

Пусть на схеме Дынкина две пары корней, соединенных двойными линиями, соединены звеньями с одной линией, где также могут быть и ветвления на корнях внутри цепочки. Фрагмент подобной схемы без изображения ветвлений показан на рис. 2.6.

Тогда на концах ломаной для корней, соединенных двойной линией, согласно общим выражениям для скалярного произведения простых положительных корней в терминах кратности линии на диаграмме Дынкина (II.4.24) и (II.4.25) имеем $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k) = -\sqrt{2}/2$, в то время как в середине ломаной для корней, соединенных одинарной линией, $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p) = -1/2$, а вектор

$$\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k + \sqrt{2}\sum_{p=2}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p$$

имеет квадрат нормы

$$\boldsymbol{v}^2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1^2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^2 + 2\sum_{p=2}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p^2 + 2\sqrt{2}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2) + 2\sqrt{2}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k) + 2(\sqrt{2})^2\sum_{p=2}^{k-2}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}) =$$

$$= 1 + 1 + 2(k-2) - 2\sqrt{2}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,2 - 2(\sqrt{2})^2\,\tfrac{1}{2}(k-3) = 2 + 2k - 4 - 4 - 2k + 6 = 0,$$

т. е. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, и простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

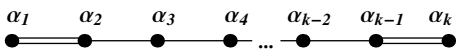


Рис. 2.6: Предполагаемая от противного, но невозможная диаграмма с двумя парными соединениями.

• На диаграмме не могут быть одновременно звездочка и двойное соединение

Пусть ближайшие тройное ветвление и двойное соединение имеют несколько вставок одинарных линий, как показано на рис. 2.7, где мы опять опускаем изображения возможных ветвлений на внутренних корнях от $\boldsymbol{\alpha}_4$ до $\boldsymbol{\alpha}_{k-2}$.

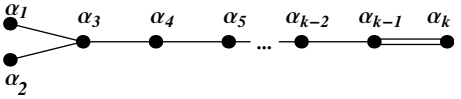


Рис. 2.7: Запрещенный фрагмент диаграммы с парным соединением и тройной «звездочкой» ветвления.

Тогда вектор

$$\boldsymbol{w} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 2\sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p + \sqrt{2}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,$$

в котором для корней звездочки в случае однократных соединений, включая внутренние корни при $3 \leqslant p \leqslant k-2$,

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}) = -\tfrac{1}{2},$$

а для двойной линии на конце

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

очевидно, имеет норму

$$\boldsymbol{w}^2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1^2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2^2 + 4\sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p^2 + 2\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^2 + 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) + 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) + 2 \cdot 4\sum_{p=3}^{k-2} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}) + 4\sqrt{2}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k) =$$

$$= 1 + 1 + 4(k-3) + 2 - 2 - 2 - 4(k-4) - 4\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Таким образом простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

• На диаграмме может быть только одна звездочка

Пусть две точки ветвления соединены цепочкой с одинарными линиями, как показано на рис. 2.8.

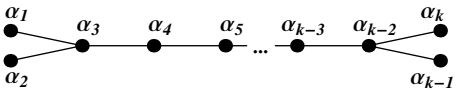


Рис. 2.8: Запрещенный фрагмент диаграммы с двумя ветвлениями.

Для единичных векторов корневых «лучей» (символ тильда), соединенных единственной линией согласно диаграмме

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-2}) = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-2}) = -\tfrac{1}{2},$$

а для $3 \leqslant p \leqslant k-3$ также

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Тогда вектор

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 2\sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k,$$

имеет квадрат нормы

$$\boldsymbol{u}^2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1^2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2^2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}^2 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k^2 + 4\sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p^2 +$$

$$+ 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) + 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3) + 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-2}) + 4(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k-2}) + 2 \cdot 4 \sum_{p=3}^{k-3} (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_p, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{p+1}) =$$

$$= 4 + 4(k-4) - 2 \cdot 4 - 4(k-5) = 0,$$

т. е. $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, и простые положительные корневые векторы линейно зависимы. Диаграмма фрагмента схемы Дынкина с рис. 2.8 запрещена в силу полученного противоречия.

• Ограничение на диаграмму с двойной линией

Мы установили, что если на связной диаграмме есть пара корней с двойным соединением, то на ней все остальные корни могут соединятся только одинарными линиями (см. рис. 2.9). Найдем ограничения на число точек в ветках одинарных линий.

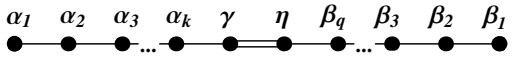


Рис. 2.9: Схема Дынкина с двойной линией.

Выделим проекцию корневого вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в подпространство, натянутое на векторы $\{\boldsymbol{\alpha}_m\}$, и компоненту $\boldsymbol{\nu}_a$, ортогональную этому подпространству,

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m + \boldsymbol{\nu}_a,$$

где в силу линейной независимости простых положительных корневых векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\alpha}_m$ ортогональный к подпространству вектор $\boldsymbol{\nu}_a$, $(\boldsymbol{\nu}_a, \boldsymbol{\alpha}_m) = 0$, не равен нулю[85]. При m, принимающем значение в области $1 \leqslant m < k$ корень $\boldsymbol{\gamma}$ не соединен с $\boldsymbol{\alpha}_m$, а значит,

$$(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m) = 0.$$

Отсюда следует, что при $m = 1$

$$a_1 - \tfrac{1}{2} a_2 = 0$$

в силу

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2) = -\tfrac{1}{2},$$

а при $m > 1$

$$(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_m - \tfrac{1}{2}(a_{m+1} + a_{m-1}) = 0,$$

так как

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{m\pm1}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Значит, последовательно

$$a_2 = 2a_1, \quad a_3 = 2a_2 - a_1 = 3a_1, \ldots$$

и рекуррентное соотношение удовлетворяется при

$$a_m = m a_1.$$

Кроме того можно считать, что вектор $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ отвечает $k+1$ члену этой последовательности, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mapsto \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k+1}$. После переноса этого вектора из правой части разложения в подпространстве в левую

$$\mathbf{0} = \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m - \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\nu}_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m + \boldsymbol{\nu}_a \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{\nu}_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m.$$

Учтем, что $(\boldsymbol{\nu}_a, \boldsymbol{\alpha}_k) = 0$, так что связь, установленная нами выше при $1 < m < k$, справедлива и при $m = k$:

$$-\tfrac{1}{2}\, a_{k-1} + a_k - \tfrac{1}{2}\, a_{k+1} = 0.$$

[85] Если $\boldsymbol{\nu}_a = 0$, то простой положительный корень $\boldsymbol{\gamma}$ выражался бы через суперпозицию $\boldsymbol{\alpha}_m$.

По построению $a_{k+1} = -1$, откуда из $a_m = ma_1$ сразу следует, что

$$a_1 = -\frac{1}{k+1}, \qquad a_m = -\frac{m}{k+1}. \tag{II.4.30}$$

Совершенно аналогично используя проекцию корневого вектора $\boldsymbol{\eta}$ в подпространство, натянутое на векторы $\{\boldsymbol{\beta}_n\}$, запишем

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{n=1}^{q} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \boldsymbol{\nu}_b,$$

где уже подобно (II.4.30)

$$b_1 = -\frac{1}{q+1}, \qquad b_n = -\frac{n}{q+1}, \tag{II.4.31}$$

и $b_{q+1} = -1$ при $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{q+1} \equiv \tilde{\boldsymbol{\eta}}$, если записать

$$\mathbf{0} = \sum_{n=1}^{q} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n - \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\nu}_b = \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \boldsymbol{\nu}_b.$$

Остаточный вектор $\boldsymbol{\nu}_a$ в разложении $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ можно спроецировать на остаточный вектор $\boldsymbol{\nu}_b$ в разложении $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$, записав

$$\boldsymbol{\nu}_a = -c\,\boldsymbol{\nu}_b + \boldsymbol{\epsilon}, \qquad (\boldsymbol{\nu}_b, \boldsymbol{\epsilon}) = 0, \tag{II.4.32}$$

где также необходимо определить свойства остаточного вектора $\boldsymbol{\epsilon}$ по отношению к подпространству, в котором лежит вектор $\boldsymbol{\nu}_a$.

Поскольку

$$\boldsymbol{\nu}_a = -\sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m = -\sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \qquad \boldsymbol{\nu}_b = -\sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n = -\sum_{n=1}^{q} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \tilde{\boldsymbol{\eta}},$$

из (II.4.32) получаем выражение

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m + c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{II.4.33}$$

в котором остаточный вектор $\boldsymbol{\epsilon}$ отличен от нуля, так как в противном случае простые положительные корни, образующие базис в векторном подпространстве с размерностью $k+q+2$, оказались бы линейно зависимыми, что неверно. Более того, выражение (II.4.33) показывает, что оно имеет смысл разложения корневого «луча» $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ в виде суммы проекции в подпространство, натянутое на корневые «лучи» $\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ при $1 \leqslant m \leqslant k$ и $1 \leqslant n \leqslant q+1$, и вектора $\boldsymbol{\epsilon}$, ортогонального этому подпространству, т. е.

$$(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m) = (\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n) = 0, \quad \text{при } 1 \leqslant m \leqslant k \text{ и } 1 \leqslant n \leqslant q+1. \tag{II.4.34}$$

Умножим вектор (II.4.33) на $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ и получим согласно условию построения диаграммы Дынкина на рис. 2.9

$$(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c\Big(b_{q+1} - \tfrac{1}{2}\, b_q\Big) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Отсюда с учетом $b_{q+1} = -1$ и $b_q = -q/(q+1)$ (см. формулы (II.4.31))

$$c\left(1 - \frac{q}{2(q+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}\,\frac{q+1}{q+2}.$$

Ортогональный к подпространству, натянутому на векторы корневых «лучей» $\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n\}$, вектор $\boldsymbol{\epsilon}$ не может быть равен нулю, так как вектор $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ линейно независим от других простых положительных корней в разложении. Следовательно, строго $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}) > 0$, так что согласно (II.4.33)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m - c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n.$$

В силу условий ортогональности остаточного вектора $\boldsymbol{\epsilon}$ подпространству, натянутому на векторы корневых «лучей» $\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ в (II.4.32), найдем, что

$$(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}) = (\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m - c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n, \boldsymbol{\epsilon}) = (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\epsilon}) > 0,$$

а значит,

$$(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\epsilon}) = (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m - c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n) = 1 + \tfrac{1}{2}\, a_k + c\, b_{q+1} \tfrac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Подставляя выражения для коэффициентов, элементарное сложение дробей дает

$$1 - \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} - \frac{q+1}{q+2} = \frac{1}{2(k+1)(q+2)}\,(2 - kq) > 0 \quad \Rightarrow \quad kq < 2.$$

Это условие удовлетворяется либо при $k = q = 1$, либо при произвольном k и $q = 0$, либо при произвольном q и $k = 0$ (визуально эти два случая не отличаются, если не рассматривать направление, которое необходимо указать на двойной линии от длинного корня к короткому, так что оба случая сводятся друг к другу просто сменой обозначений $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\eta}}$).

Таким образом, при наличии двойного соединения допустимы диаграммы Дынкина, показанные на рис. 2.10.

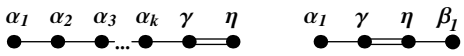


Рис. 2.10: Допустимые схемы Дынкина с двойной линией.

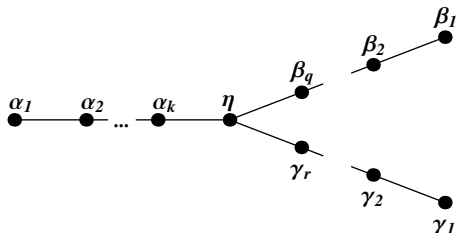


Рис. 2.11: Диаграмма Дынкина с ветвлением.

• **Ограничение на диаграмму с ветвлением**

Разложим центр ветвления $\boldsymbol{\eta}$ (см. рис. 2.11) по проекциям в подпространство остальных корней в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m + \sum_{n=1}^{q} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n + \sum_{j=1}^{r} c_j \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_j + \boldsymbol{\epsilon},$$

где коэффициенты разложения фактически уже были установлены нами чуть выше

$$a_m = -\frac{m}{k+1}, \quad b_n = -\frac{n}{q+1}, \quad c_j = -\frac{j}{r+1}.$$

Линейная независимость простых корневых векторов означает, что вектор $\boldsymbol{\epsilon}$ имеет положительную норму, откуда в силу ортогональности вектора $\boldsymbol{\epsilon}$ подпространству линейной оболочки корней $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_n$ и $\boldsymbol{\gamma}_j$

$$(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}) = (\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\epsilon}) = (\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}} - \sum_{m=1}^{k} a_m \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m - \sum_{n=1}^{q} b_n \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n - \sum_{j=1}^{r} c_j \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_j) = 1 + \tfrac{1}{2}\,(a_k + b_q + c_r) > 0.$$

В итоге,

$$\frac{k}{k+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{r}{r+1} < 2. \tag{II.4.35}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$k \geqslant q \geqslant r \geqslant 1.$$

Легко перечислить все допустимые комбинации $\{k, q, r\}$, удовлетворяющие неравенству (II.4.35):

- при $r = q = 1$ находим $k < k + 1$, что справедливо при любых натуральных k;
- при $r = 1$, $q = 2$, $k \geqslant 2$ получаем $k/(k + 1) < 5/6$, что имеет место при $k = \{2, 3, 4\}$;
- при $r = 1$, $q \geqslant 3$ и $k \geqslant 3$ находим $k/(k + 1) < 3/4$, так что решений нет;
- при $q \geqslant r \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ имеем $k/(k + 1) < 2/3$, и решений нет.

Поэтому на связных диаграммах Дынкина с ветвлением допустимы две типовых ситуации, когда, во-первых, длина двух ветвей по числу их звеньев равна единице, а третья ветвь по длине неограничена, а, во-вторых, одна ветвь имеет единичную длину, вторая составлена из двух звеньев, а третья органичена длиной в четыре звена.

§5. Классификация простых компактных алгебр Ли

Последовательности простых компактных групп Ли и их матричная интерпретация, исключительные группы, особые группы, соотношения эквивалентности алгебр Ли.

Допустимые связные диаграммы Дынкина для простых компактных алгебр с учетом двух различных вариантов направления на двойной линии между парой корней от большего корня к меньшему при наличии других соединений этой пары с другими простыми положительными корнями сводятся к следующим семи типам.

- Последовательность A_n.



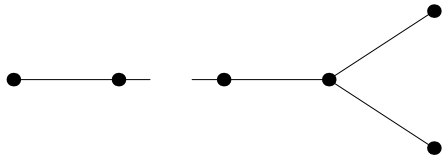
- Последовательность B_n.



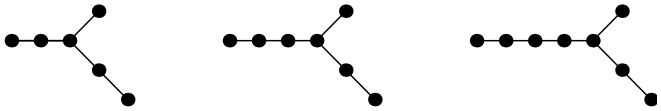
- Последовательность C_n.



- Последовательность D_n.



- Три так называемые исключительные (англ. exceptional) алгебры групп E_6, E_7, E_8.



- Особая алгебра группы F_4.

- Особая алгебра группы G_2.



Индекс в наименовании группы обозначает ранг группы — число наблюдаемых, характеризующих базис состояний, которое равно размерности подалгебры Картана и размерности векторного пространства корней.

Для последовательностей A_n, B_n, C_n, D_n ранг n ничем не ограничен, т. е. эти последовательности являются бесконечными: они отвечают классическим алгебрам Ли. Эти алгебры соответствуют группам Ли, которые возникают при рассмотрении линейных преобразований векторных пространств, т. е. они реализуются в некотором матричном виде, определяющем тип группы. Другими словами, у каждой классической алгебры Ли есть свое имя.

- Унитарные (U) квадратные матрицы $k \times k$ с единичным детерминантом (специальные (S))б $A^\dagger A = \mathbb{1}$, $\det A = 1$, определяют группу преобразований векторов в комплексном евклидовом пространстве, сохраняющих норму. Группа таких преобразований обозначается SU(k), а соответствующая алгебра $\mathfrak{su}(k)$. Эта алгебра совпадает с алгеброй типа A_n при $k = n + 1$.

- Специальные ортогональные преобразования квадратными матрицами $k \times k$: $A^{\mathrm{T}} A = 1$, $\det A = 1$, — определяют группу поворотов вещественных векторов в евклидовом пространстве, сохраняющих скалярное произведение векторов, SO(k) и ее алгебру генераторов $\mathfrak{so}(k)$, которая изоморфна алгебре B_n при нечетном числе размерности пространства $k = 2n + 1$ или алгебре D_n при четном числе измерений евлидова пространства $k = 2n$.

- В фазовом пространстве классической механики с n обобщенными координатами и отвечающими им канонически сопряженными импульсами $\{q_\alpha, p_\beta\}$ размерности $n + n = 2n$ скобка Пуассона

  $$\{q_\alpha; p_\beta\}_{\mathbb{P}} = -\{p_\beta; q_\alpha\}_{\mathbb{P}} = \delta_{\alpha\beta}$$

  не изменяется при канонических линейных преобразованиях векторов $\boldsymbol{x} = \{q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n\}$:

  $$\boldsymbol{x} = C \cdot \boldsymbol{x}' \quad \Leftrightarrow \quad x_\mu = C_\mu^{\bullet\,\nu} x'_\nu.$$

  В терминах компонент $\boldsymbol{x}$ скобка Пуассона принимает вид

  $$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\mu\lambda},$$

  где матрица Ω размером $(2n) \times (2n)$ имеет блочный вид

  $$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

  В штрихованных координатах фазового пространства по-прежнему

  $$\{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho},$$

  так что

  $$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = C_\mu^{\bullet\,\nu}\, C_\lambda^{\bullet\,\rho} \{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^{\bullet\,\nu}\, C_\lambda^{\bullet\,\rho} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^{\bullet\,\nu}\, (C^{\mathrm{T}})^\rho_{\bullet\,\lambda} = \Omega_{\mu\lambda}.$$

  Это значит, что в матричном виде имеется тождество

  $$C \cdot \Omega \cdot C^{\mathrm{T}} = \Omega,$$

  которое определяет симплектическую группу преобразований $\mathrm{Sp}(n)$ и ее алгебру $\mathfrak{sp}(n)$, которая совпадает с алгеброй типа C_n.

Таким образом, каждая классическая простая компактная алгебра соответствует вполне определенной матричной группе Ли.

В проведенной классификации алгебр Ли имеется ряд перекрывающихся наименований из-за совпадающих в некоторых случаях диаграмм Дынкина. Прежде всего, одинаковые диаграммы Дынкина возникают для алгебр A_1, B_1 и C_1, когда каждая из диаграмм сводится к единственной точке. Следовательно, возникающие для этих алгебр коммутационные соотношения для генераторов совпадают, что устанавливает изоморфизм соответствующих алгебр Ли

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1).$$

Первый из этих изоморфизмов хорошо знаком: коммутационные соотношения для орбитального момента группы поворотов SO(3), принимающего целые значения, совпадают с коммутационными соотношениями для группы поворотов спина SU(2), который может принимать и полуцелые значения. Второй изоморфизм отвечает инвариантности спинорной метрики

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно группы поворотов спина. Эта метрика совпадает с симплектической матрицей в фазовом пространстве классической механики частицы с одной степенью свободы.

Тождественны и диаграммы для алгебр B_2 и C_2: они сводятся к двум точкам, соединенным двойной линией. Это значит, что имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2).$$

При $n = 3$ ветвление на схеме D_3 вырождается: из точки ветвления не исходит третья линия, — и диаграмма сводится к типу A_3, что ведет к одинаковым коммутационным соотношениям в алгебрах

$$\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4).$$

Обычно особо указывают на случай D_2, когда на диаграмме Дынкина остаются только две крайних точки разветвления, а собственно точка ветвления просто отсутствует, что приводит не к связной диаграмме, а к двум отдельным точкам, каждая из которых отвечает алгебре группы поворотов трехмерного пространства, а значит,

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3),$$

т. е. алгебра группы поворотов четырехмерного евклидова пространства не является простой, а представляется в виде прямой суммы алгебры генераторов группы поворотов в трехмерном пространстве.

Указанные нами выше изоморфизмы позволяют уточнить классификацию простых компактных алгебр групп Ли путем перечисления только независимых классических алгебр:

A_n при $n \geqslant 1$; $\quad B_n$ при $n \geqslant 2$; $\quad C_n$ при $n \geqslant 3$; $\quad D_n$ при $n \geqslant 4$.

Схема Дынкина позволяет путем последовательных построений от простых положительных корней ко всем корням простой компактной группы Ли записать весь набор коммутаторов для генераторов алгебры Ли.

§6. Другие схемы и алгебры

Переход от базиса Картана–Вейля к генераторам Шевалле, комплексификация алгебры, алгебра Вирасоро, ассоциативные алгебры.

В современной математической физике наряду с представленной схемой изучения алгебр Ли используются и другие формулировки, часто встречающаяся в научной литературе. Для широты кругозора по теме книги опишем в ознакомительном стиле характерные связи между разными подходами.

6.1 Соотношения Серра

В математической литературе вместо базиса Картана–Вейля (Cartan, Weyl) принято вводить генераторы Шевалле (Chevalley)

$$\begin{aligned} &h_i = \kappa_i(\boldsymbol{\alpha}_i)_l \Gamma_l, \quad \text{суммирование по } l \text{ от 1 до } n,\ \boldsymbol{\alpha}_i \text{ — простой положительный корень,} \\ &e_i = \sqrt{\kappa_i}\,\Gamma_{\alpha_i}, \qquad i \in \overline{\{1, n\}}, \quad \text{нет суммирования по } i, \\ &f_i = \sqrt{\kappa_i}\,\Gamma_{-\alpha_i}, \end{aligned} \tag{II.6.1}$$

с нормировочным множителем

$$\kappa_i = \frac{2}{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)}. \tag{II.6.2}$$

В обозначениях (II.6.1), (II.6.2) алгебра генераторов подалгебры Картана h_i и повышающих и понижающих генераторов e_i и f_j, т. е. пар, каждая из которых сопоставлена простому положительному корню, сводится к соотношениям Серра (Serre):

для подалгебры Картана

$$[h_i, h_j] = \kappa_i\kappa_j(\boldsymbol{\alpha}_i)_l(\boldsymbol{\alpha}_j)_{l'}[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0,$$

для простых корней

$$[e_i, f_i] = \kappa_i[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_i}] = \kappa_i(\boldsymbol{\alpha}_i)_l\Gamma_l = h_i, \qquad [e_i, f_j] = \sqrt{\kappa_i\kappa_j}\,[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_j}] = 0, \quad \text{при } i \neq j,$$

для коммутатора генератора из подалгебры Картана с повышающими генераторами

$$[h_i, e_j] = \kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i)_l[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_j}] = \kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i)_l(\boldsymbol{\alpha}_j)_l\Gamma_{\alpha_j} = \kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)\Gamma_{\alpha_j} = a_{ij}e_j,$$

где нет суммирования по индексу j. С принятой нормировкой κ_i (II.6.2) матрица Картана a_{ij} согласно определению (II.4.21) на стр. 113 выражается через максимальное число шагов $\varkappa_{ij}^{\max}$, которое ограничивает серию положительных корней $\boldsymbol{\alpha}_j + \varkappa\boldsymbol{\alpha}_i$, см. (II.4.19) на стр. 113,

$$a_{ij} = \kappa_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = 2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)} = -\varkappa_{ij}^{\max}. \tag{II.6.3}$$

Заметим, что $a_{ii} = 2$. Матрица Картана представляет из себя алгебраический код для диаграмм Дынкина: недиагональный элемент $-a_{ij}$, отличный от нуля, указывает на то, что простые положительные корни $\boldsymbol{\alpha}_i$ и $\boldsymbol{\alpha}_j$ не ортогональны, и задает число шагов при построении положительных корней в $\boldsymbol{\alpha}_i$-цепочке, произведение $a_{ij}a_{ji}$ — это число линий, которые соединяют эти два простых положительных корня на диаграмме Дынкина, и если $a_{ij} > a_{ji}$, то на соединительной линии указывается направление от $\boldsymbol{\alpha}_i$ к $\boldsymbol{\alpha}_j$.

Коммутатор генератора из подалгебры Картана с понижающим генератором

$$[h_i, f_j] = \kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i)_l[\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha_j}] = -\kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i)_l(\boldsymbol{\alpha}_j)_l\Gamma_{-\alpha_j} = -\kappa_i\sqrt{\kappa_j}\,(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)\Gamma_{-\alpha_j} = -a_{ij}f_j.$$

Условие максимального числа шагов в серии, порожденной парой из множества простых положительных и отрицательных корней[86], записывают в виде действия матрицы генератора присоединенного представления на вектор присоединенного представления

$$\mathrm{ad}\,(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = \mathrm{ad}\,(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0,$$

так как по построению присоединенного представления (см. сноску к формуле (II.2.12))

$$\mathrm{ad}\,(e_i)(e_j) \equiv [e_i, e_j] = n_{ij}e_{i+j} \quad \Leftrightarrow \quad [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_j}] = N_{ij}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_j \overset{[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_j}]}{\longmapsto} \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\alpha}_i,$$

где согласно (II.4.15) $N_{ij}^2 = -(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$, откуда $n_{ij} = N_{ij}\sqrt{\kappa_i\kappa_j/\kappa_{i,j}}$ при $\kappa_{i,j} = 2(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}$. Поэтому

$$\mathrm{ad}\,(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}_j \overset{[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \ldots [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_j}]\ldots]]}{\longmapsto} \boldsymbol{\alpha}_j + (1 - a_{ij})\boldsymbol{\alpha}_i \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\alpha}_j \overset{[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \ldots [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_i}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_j}]\ldots]]}{\longmapsto} \boldsymbol{\alpha}_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max})\boldsymbol{\alpha}_i.$$

Так как $\varkappa_{ij}^{\max}$ задает максимальное число шагов в этой цепочке, то корневого вектора $\boldsymbol{\alpha}_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max})\boldsymbol{\alpha}_i$ не существует, и

$$\mathrm{ad}\,(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0.$$

Точно так же для цепочки из пары простых отрицательных корней $-(\boldsymbol{\alpha}_j + \varkappa\boldsymbol{\alpha}_i)$ получается

$$\mathrm{ad}\,(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0.$$

6.2 Алгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

В случае простой неабелевой алгебры ранга 1 набор всех генераторов в этой алгебре исчерпывается одним картановским h, одним повышающим e и одним понижающим оператором f, а матрица Картана имеет единственный элемент $a_{11} = 2$. Тогда все возможные коммутаторы записываются в виде

$$[h, h] = 0, \quad [h, e] = 2\,e, \quad [h, f] = -2\,f, \quad [e, f] = h. \tag{II.6.4}$$

Эту алгебру принято называть $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, имея в виду введение трех комплексных, а не вещественных групповых координат $\{a_h, a_e, a_f\} \in \mathbb{C}^3$. При вещественных групповых координатах генераторы

$$s_z \equiv T_3 = \tfrac{1}{2}h, \quad s_+ \equiv T_+ = e, \quad s_- \equiv T_- = f$$

реализуют алгебру $\mathfrak{su}(2)$:

$$[s_z, s_\pm] = \pm s_\pm, \quad [s_+, s_-] = 2\,s_z.$$

Комплексификация групповых координат позволяет строить теорию алгебр Ли, в которой доказываются теоремы, которые в ряде случаев не имеют места для вещественных групповых координат.

Определяющее экспоненциальное представление для группы с матричной алгеброй $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ получается при рассмотрении генераторов, заданных в виде матриц Паули размером 2×2

$$\boldsymbol{s} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma},$$

и групповых координат с вещественной и мнимой частью

$$\boldsymbol{a}: \quad \mathfrak{Re}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}, \quad \mathfrak{Im}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\vartheta},$$

так что элемент группы — это матрица вида

$$M = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\phi} + \mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta})\right).$$

Групповые параметры $\boldsymbol{\phi}$ — это углы поворотов, а $\boldsymbol{\vartheta}$ называют углами гипер-поворотов, физический смысл которых раскрывается при исследовании группы Лоренца: гипер-углы описывают лоренцевы бусты, т. е. преобразования перехода от одной инерциальной системы отсчета к движущейся инерциальной системе.

[86] На стр. 113 мы описали процедуру построения последовательности из двух простых положительных корней $\boldsymbol{\alpha}_j + \varkappa\boldsymbol{\alpha}_i$, что в обозначениях Шевалле соответствует действию генераторов e_i на генераторы e_j в присоединенном представлении. В отношении простых отрицательных корневых векторов и генераторов f_i строятся понижающие последовательности корней $-\boldsymbol{\alpha}_j - \varkappa\boldsymbol{\alpha}_i$ с такими же свойствами: максимальное число понижений задается все тем же числом $\varkappa_{ij}^{\max}$.

Поскольку $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}$, а матрицы Паули бесследовые,

$$\det M = 1.$$

К тому же для матрицы вида $M = \mathrm{e}^A$ существует обратная матрица $M^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ — это унимодулярные, обратимые матрицы M преобразований двухкомпонентных комплекснозначных столбцов. Обратимость является менее строгим условием, чем унитарность, так что групповые координаты могут принимать комплексные значения. В физике эта группа возникает при рассмотрении группы Лоренца, т. е. специальных (S) ортогональных (O) изометрий метрики Минковского. Эта группа обозначается как SO(3,1) и включает в себя повороты в трех пространственных плоскостях и лоренцевы бусты в трех пространственно-временных плоскостях. Лоренцевы бусты задаются гипер-углами преобразований. Алгебра шестипараметрической группы Лоренца изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, так как 3 угла поворотов можно рассматривать как вещественные части, а 3 гипер-угла лоренцевых бустов — как мнимые части трех комплексных параметров группы. Если же допустить представления с полуцелыми значениями спина подалгебр $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то группа SO(3,1) обобщается до $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ так же, как происходит обобщение SO(3) до SU(2).

6.3 Алгебра Витта и Вирасоро

В качестве примера бесконечномерной алгебры рассмотрим преобразования мономов вида z^k, где z — это комплексное число на единичной окружности, т. е. $|z| = 1$, а L_n — это оператор

$$z^k \overset{L_n}{\longmapsto} z^{k+n}, \qquad \{k,n\} \in \mathbb{Z}$$

и

$$L_n \overset{\text{def}}{=} -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{II.6.5}$$

Тогда вычисление коммутатора этих генераторов при действии на произвольную функцию $f(z)$ дает

$$\begin{aligned}[L_n, L_m]f(z) &= \left(z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z} - z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z}z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\right) f(z) = \\ &= z^{n+1}(m+1)z^m\frac{\partial}{\partial z}f(z) + z^{n+m+2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) - z^{m+1}(n+1)z^n\frac{\partial}{\partial z}f(z) - z^{n+m+2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) = \\ &= (m-n)z^{n+m+1}\frac{\partial}{\partial z}f(z).\end{aligned}$$

Эли Картан ввел алгебру операторов

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}, \tag{II.6.6}$$

которая называется алгеброй Витта по имени немецкого математика, который провел ряд значимых исследований этой алгебры.

Современные применения этой алгебры возникли при изучении изометрий на горизонтах черных дыр, а также в двумерных конформных теориях, где в силу квантовых эффектов алгебра обобщается за счет включения центрального заряда C и принимает вид алгебры Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}\,n(n^2-1)\,C\,\delta_{n,-m}, \qquad [L_n, C] = 0. \tag{II.6.7}$$

Задача 25. Покажите, что все центральные расширения алгебры Витта эквивалентны алгебре Вирасоро.

Решение. Произвольное расширение алгебры Витта строится путем сдвига генераторов на произвольные числа $L_n \mapsto L_n + a_n = L'_n$, так что в общем виде

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + f_{n,m} \;\mapsto\; [L'_n, L'_m] = (n-m)L'_{n+m} - (n-m)a_{n+m} + f_{n,m} = (n-m)L'_{n+m} + f'_{n,m},$$

где по построению постоянные $f_{n,m} = -f_{m,n}$ и, в частности, $f_{0,0} = 0$. Воспользуемся произволом в определении констант a_n и покажем, что при подходящем выборе единственно возможным выражением для постоянных $f_{n,m}$ может быть только формула вида

$$f_{n,m} \sim n(n^2-1)\,\delta_{n+m,0}.$$

Сначала, опуская штрихи для генераторов алгебры со сдвигом в выражении

$$[L'_n, L'_m] = (n-m)L'_{n+m} - (n-m)a_{n+m} + f_{n,m},$$

запишем

$$[L_0, L_n] = -n\,L_n + n\,a_n + f_{0,n}.$$

При $n \neq 0$ полагая $a_n = -f_{0,n}/n$, найдем, что вклад центральных зарядов равен нулю, так как

$$f'_{n,m} = -(n-m)a_{n+m} + f_{n,m},$$

т. е.

$$f'_{0,n} = 0 \quad \text{в} \quad [L'_n, L'_m] = (n-m)L'_{n+m} + f'_{n,m}. \tag{II.6.8}$$

Теперь запишем необходимое условие того, что алгебра является алгеброй Ли, а именно, запишем тождество Якоби с учетом того, что в алгебре Витта без центральных зарядов тождество Якоби выполнено, так что необходимо выделять только вклад с центральными зарядами:

$$[[L_n.L_m],L_k]+[[L_m,L_k],L_n]+[[L_k,L_n],L_m]=0 \quad \Rightarrow$$
$$(n-m)f_{n+m,k}+(m-k)f_{m+k,n}+(k-n)f_{k+n,m}=0. \tag{II.6.9}$$

Если $k=0$, то первое слагаемое обращается в нуль, поскольку $f_{n+m,0}=0$. С учетом антисимметрии $f_{n,m}=-f_{m,n}$ получаем

$$m\,f_{m,n}-n\,f_{n,m}=0 \quad \Rightarrow \quad (m+n)f_{m,n}=0.$$

При $m+n\neq 0$ заключаем, что вклад центральных зарядов в коммутатор равен нулю, а для отличных от нуля членов находим

$$f_{n,m}\sim\delta_{n+m,0}. \tag{II.6.10}$$

Тогда в тождествах Якоби (II.6.9) положим $k=-n-m$ и найдем, что

$$(n-m)f_{n+m,-(n+m)}+(2m+n)f_{-n,n}-(2n+m)f_{-m,m}=0. \tag{II.6.11}$$

Это тождество можно использовать для рекуррентной связи, если положить $m=1$, например,

$$(n-1)f_{n+1,-(n+1)}+(2+n)f_{-n,n}-(2n+1)f_{-1,1}=0. \tag{II.6.12}$$

Здесь уместно посмотреть на $f_{-1,1}$, исходя из коммутатора

$$[L_{-1},L_1]=-2(L_0+a_0)+2a_0+f_{-1,1},$$

так что при $a_0=-f_{-1,1}/2$ получим для переопределенных генераторов $f'_{-1,1}=0$. Тогда рекуррентное соотношение (II.6.12) сведется к виду

$$(n-1)f_{n+1,-(n+1)}=(2+n)f_{n,-n}. \tag{II.6.13}$$

Поскольку $f_{n,-n}$ обращается в нуль при $n=0,\pm1$, перейдем к форме записи

$$f_{n,-n}=(n-1)n(n+1)k_n.$$

Рекурсия (II.6.13) при $n\neq 0,\pm1,-2$ дает

$$(n-1)n(n+1)(n+2)k_{n+1}=(n+2)(n-1)n(n+1)k_n \quad \Rightarrow \quad k_{n+1}=k_n.$$

Таким образом, если ввести обозначение для оставшегося произвольным коэффициента $k_2=C/12$, мы приходим к стандартному выражению для алгебры Вирасоро с центральным зарядом (II.6.7).

Интересно, что, если ограничиться подалгеброй $\{L_{-1},L_0,L_{+1}\}$, коммутационные соотношения операторов этой подалгебры принимают вид

$$[L_0,L_0]=0, \quad [L_0,L_{-1}]=L_{-1}, \quad [L_0,L_{+1}]=-L_{+1}, \quad [L_{-1},L_{+1}]=-2L_0,$$

а переобозначения

$$L_0\mapsto-\tfrac{1}{2}h, \quad L_{-1}\mapsto \mathrm{i}f, \quad L_{+1}\mapsto \mathrm{i}e$$

приводят к коммутаторам алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ согласно (II.6.4).

6.4 Ассоциативные алгебры

Векторное пространство является алгеброй Ли, если в нем задана скобка Ли — линейная бинарная операция элементов алгебры, антисимметричная по перестановке аргументов этой операции и подчиняющаяся тождеству Якоби. В математике рассматривают более общие алгебры — векторные пространства с бинарной операцией умножения элементов, в частности, ассоциативные алгебры, когда при последовательном умножении более двух элементов векторного пространства расстановка скобок при попарном умножении не меняет результат умножения, так что скобки можно не писать. Тогда базис ассоциативной алгебры образован множеством следующих элементов: во-первых, это независимые, заданные по определению в качестве исходных, упорядоченные по именам или номерам элементы алгебры $\Gamma_a=\{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots\}$, которые называются образующими алгебры; во-вторых, это произведения образующих алгебры, упорядоченные по увеличению номеров образующих алгебры в произведении. Например, вторая степень: $\Gamma_1\cdot\Gamma_2$, $\Gamma_1\cdot\Gamma_3$, или третья степень: $\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot\Gamma_3$, так что произведение двух образующих в обратном порядке выражается через произведение в прямом порядке с помощью *определяющего ассоциативную алгебру правила умножения элементов*:

$$\Gamma_b\cdot\Gamma_a=\sigma_{ba}\Gamma_a\cdot\Gamma_b+\mathrm{i}f^c_{ba}\Gamma_c,$$

где σ_{ba} и f^c_{ba} — это числа. Это значит, что однородное произведение генераторов, в котором есть произведения с обратным порядком следования двух генераторов, можно преобразовать к сумме однородного произведения генераторов с прямым следованием генераторов в произведении и однородного произведения генераторов со степенью однородности на единицу меньше. Например,

$$\Gamma_1\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_2=\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot\Gamma_3+\Gamma_1\cdot\mathrm{i}f^a_{32}\Gamma_a.$$

Таким образом линейно независимым базисом элементов в таком векторном пространстве будут только однородные произведения образующих алгебры с прямым порядком следования.

Тогда алгебру Ли можно легко преобразовать в ассоциативную алгебру, если «раскрыть» коммутатор в виде умножения, используя полную аналогию с матричным умножением в представлении. А именно, запись коммутатора в виде

$$\Gamma_\alpha\cdot\Gamma_\beta = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma + \Gamma_\beta\cdot\Gamma_\alpha$$

задает правило вычисления упорядоченного произведения генераторов, указанного в левой части равенства, через произведение генераторов с обратным порядком в произведении. В таком случае говорят, что генераторы алгебры Ли — это образующие элементы абстрактной ассоциативной алгебры (векторного пространства с умножением элементов «без расстановки скобок»), так что элемент ассоциативной алгебры, заданный как упорядоченное произведение $\Gamma_\alpha\cdot\Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha|\beta}$ выражается через образующие и элемент ассоциативной алгебры с другим порядком умножения,

$$\Gamma_{\alpha|\beta} = \mathrm{i}\, f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma + \Gamma_{\beta|\alpha},$$

так что элементы $\Gamma_{\alpha|\beta}$ и $\Gamma_{\beta|\alpha}$ не являются линейно независимыми, и в базис ассоциативной алгебры может быть включен только один из них (с прямым порядком следования номеров образующих алгебры). Абстрактная ассоциативная алгебра, построенная по алгебре Ли, отвечает группе, которая называется универсальной обертывающей группой для исходной группы Ли с теми же структурными константами. Не углубляясь в эти построения, скажем только, что алгебры Ли исходной группы Ли и универсальной обертывающей группы по построению изоморфны.

• Алгебра Клиффорда

Алгебра Клиффорда используется для построения представлений алгебры Ли группы Лоренца в пространствах Минковского произвольной размерности. Образующие алгебры — матрицы $\mathbb{1}$ и γ^μ, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям,

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\cdot\mathbb{1}, \tag{II.6.14}$$

где $g^{\mu\nu}$ — обратная D-мерная метрика Минковского с сигнатурой $(+,-,-,\ldots,-)$. Этот антикоммутатор определяет ассоциативную алгебру Клиффорда. Поскольку произведение гамма-матриц равно полусумме коммутатора и антикоммутатора,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\big([\gamma^\mu,\gamma^\nu] + \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\big),$$

то это произведение по определению алгебры Клиффорда выражается через единичную матрицу и коммутатор. Таким образом из образующих с помощью коммутатора можно построить новые элементы алгебры Клиффорда — заданные в виде коммутатора антисимметричные по перестановкам индексов генераторы группы Лоренца для преобразований поворотов в плоскости (x^μ,x^ν) при $\mu\neq 0$ и $\nu\neq 0$ или гипер-поворотов в плоскости $(x^{(0)},x^\nu)$ или $(x^\mu,x^{(0)})$:

$$S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]. \tag{II.6.15}$$

Коммутатор

$$[S^{\mu\nu},S^{\mu'\nu'}] = -\mathrm{i}\Big(g^{\mu\mu'}S^{\nu\nu'} - g^{\mu\nu'}S^{\nu\mu'} - g^{\nu\mu'}S^{\mu\nu'} + g^{\nu\nu'}S^{\mu\mu'}\Big) \tag{II.6.16}$$

задает алгебру линейных преобразований–изометрий, которые при бесконечно малых элементах антисимметричного тензора Картана $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ имеют вид

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu \tag{II.6.17}$$

и сохраняют псевдоевклидов квадрат вектора пространства Минковского (учитываем равенство нулю свертки симметричной матрицы с антисимметричной)

$$\big(x'\big)^2 = g^{\mu\mu'}x'_\mu x'_{\mu'} = g^{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'} + g^{\mu\mu'}x_\mu\omega_{\mu'\nu'}x^{\nu'} + g^{\mu\mu'}x_{\mu'}\omega_{\mu\nu}x^\nu = x^2 + \omega_{\mu'\nu'}x^{\mu'}x^{\nu'} + \omega_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^2.$$

Рассмотрим сначала определяющее группу представление преобразования координат пространства-времени Минковского (II.6.17) в матричной форме[87]

$$x'^\lambda = \big(\delta^\lambda_\rho + \omega^\lambda_{\bullet\,\rho}\big)x^\rho = \Big(\mathbb{1}^\lambda_{\bullet\,\rho} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\Sigma^{\mu\nu}\big)^\lambda_{\bullet\,\rho}\omega_{\mu\nu}\Big)x^\rho, \tag{II.6.18}$$

где генераторы имеют вид

$$\big(\Sigma^{\mu\nu}\big)^\lambda_{\bullet\,\rho} = \mathrm{i}\Big(g^{\mu\lambda}\delta^\nu_\rho - g^{\nu\lambda}\delta^\mu_\rho\Big). \tag{II.6.19}$$

Перемножим матрицы генераторов в прямом порядке

$$\big(\Sigma^{\mu\nu}\big)^\lambda_{\bullet\,\rho'}\big(\Sigma^{\mu'\nu'}\big)^{\rho'}_{\bullet\,\rho} = \mathrm{i}^2\Big(g^{\mu\lambda}\delta^\nu_{\rho'} - g^{\nu\lambda}\delta^\mu_{\rho'}\Big)\Big(g^{\mu'\rho'}\delta^{\nu'}_\rho - g^{\nu'\rho'}\delta^{\mu'}_\rho\Big) =$$
$$= \mathrm{i}^2\Big(g^{\mu\lambda}\big(g^{\mu'\nu}\delta^{\nu'}_\rho - g^{\nu\nu'}\delta^{\mu'}_\rho\big) - g^{\nu\lambda}\big(g^{\mu\mu'}\delta^{\nu'}_\rho - g^{\mu\nu'}\delta^{\mu'}_\rho\big)\Big)$$

[87] Заметьте, что в группе Лоренца при определении генератора введен множитель $1/2$ ввиду антисимметричности тензора параметров преобразования $\omega_{\mu\nu}$.

и в обратном

$$\big(\Sigma^{\mu'\nu'}\big)^{\lambda}_{\bullet\,\rho'}\big(\Sigma^{\mu\nu}\big)^{\rho'}_{\bullet\,\rho}=\mathrm{i}^2\Big(g^{\mu'\lambda}\big(g^{\mu\nu'}\delta^{\nu}_{\rho}-g^{\nu\nu'}\delta^{\mu}_{\rho}\big)-g^{\nu'\lambda}\big(g^{\mu\mu'}\delta^{\nu}_{\rho}-g^{\mu'\nu}\delta^{\mu}_{\rho}\big)\Big).$$

Тогда в коммутаторе сгруппируем вклады так, чтобы выявить вклады матриц генераторов:

$$\begin{aligned}\big[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\mu'\nu'}\big]^{\lambda}_{\bullet\,\rho}=\mathrm{i}^2\Big(&-g^{\mu\mu'}\big(g^{\nu\lambda}\delta^{\nu'}_{\rho}-g^{\nu'\lambda}\delta^{\nu}_{\rho}\big)-g^{\mu\nu'}\big(g^{\mu'\lambda}\delta^{\nu}_{\rho}-g^{\nu\lambda}\delta^{\nu'}_{\rho}\big)+\\&+g^{\mu'\nu}\big(g^{\mu\lambda}\delta^{\nu'}_{\rho}-g^{\nu'\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\big)-g^{\nu\nu'}\big(g^{\mu\lambda}\delta^{\mu'}_{\rho}-g^{\mu'\lambda}\delta^{\nu}_{\rho}\big)\Big)=\\&=-\mathrm{i}\Big(g^{\mu\mu'}\big(\Sigma^{\nu\nu'}\big)^{\lambda}_{\bullet\,\rho}-g^{\mu\nu'}\big(\Sigma^{\nu\mu'}\big)^{\lambda}_{\bullet\,\rho}-g^{\nu\mu'}\big(\Sigma^{\mu\nu'}\big)^{\lambda}_{\bullet\,\rho}+g^{\nu\nu'}\big(\Sigma^{\mu\mu'}\big)^{\lambda}_{\bullet\,\rho}.\Big)\end{aligned}\qquad\text{(II.6.20)}$$

Этот коммутатор, полученный в определяющем представлении для преобразования координат пространства Минковского, задает скобку Ли в алгебре генераторов группы Лоренца.

Физический смысл параметров преобразования становится ясным, если сначала рассмотреть вклад компонент $\omega_{0\alpha}$, где индекс «альфа» пробегает значения от 1 до 3 для пространственных координат, так что

$$x'^{(0)}=x^{(0)}+\delta^{(00)}\omega_{0\alpha}x^{\alpha},\qquad x'^{\beta}=x^{\beta}-\delta^{\beta\beta'}\omega_{\beta'0}x^{(0)},$$

что представляет из себя преобразование бесконечно малого лоренцева буста со скоростью

$$v^{\alpha}=\omega^{0\alpha}=-\delta^{\alpha\alpha'}\delta^{(00)}\omega_{0\alpha'}.$$

Вклад компонент $\omega_{\alpha\beta}$

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}-\omega^{\alpha\beta'}\delta_{\beta'\beta}x^{\beta}$$

можно записать с помощью тензора Леви-Чивиты при $\epsilon^{(123)}=+1$, выразив компоненты параметров преобразований через вектор ϕ^{γ}

$$\omega^{\alpha\beta'}=\epsilon^{\alpha\beta'\gamma'}\delta_{\gamma'\gamma}\phi^{\gamma},$$

откуда

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x},$$

что представляет из себя поворот вектора координат на угол ϕ вокруг оси $\boldsymbol{\phi}/\phi$.

Для вычисления коммутаторов величин $S^{\mu\nu}$, введенных в алгебре Клиффорда согласно (II.6.15), заметим, что

$$[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]=\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-(2g^{\mu}\nu-\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})=2(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-g^{\mu\nu}).$$

Поэтому при вычислении коммутатора найдем

$$[S^{\mu\nu},S^{\mu'\nu'}]=\frac{\mathrm{i}}{4}[[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}],S^{\mu'\nu'}]=\mathrm{i}^2\frac{1}{16}[2\gamma^{\mu}\gamma^{\nu},[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu'}]].$$

Если воспользоваться стандартным выражением

$$[AB,C]=[A,C]B+A[B,C],$$

то возникают коммутаторы вида

$$[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu},[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu'}]]=[\gamma^{\mu},[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu'}]]\gamma^{\nu}+\gamma^{\mu}[\gamma^{\nu},[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu'}]].$$

Двойной коммутатор вычисляется с использованием перестановок гамма-матриц в алгебре Клиффорда:

$$\begin{aligned}[\gamma^{\mu},[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu'}]]=[\gamma^{\mu},2\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}]=2(\gamma^{\mu}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}-\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu})=2(2g^{\mu\mu'}\gamma^{\nu'}-\gamma^{\mu'}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu'}-\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu})=\\=2(2g^{\mu\mu'}\gamma^{\nu'}-\gamma^{\mu'}2g^{\mu\nu'}+\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu}-\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu})=4(g^{\mu\mu'}\gamma^{\nu'}-g^{\mu\nu'}\gamma^{\mu'}).\end{aligned}$$

Использование таких выражений приводит к формуле

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu},S^{\mu'\nu'}]=\mathrm{i}^2\frac{1}{2}\big((g^{\mu\mu'}\gamma^{\nu'}-g^{\mu\nu'}\gamma^{\mu'})\gamma^{\nu}+\gamma^{\mu}(g^{\nu\mu'}\gamma^{\nu'}-g^{\nu\nu'}\gamma^{\mu'})\big)=\\=\mathrm{i}^2\frac{1}{2}\Big(g^{\mu\mu'}\Big(\frac{1}{2}[\gamma^{\nu'},\gamma^{\nu}]+\frac{1}{2}\{\gamma^{\nu'},\gamma^{\nu}\}\Big)-g^{\mu\nu'}\Big(\frac{1}{2}[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu}]+\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu}\}\Big)+\\+g^{\nu\mu'}\Big(\frac{1}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu'}]+\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu'}\}\Big)-g^{\nu\nu'}\Big(\frac{1}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\mu'}]+\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\mu'}\}\Big)\Big).\end{aligned}$$

В этом выражении все вклады с антикоммутаторами выражаются через метрику и сокращаются. В итоге находим

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu},S^{\mu'\nu'}]=\mathrm{i}\Big(g^{\mu\mu'}\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\nu'},\gamma^{\nu}]-g^{\mu\nu'}\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu'},\gamma^{\nu}]+g^{\nu\mu'}\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu'}]-g^{\nu\nu'}\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\mu'}]\Big)=\\=-\mathrm{i}\Big(g^{\mu\mu'}S^{\nu\nu'}-g^{\mu\nu'}S^{\nu\mu'}-g^{\nu\mu'}S^{\mu\nu'}+g^{\nu\nu'}S^{\mu\mu'}\Big).\end{aligned}$$

Итак, построение генераторов группы Лоренца в алгебре Клиффорда проводится в произвольном числе измерений, чем и объяснятся использование этой алгебры в теоретических построениях, например, с дополнительными пространственными измерениями.

В этой алгебре важную роль играет матрица киральности, построенная в виде полностью антисимметричного произведения всех D гамма-матриц,

$$\gamma_{\rm ch} = \frac{1}{D!}\,\mathrm{i}\,\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_D}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_D}, \qquad \epsilon_{12\ldots D} = +1. \tag{II.6.21}$$

При нечетной размерности пространства Минковского матрица киральности коммутирует с любой из гамма-матриц:

$$[\gamma^\mu, \gamma_{\rm ch}] = 0,$$

поскольку перестановка γ^μ с самой собой не меняет знак в произведении, и перестановка с четным числом других гамма-матриц меняет знак четное число раз, а вклад от метрики обращается в нуль при свертке с тензором Леви-Чивиты, так что искомый коммутатор обращается в нуль. Точно также обратятся в нуль и коммутаторы $\gamma_{\rm ch}$ с любым произведением гамма-матриц. Это значит, что матрица киральности пропорциональна единичной матрице в нечетном числе измерений, т. е. она тривиальна и не имеет особого физического смысла. Но в четном числе измерений матрица киральности отличается от единичной.

• Квантовые алгебры

Ассоциативные алгебры, в которых в определение перестановочных соотношений в явном виде введен множитель в виде постоянной Планка $\hbar$

$$\Gamma_b\cdot\Gamma_a = \sigma_{ba}\Gamma_a\cdot\Gamma_b + \hbar\cdot\mathrm{i}f^c_{ba}\Gamma_c,$$

называют квантовыми. Процедура приведения произведения образующих элементов алгебры к упорядоченному виду приводит к возникновению степенных по постоянной Планка полиномиальных выражений.

Например, в алгебре $\mathfrak{sl}_2$ введение «кванта» $\hbar$ дает связи

$$eh = he - 2\hbar\,e, \qquad fh = hf + 2\hbar\,f, \qquad fe = ef - \hbar\,h.$$

Поэтому разложение произведения в сумму по упорядоченным произведением принимает вид полинома по $\hbar$:

$$f^2e = f(ef-\hbar h) = (fe)f - \hbar fh = (ef-\hbar\,h)f - \hbar\,(hf+2\hbar\,f) = ef^2 - 2\hbar\,hf - 2\hbar^2\,f.$$

Квантовые алгебры находят широкое применение в математической физике точно решаемых задач.

Глава 3

Алгебры Ли, неприводимые представления и физические идеи

В этой главе мы изучим примеры алгебр Ли, важные для квантовой механики и физики элементарных частиц, общую схему построения неприводимых представлений старшего веса и ее применение к группам SU(2) и SU(3), схемы Юнга для неприводимых представлений группы SU(3), построение схем Юнга для разложения тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, а также физически содержательные примеры применения теории представлений к описанию реальных свойств при классификации элементарных частиц, а также симметрии сильного и слабого взаимодействий. Наконец, мы изложим теоретико-групповой подход к калибровочной гипотезе и к теории великого объединения калибровочных взаимодействий.

§1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$

От общего формализма к генераторам и операторам Казимира алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$, повышающие и понижающие корневые операторы, масштаб групповых координат и конформный множитель в евклидовой метрике, выбор осей подалгебры Картана в алгебре $\mathfrak{su}(3)$, структурные константы, связь формул в базисе Картана–Вейля и в физических приложениях квантовой механики и физики частиц. Масштабы и единицы измерения физических величин, размерных и безразмерных.

1.1 $\mathfrak{su}(2)$

Алгебре группы поворотов спиноров $\mathfrak{su}(2)$ отвечает простейшая схема Дынкина — точка. Следовательно, ранг группы равен единице, т. е. один генератор в подалгебре Картана и единственный положительный корень, которому соответствует такой же по величине отрицательный. Обозначим генератор, составляющий подалгебру Картана в $\mathfrak{su}(2)$, который в физической терминологии можно назвать наблюдаемой величиной, символом Γ_z, а повышающий из корневого дополнения — символом Γ_+. Эрмитово сопряженный ему понижающий корневой оператор — символом Γ_-. Это единственный простой положительный корень, и ему соответствуют два корневых оператора: повышающий, соответствующий собственно положительному корню $\alpha_z > 0$, и понижающий, соответствующий такому же по величине корню со знаком минус $-(\alpha_z)$. Весовые векторы и два корневых вектора — одномерные, поэтому для $\mathfrak{su}(2)$ будем называть их весами и корнями.

В базисе Картана–Вейля (II.3.51) коммутационные соотношения имеют вид

$$[\Gamma_z, \Gamma_\pm] = \pm\alpha_z\,\Gamma_\pm, \qquad [\Gamma_+, \Gamma_-] = \alpha_z\,\Gamma_z, \qquad \alpha_z > 0. \tag{III.1.1}$$

Введем эрмитовы операторы

$$\Gamma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_+ + \Gamma_-), \qquad \Gamma_y = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\Gamma_+ - \Gamma_-),$$

для которых коммутационные соотношения примут вид

$$[\Gamma_x, \Gamma_y] = \mathrm{i}\,\alpha_z\,\Gamma_z, \qquad [\Gamma_y, \Gamma_z] = \mathrm{i}\,\alpha_z\,\Gamma_x, \qquad [\Gamma_z, \Gamma_x] = \mathrm{i}\,\alpha_z\,\Gamma_y,$$

которые с помощью полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты можно переписать в виде[1]

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \mathrm{i}\,\alpha_z\,\epsilon_{abc'}\delta^{c'c}\,\Gamma_c, \qquad a, b, c \in \{x, y, z\}. \tag{III.1.2}$$

Если положить[2]

$$\alpha_z = 1,$$

[1] Поднимание и опускание индексов производится только с помощью метрики Киллинга. В противном случае мы явно указываем символ Кронекера.

[2] Можно ввести и размерную величину $\alpha_z = \hbar$ в процедуре канонического квантования. Напомним, что при каноническом квантовании коммутаторы наблюдаемых величин определены умножением их скобки Пуассона на множитель $\mathrm{i}\hbar$. Размерный момент количества движения $\hat{\boldsymbol{J}} = \hbar\hat{\boldsymbol{j}}$. Тогда $\hat{\boldsymbol{j}} \equiv \boldsymbol{\Gamma}/\alpha_z$, что верно не только при $\alpha_z = \hbar$, но и при любых ненулевых $\alpha_z \neq 0$.

то мы придем к стандартному выбору нормировки повышающего оператора в теории момента количества движения $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, когда $\boldsymbol{L} = \hbar \boldsymbol{l}$, а алгебра генераторов вращений[3] $\boldsymbol{l}$ отождествляется с алгеброй операторов $\hat{\boldsymbol{j}}$,

$$\Gamma_z \equiv \hat{j}_z, \quad \Gamma_x \equiv \hat{j}_x, \quad \Gamma_y \equiv \hat{j}_y, \qquad \Gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Gamma_x \pm \mathrm{i}\Gamma_y\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\, \hat{j}_\pm. \tag{III.1.3}$$

Определение метрики Киллинга в общем случае (II.2.19) для алгебры $\mathfrak{su}(2)$ при учете (III.1.2), из которой следует, что $f^c_{ab} = \alpha_z \epsilon_{abc'} \delta^{c'c}$, дает

$$g_{ab} = -f^{a_3}_{aa_2} f^{a_2}_{ba_3} = -\alpha_z^2 \epsilon_{aa_2a'_3} \epsilon_{ba_3a'_2} \delta^{a'_3a_3} \delta^{a'_2a_2} = 2\alpha_z^2\, \delta_{ab}. \tag{III.1.4}$$

Нам достаточно, чтобы эта метрика была пропорциональна единичной матрице: тогда структурные константы полностью антисимметричны по перестановкам любой пары из трех индексов.

Квадратичный оператор Казимира — единственный независимый инвариант группы поворотов в том смысле, что все иные инварианты этой группы являются функциями этого инварианта[4], — задается выражением $C_2 = g^{ab}\, \Gamma_a \Gamma_b$. Заметим, что это выражение для инварианта написано для случая, когда все генераторы алгебры эрмитовы, т. е. не в базисе Картана-Вейля. Обратная метрика $g^{ab} = \delta^{ab}/(2\alpha_z^2)$ вычисляется как матрица, обратная к g_{ab} в (III.1.4), так что для повышающих и понижающих операторов в базисе Картана–Вейля (II.3.51) элементы метрики имеют те же значения, что и для генератора подалгебры Картана, $g_{+-} = g_{-+} = g_{zz} = 2\alpha_z^2$ (см. (II.3.49)), откуда

$$\begin{aligned} C_2 = g^{ab}\, \Gamma_a \Gamma_b \quad &= \tfrac{1}{2\alpha_z^2} (\Gamma_z^2 + \Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_-\Gamma_+) = \\ &= \tfrac{1}{2\alpha_z^2}\, \widehat{\boldsymbol{j}^2} = \tfrac{1}{2\alpha_z^2} \Big\{ \hat{j}_z^2 + \tfrac{1}{2} (\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) \Big\}. \end{aligned} \tag{III.1.5}$$

Обычно множитель $1/2\alpha_z^2$ исключают из определения квадратичного оператора Казимира[5], так как сам смысл введения этого инварианта заключается не в том, что он задает собственное значение на состояниях неприводимого представления алгебры поворотов, а в том, что это собственное значение имеет определенный физический смысл — квадрат момента количества движения в случае алгебры $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ для группы поворотов в трехмерном пространстве, и это собственное значение не зависит от преобразований базиса представления матрицами групповых преобразований. Выберем $\tilde{C}_2 \equiv \boldsymbol{j}^2$ (см. сноску 5 внизу этой страницы),

$$\widehat{\boldsymbol{j}^2} = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) = \Gamma_z^2 + \Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_-\Gamma_+. \tag{III.1.6}$$

Выражения (III.1.5) и (III.1.6) специально были записаны через повышающие и понижающие операторы для того, чтобы, во-первых, еще раз подчеркнуть, что диагональность и положительная определенность метрики Картана для простой компактной группы поворотов означает, что берется сумма квадратов генераторов из подалгебры Картана, а вклад квадратов оставшегося четного числа эрмитовых генераторов выражается через сумму произведений повышающего и понижающего операторов в прямом и обратном порядке для каждой пары корневых генераторов, так как $g_{+-} = g_{-+} = g_{ll'}$ (конформный фактор Ω^2: $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$, — здесь не важен). Во-вторых, для квадратичного оператора Казимира все состояния неприводимого представления являются собственными с одним и тем же собственным значением (другими словами, размерность пространства неприводимого представления $\mathcal{D}$ равна кратности вырождения собственного значения этого оператора в данном неприводимом представлении). Это значит, что в неприводимом представлении оператор Казимира сводится к единичной матрице $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ с численным коэффициентом, равным собственному значению оператора Казимира на любом из векторов состояния неприводимого представления. Читатель, знакомый с квантованием спина в группе поворотов, знает, что в конечномерном неприводимом представлении всегда можно выделить старший вектор состояния $|\mu_S\rangle$, действие повышающего оператора на который равно нулю по определению старшего вектора состояния, $\hat{j}_+ |\mu_S\rangle = 0$. Поэтому удобно вычислять собственное значение оператора Казимира

[3] Отметим отличие русской научной традиционной терминологии, принятой в теоретической механике, от англоязычной: строго говоря, количество движения определяется в лагранжевой механике как производная лагранжиана L по скорости $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{r}}$, а импульс как определенный интеграл от силы $\boldsymbol{F} = -\partial L/\partial \boldsymbol{r}$ на некотором интервале времени. Согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$, так что количество движения, которое приобретает материальная точка за счет действия силы равно импульсу $\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F} \mathrm{d}t$. Поэтому момент количества движения $\boldsymbol{L}$ мы будем также называть моментом импульса, а также моментом вращения.

[4] Аргументом функции может служить индекс, указывающий на неприводимое представление, например, значение одномерного старшего веса.

[5] По сути речь идет о введении инварианта $\tilde{C}_2$, который был определен в (II.2.49) на стр. 87, когда в случае $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$ вместо обратной метрики используется символ Кронекера.

действием на старший вектор состояния, а для этого можно привести C_2 к такому виду, в котором повышающий оператор расположен правее понижающего, с помощью коммутационных соотношений (III.1.1), которые при $\alpha_z = 1$ согласно (III.1.3) дают

$$[\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hat{j}_z \quad \Rightarrow \quad \hat{j}_+\hat{j}_- = \hat{j}_-\hat{j}_+ + 2\hat{j}_z. \tag{III.1.7}$$

И

$$\tilde{C}_2 \equiv \widehat{\boldsymbol{j}^2} = \hat{j}_z^2 + \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2}(2\hat{j}_-\hat{j}_+ + 2\hat{j}_z) = \hat{j}_z^2 + \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z =$$
$$= \Gamma_z^2 + \Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_-\Gamma_+ = \Gamma_z^2 + 2\Gamma_-\Gamma_+ + \Gamma_z. \tag{III.1.8}$$

Отсюда

$$\tilde{C}_2|\mu_S\rangle = \big(\hat{j}_z^2 + \hat{j}_z\big)|\mu_S\rangle, \tag{III.1.9}$$

где $|\mu_S\rangle$ является собственным вектором для генератора подалгебры Картана $\hat{j}_z = \Gamma_z$.

В итоге, схема Дынкина алгебры $\mathfrak{su}(2)$ привела нас к стандартным коммутационным соотношениям для операторов момента вращения, которые являются генераторами группы поворотов для частиц, обладающих спином.

1.2 Масштаб и конформный фактор

На примере алгебры $\mathfrak{su}(2)$ мы увидели, что вид коммутаторов генераторов алгебры Ли в базисе Картана–Вейля зависит от выбора масштаба единиц, в которых выражаются корни, а их единицы измерения совпадают с единицами измерения весов – собственных значений генераторов подалгебры Картана, поскольку по построению сдвиги этих собственных значений при действии корневых операторов и являются корнями $\boldsymbol{\alpha}$ (в тех же единицах, что и единицы измерения весов). В алгебре $\mathfrak{su}(2)$ это выбор величины α_z, нормировки пары одномерных и равных по длине корневых векторов. Фиксация определенного выбора нормировки корней и весов также приводит к тому, что в метрику Киллинга входит конформный фактор, связывающий ее с единичной матрицей (см. (III.1.4)).

С другой стороны, мы можем по-разному выбирать масштаб координат в группе

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}/\tilde{\Omega},$$

что приведет к метрике Киллинга с дополнительным конформным фактором[6]

$$g'_{\alpha\beta} = \tilde{\Omega}^2 g_{\alpha\beta}.$$

Ясно, что эти две процедуры, а именно, выбор масштаба собственных значений и масштаба параметров координат групповых элементов, связаны. Поэтому важно подчеркнуть, что *выбор масштаба приводит к определенной связи генераторов и координат с физическими величинами. Например, в алгебре* $\mathfrak{su}(2)$ *фиксация*[7] $\alpha_z = 1$ *и* $g_{ab} = 2\delta_{ab}$ *означает, что координаты группы совпадают с углами поворотов в присоединенном представлении, а* $\hbar\boldsymbol{j}$ *— это момент вращения.* Только в этом случае оператор поворота на угол 2π вокруг любой оси сводится к тождественному преобразованию в любом неприводимом представлении группы SO(3) и, в частности, для декартовых координат евклидова пространства. Из этого примера ясно, что выявление физического смысла выбранной нормировки зависит от глобальных свойств групповых преобразований (поворот на конечный угол 2π является глобальной характеристикой в отличие от локального поворота на бесконечно малый угол, который рассматривается при изучении алгебры Ли вблизи единицы группы).

В других случаях, когда группа преобразований не связана со свойствами пространства-времени, выбор нормировки может задавать единицу заряда – одного из генераторов подалгебры Картана, а групповые преобразования с изменением собственных значений заряда будут тогда отвечать изменениям

[6] При линейной замене координат контравариантного вектора $a'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\bullet\,\beta} a^{\beta}$ компоненты ковариантного тензора второго ранга преобразуются обратной матрицей,

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'}(\Lambda^{-1})^{\alpha'}_{\bullet\,\alpha}(\Lambda^{-1})^{\beta'}_{\bullet\,\beta}.$$

В случае преобразования масштаба, $\Lambda^{\alpha}_{\bullet\,\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}/\Omega$ обратная матрица $(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\bullet\,\alpha'} = \Omega\,\delta^{\alpha}_{\alpha'}$, и

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'}\Omega\,\delta^{\alpha'}_{\alpha}\Omega\,\delta^{\beta'}_{\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}.$$

[7] Напомним, что при выводе соотношения (II.2.48) для связи метрики Киллинга с единичным символом Кронекера при рассмотрении задачи о следе генераторов алгебры в произвольном представлении на стр. 87 мы ввели постоянную C_A: $g_{ab} = C_A\delta_{ab}$. Для группы SU(2) мы нашли, что $C_A = 2$. В дальнейшем мы установим, что $C_A = \mathrm{N}$ в случае группы SU(N).

дискретных значений заряда в относительных единицах для разных собственных состояний оператора заряда в пространстве представления, что называют термином «квантование заряда».

Преобразования, не связанные со свойствами пространства-времени, затрагивают очень важный вопрос о реальности пространств состояний, описываемых в рамках квантового подхода к описанию физических систем. Точнее так: где находятся эти пространства, если мы сами находимся в пространстве-времени? Пространство спиновых состояний вроде бы находится косвенным образом в нашем пространстве-времени, так как описание спиновых состояний зависит от оси, вдоль которой направлен вектор момента вращения системы, а угол поворота не может быть больше 2π. Пространство изоспина частиц не связано даже так с «нашим» пространством. Но оно связано с нашей реальностью через квантование электрического заряда состояний изоспина и экспериментально достоверно проявлено. Можно посмотреть на это по-другому: *квантовое описание окружающего мира* заставляет нас медленно, но верно привыкать к мысли, что *все физические системы*, а значит, и мы сами, *существуют сразу в нескольких пространствах*, связь между которыми математически проявлена через глобальные углы, квантование физических величин, гамильтонианы и т.п.

Отметим также, что все полученные нами коммутационные соотношения генераторов в базисе Картана–Вейля зависят от выбора нормировки корней и весов: коммутаторы получены при условии, что метрика положительно определена и пропорциональна единичной матрице.

1.3 $\mathfrak{su}(3)$

Алгебра второго ранга $\mathfrak{su}(3)$ согласно классификации простых компактных алгебр Ли (см. **§ 5. Классификация простых компактных алгебр Ли** главы 2) обозначается как A_2 . Схема Дынкина для простых положительных корней алгебры $\mathfrak{su}(3)$ — две точки, соединенные одинарной линией. Значит, имеются два генератора подалгебры Картана, а их собственные числа можно изображать в виде точек на плоскости[8], и два простых положительных корневых вектора $\boldsymbol{\alpha}_1 \equiv \boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}_2 \equiv \boldsymbol{\beta}$. Из диаграммы Дынкина для $\mathfrak{su}(3)$ следует, что простые положительные корни имеют одинаковую длину, и эти корневые векторы образуют угол $\frac{2}{3}\pi$, так как их скалярное произведение согласно (II.4.29) равно

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}}\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})},$$

где $l_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = 1$ — число линий между корнями на схеме Дынкина для SU(3). В соответствии с диаграммой алгебры (две точки, соединенные одной линией) простые положительные корни имеют одинаковую длину, которую мы полагаем равной единице, т. е. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = 1$, так что

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = -\tfrac{1}{2}. \qquad \text{(III.1.10)}$$

Простые положительные корневые векторы образуют базис в пространстве размерности, равной рангу алгебры, в данном случае в двумерном пространстве.

Соединенные одинарной линией корни определяют число шагов в последовательности простых положительных корней: это число равно единице, так что существует только еще один положительный корень[9] $\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ и соответствующий ему корневой оператор. В итоге мы имеем три повышающих корневых генератора алгебры $\mathfrak{su}(3)$, связанные с положительными корнями $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, плюс три эрмитово сопряженных к ним понижающих генератора, которые соответствуют отрицательным корням $-\boldsymbol{\alpha}$, $-\boldsymbol{\beta}$, $-\boldsymbol{\gamma}$, и два генератора подалгебры Картана. Других корневых векторов, кроме перечисленных шести, больше нет, так как все возможные для SU(3) последовательности положительных корней уже построены. (В этом можно будет убедиться, если провести всевозможные отражения Вейля (описание группы Вейля будет в разделе **2.3 Операция вейлевского отражения** главы 3, **§ 2. Неприводимые представления**) шести корней относительно самих этих корней и в явном виде показать, что новые корневые векторы при действии отражений не возникают.) Диаграмма Дынкина для двух простых положительных корней, соединенных одинарной линией, означает, что есть только один шаг в каждой из последовательностей простых корневых векторов алгебры $\mathfrak{su}(3)$, т. е. положительных корней только 3. Значит, алгебра имеет восемь перечисленных нами генераторов преобразований. Этот вывод согласуется с общим утверждением о размерности группы SU(N),

$$N_G = \dim \mathrm{SU(N)} = \mathrm{N}^2 - 1,$$

который мы получили в **задаче 17** на стр. 75.

[8] Точки собственных чисел генераторов подалгебры Картана в пространстве размерности, равной рангу группы, называют весовой диаграммой представления.

[9] Напомним, что число линий, соединяющих 2 простых положительных корня, — это $l = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}$, где $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}}$ и $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}}$

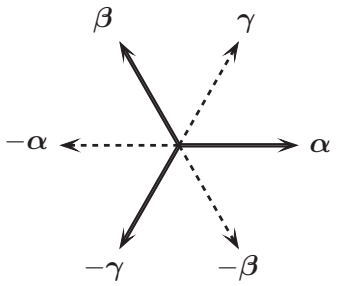


Рис. 3.1: Корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

Итак, корневая система алгебры $\mathfrak{su}(3)$ определена в том смысле, что это — двумерные векторы, относительное расположение которых на плоскости такое, как это показано на рис. 3.1.

Из рис. 3.1 ясно, что до выбора ортогональных осей, вдоль которых откладываются веса в той же плоскости, что и корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$, неважно, какая тройка из шести корней станет считаться положительными корнями. Между простыми корнями должен быть угол в 120 градусов. Поэтому два простых положительных корня можно выбрать либо из тройки $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\gamma}\}$, либо из тройки $\{-\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$. Выбрав два простых положительных корня и сложив их, мы получим третий положительный корень. Этим выбором мы фиксируем также, какие три генератора корневого дополнения станут повышающими, а какие — понижающими. Примеры пар простых положительных корней:

$$\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\},\ \{-\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}\},\ \{-\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\},\ \ldots$$

В этом смысле разумно решить задачу определения всех коммутационных соотношений алгебры $\mathfrak{su}(3)$ сначала математически, в общем виде без фиксации генераторов подалгебры Картана, а потом физически, зафиксировав выбор генераторов подалгебры Картана, т. е. ортогональных осей собственных значений наблюдаемых (генераторов подалгебры Картана) на плоскости корней, с которым координаты векторов приобретают вполне определенный физический смысл в схеме, традиционно применяющейся в задачах физики кварков.

• Корневое дополнение алгебры $\mathfrak{su}(3)$ и коммутаторы.

Обозначим пару простых положительных корней $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$. Тогда третий положительный корень — это $\boldsymbol{\gamma}$. Этим корням соответствуют корневые генераторы: три повышающих $\{\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}\}$ и три понижающих $\{\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}\}$, которые обладают заданными в базисе Картана–Вейля (II.3.51) коммутационными соотношениями. Установим сначала коммутаторы для генераторов из этого корневого дополнения алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

Структурные константы $N_{\alpha,\beta}$ в базисе Картана–Вейля (II.3.51) в коммутаторе для простых положительных корней

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \tag{III.1.11}$$

заданы формулой

$$N^2_{\alpha,\beta} = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}). \tag{II.4.15}$$

Для $\mathfrak{su}(3)$ в текущем рассмотрении мы положили в (III.1.10)

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Значит, с учетом эрмитова сопряжения повышающих генераторов, когда они переходят в понижающие,

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}, \quad [\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}. \tag{III.1.12}$$

Подчеркнем, что в этой формуле мы выбрали положительный знак для коэффициента $N_{\alpha,\beta}$ при извлечении квадратного корня в формуле (II.4.15). При этом важно, что мы считаем пару простых положительных корней $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ упорядоченной: $\boldsymbol{\alpha}$ — первый по порядку в формуле в выражении для коммутатора

задают число шагов при построении положительных корней для $\boldsymbol{\alpha}$- и $\boldsymbol{\beta}$-последовательностей. В данном случае $\varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}} = \varkappa^{\max}_{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}} = 1$, так что в этих последовательностях только 2 положительных корня: исходный простой и полученный при первом и последнем шаге суммированием исходного простого положительного корневого вектора со вторым простым положительным корневым вектором.

(III.1.11), а $\boldsymbol{\beta}$ — второй. При другом порядке знак коммутатора сменится на противоположный в силу антисимметрии коммутатора и, следовательно, сменится знак коэффициента $N_{\alpha,\beta}$.

Мы установили ранее (см. стр. 110) соотношения для структурных констант в базисе Картана–Вейля

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta} = N_{\alpha+\beta,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta}, \tag{II.4.14}$$

что можно в случае $\mathfrak{su}(3)$ переписать как

$$N_{-\alpha,\gamma} = N_{\gamma,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}. \tag{III.1.13}$$

В этой цепочке знаки группы коэффициентов $N_{\alpha,\beta}$ однозначно заданы сделанным нами выбором упорядочения пары простых положительных корней и знака величины $N_{\alpha,\beta}$ в формуле (III.1.12).

Следовательно, с учетом элементарного сложения корневых векторов согласно рис. 3.1

$$\begin{aligned} [\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}] &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \quad [\Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, \\ [\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \end{aligned} \tag{III.1.14}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}$ не являются корнями алгебры $\mathfrak{su}(3)$, то

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}] = [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}] = 0, \tag{III.1.15}$$

а эрмитово сопряжение этих соотношений дает

$$[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = [\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = 0. \tag{III.1.16}$$

Коммутаторы корневых генераторов с генераторами из подалгебры Картана, для которых $[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0$,

$$\begin{aligned} &[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_l \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, && [\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = \beta_l \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, && [\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}] = \gamma_l \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}, \\ &[\Gamma_l, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = -\alpha_l \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}, && [\Gamma_l, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = -\beta_l \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}, && [\Gamma_l, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = -\gamma_l \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}, \end{aligned} \tag{III.1.17}$$

и

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_l \Gamma_l, \qquad [\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = \beta_l \Gamma_l, \qquad [\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = \gamma_l \Gamma_l, \tag{III.1.18}$$

вместе с соотношениями (III.1.12)–(III.1.16) полностью задают алгебру $\mathfrak{su}(3)$. Однако ясно, что в (III.1.17) и (III.1.18) необходимо указать конкретный выбор генераторов подалгебры Картана, чтобы все компоненты корневых векторов приняли определенные значения. Это достигается выбором ортогональных осей на плоскости весов и корней (см. рис. 3.1).

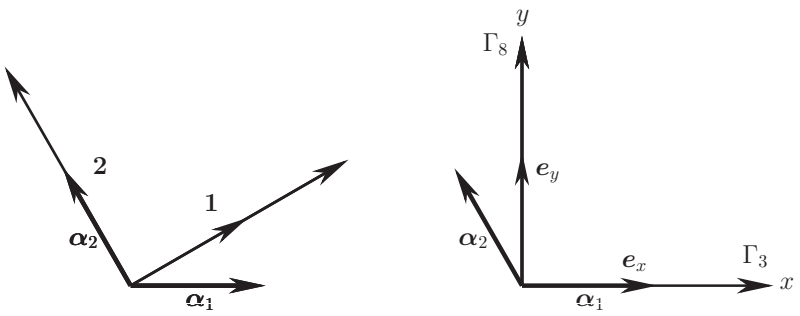


Рис. 3.2: Простые положительные корни алгебры $\mathfrak{su}(3)$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{l}$: $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2\}$ (слева) и в координатном базисе плоскости (x, y) (справа) после поворота исходного базиса $\boldsymbol{l}$ так, чтобы совместить ось x с первым простым положительным корнем, т. е. на $\frac{\pi}{6}$ по часовой стрелке.

Пример выбора осей показан на рис. 3.2. В ортонормированном базисе $\boldsymbol{l}$ (обратите внимание на жирный шрифт, который мы используем для обозначения векторов!), $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2\}$ обозначим генераторы подалгебры Картана как Γ'_1 и Γ'_2, соответственно (штрих введен для того, чтобы избежать путаницы с похожими символами в этом и в следующем разделах). В таких координатах, простые положительные корни $\boldsymbol{\alpha}_1 \equiv \boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}_2 \equiv \boldsymbol{\beta}$ имеют координаты

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \qquad \boldsymbol{\beta} = (0, 1),$$

а их сумма

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

что полностью определяет численные коэффициенты в (III.1.17) и (III.1.18). При таком выборе расположения осей, вдоль которых откладываются собственные значения генераторов подалгебры Картана, ясно, что Γ'_2 описывает величину, которая является полным аналогом проекции момента количества движения в алгебре $\mathfrak{su}(2)$, так как простой положительный корень $\boldsymbol{\alpha}_2$ ориентирован вдоль оси $\mathfrak{e}'_2$ точно так же, как это было при рассмотрении момента количества движения. В случае алгебры $\mathfrak{su}(3)$ называем наблюдаемую величину, подобную Γ'_2 термином «изоспин». Рассмотренный нами ортонормированный базис $\boldsymbol{l}$ задает наблюдаемые величины $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$, которые в физической традиции называются электрическим зарядом и U-изоспином. Мы изучим эти традиционные обозначения более детально в следующем разделе.

Сейчас же введем базис эрмитово самосопряженных генераторов Γ_a, для которых метрика Киллинга принимает, как говорят, конформно плоский вид

$$g_{ab} = C_A \delta_{ab}, \qquad a, b \in \left\{\overline{1,8}\right\}, \quad C_A = 3. \tag{III.1.19}$$

Эти генераторы

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}), \quad \Gamma_2 = -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}),\\
&\Gamma_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}), \quad \Gamma_5 = -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}),\\
&\Gamma_6 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\beta}} + \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}), \quad \Gamma_7 = -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\Gamma_{\boldsymbol{\beta}} - \Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}),\\
&\Gamma_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\Gamma'_1 - \Gamma'_2), \quad \Gamma_8 = \tfrac{1}{2}(\Gamma'_1 + \sqrt{3}\Gamma'_2), \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Gamma_3 = \Gamma'_1 \cos\tfrac{\pi}{6} - \Gamma'_2 \sin\tfrac{\pi}{6}, \\ \Gamma_8 = \Gamma'_1 \sin\tfrac{\pi}{6} + \Gamma'_2 \cos\tfrac{\pi}{6}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{III.1.20}$$

где поворот осей на плоскости генераторов подалгебры Картана $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$, как это показано на рис. 3.2, введен исходя из принятой в физической литературе традиции[10]. При этом генераторы Γ_3 и Γ_8 — это генераторы подалгебры Картана, так что собственные значения Γ_3 на рис. 3.2 откладываются вдоль оси x, а Γ_8 — вдоль оси y. Запишем коммутационные соотношения группы SU(3) для этих генераторов

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \mathrm{i}\, f_{ab}^{c}\, \Gamma_c, \qquad a, b, c \in \left\{\overline{1,8}\right\}. \tag{III.1.21}$$

Для данного фиксированного набора генераторов вводят полностью антисимметричные структурные константы[11] $f_{abc} \equiv f_{ab}^{c'}\delta_{c'c}$. Исходя из коммутаторов базиса Картана–Вейля (III.1.12)–(III.1.18) и компонент трех корней в осях (x, y) на рис. 3.2 для ненулевых структурных констант мы получаем таблицу значений[12]:

$$\begin{aligned}
&f_{123} = 1, \quad f_{458} = f_{678} = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
&f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \tfrac{1}{2},
\end{aligned} \tag{III.1.22}$$

а другие константы получаются при перестановке их индексов с учетом четности такой перестановки. Структурные константы по определению задают метрику Киллинга (II.2.19)

$$g_{ab} = -f_{ac'}^{c} f_{bc}^{c'} = -f_{ac'c} f_{bcc'} = f_{acc'} f_{bcc'} = 3\,\delta_{ab}, \tag{III.1.23}$$

где $C_A = 3$ получается усердным суммированием по «немым» индексам[13].

[10] Заметим, что второй простой «положительный» корень формально стал отрицательным в осях (x, y): его первая компонента имеет отрицательное значение. После назначения трех из 6 корней «положительными» и соответствующих трех корневых генераторов повышающими, а также после их упорядочения, что важно при фиксации знаков коммутаторов между корневыми операторами в формуле (III.1.13), следует выбор двух генераторов подалгебры Картана. Выбор генераторов подалгебры Картана важен для физического рассмотрения, так как он определяет наблюдаемые величины, которыми мы описываем состояния физической системы. В момент выбора генераторов подалгебры Картана нам уже неважно, что один из простых «положительных» корней стал отрицательным согласно формальному математическому определению, так как коммутаторы между корневыми генераторами уже зафиксированы формулами (III.1.12)–(III.1.18).

[11] Согласно решению **задачи 20** в разделе **2.3 Операторы Казимира** главы 2, **§2. Представление группы Ли и генераторы** на стр. 87 для опускания и поднимания тензорных индексов в касательном пространстве группы используют символ Кронекера вместо метрики и обратной метрики Киллинга. Эта договоренность в сообществе физиков не меняет тензорных свойств объектов, так как $g_{ab} = C_A\delta_{ab}$, где C_A — скаляр, и этот факт затем учитывается во всех определениях и формулах, что делает формулы компактней.

[12] Эти структурные константы записаны в осях, где явно выделена подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, образованная изоспином, проекцию которого задает Γ_3.

[13] Суммирование можно провести в уме, положив в (III.1.23) $a = b = 1$ и глядя в таблицу (III.1.22).

1.4 Физическая традиция для генераторов $\mathfrak{su}(3)$

Во второй половине двадцатого века в физике частиц с развитием техники ускорителей и детекторов последовал неожиданный шквал открытий новых состояний, обилие которых после периода растерянности среди физиков диктовало необходимость систематизации данных путем выделения родов и классов. Апогеем этой систематизации стала теория представлений групп симметрии, в которой наблюдались состояния, образующие неприводимые представления группы SU(3). Эти состояния характеризовались квантовыми числами, которые исторически были введены в процессе открытия частиц. Триумфом теоретической модели, которую построил Мюррей Гелл-Манн, стало предсказание состояния Ω^- в неприводимом представлении гиперонов со спином $3/2$: дело в том, что на момент предсказания все состояния в неприводимом представлении за исключением Ω^- были обнаружены, так что открытие Ω^- с вполне определенными свойствами (квантовые числа показывали, каким должен быть механизм распада, который фактически был сфотографирован в детекторе) означало, что систематизация проведена верно. Гелл-Манн был удостоен Нобелевской премии по физике за 1969 год. В разработке модели принимали участие Нисидзима и Цвейг, а также независимо Ювал Нееман. Группа SU(3) предсказывает существование двух фундаментальных представлений, состояния которых были названы кварками и антикварками. В настоящее время теория взаимодействий кварков составляет неотъемлимую часть Стандартной модели в физике элементарных частиц.

Историческая традиция, сложившаяся в ходе открытия новых частиц, использует вполне определенный набор квантовых чисел, которые могут указывать либо номера собственных значений генераторов подалгебры Картана, либо сами эти собственные значения.

На рис. 3.2 мы изобразили пару корней при разном выборе ортонормированных осей на плоскости. Выбор осей, вдоль которых откладываются значения компонент корневых векторов, можно менять ортогональными преобразованиями в подпространстве генераторов подалгебры Картана, как мы это описали при введении базиса Картана–Вейля и весовых векторов в формулах (II.3.3)–(II.3.6) на стр. 89, поскольку ортогональные преобразования сохраняют как конформно плоский вид метрики (III.1.19), так и конформный фактор C_A, что важно для однозначного выбора генераторов алгебры Ли.

Элементы ортонормированного базиса двумерного пространства корней и весов, для которых мы ввели обозначения на стр. 92 в виде номеров $\boldsymbol{l}$, допускают преобразования за счет следующей степени свободы в своем определении: проекции простых положительных корней должны удовлетворять условиям (обратите внимание на номера простых положительных корней в скалярных произведениях!)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{1}) > 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{1}) \geqslant 0 \cup \{(\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{2}) > 0, \text{ если } (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{1}) = 0\}.$$

Математически обоснованный выбор осей на плоскости $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ получается, если первая орта $\mathbf{1}$ ортогональна второму простому положительному корню $(\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$, а вторая орта $\mathbf{2}$ совпадает с $\boldsymbol{\alpha}_2$, в то время как проекция первого положительного корня на первую орту положительна, что в случае $\mathfrak{su}(3)$ (см. рис. 3.2) означает

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{1}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} > 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{1}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{2}) = -\tfrac{1}{2}, \quad (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{2}) = 1.$$

После того, как система простых положительных корней задана в исходном базисе $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$, имеет смысл провести замену групповых координат, которая преобразует базис $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ в базис осей (x, y) так, как это обычно принято в физических приложениях. Напомним, что такое преобразование просто означает переход от одного набора генераторов подалгебры Картана к другому, в котором формулируются свойства базисных состояний неприводимых представлений, т. е. описываются собственные значения физических величин, соответствующих выбору набора генераторов подалгебры Картана. Так как выбор системы простых положительных корней алгебры уже сделан, становится неважно, в каком базисе на двумерной плоскости проводится описание компонент корневой системы алгебры $\mathfrak{su}(3)$. Преимуществом проведенных построений является тот простой факт, что веса и, как следствие, корни — это векторы, компоненты которых преобразуются по стандартным формулам вместе с преобразованием набора генераторов подалгебры Картана, связанного с преобразованием групповых координат (см. описание на стр. 89 после формулы (II.3.2)). Общепринятый базис физических приложений связан с базисом $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ поворотом на 30° по часовой стрелке, как это показано на рис. 3.2, его ось x направлена вдоль $\boldsymbol{\alpha}_1 \equiv \boldsymbol{\alpha}$, первого из простых положительных корней в базисе $\boldsymbol{l}$. Тогда координаты простых положительных корней в базисе $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha} = (1, 0), \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{III.1.24}$$

Правило «вверх-направо» в физической традиции при определении старшинства весов и корней. Из явного вида компонент корневых векторов в (III.1.24) следует, что после проведенной нами замены базиса в пространстве генераторов подалгебры Картана *старшинство простых положительных корней определяется не в прямом, а в обратном порядке следования компонент*: сначала по

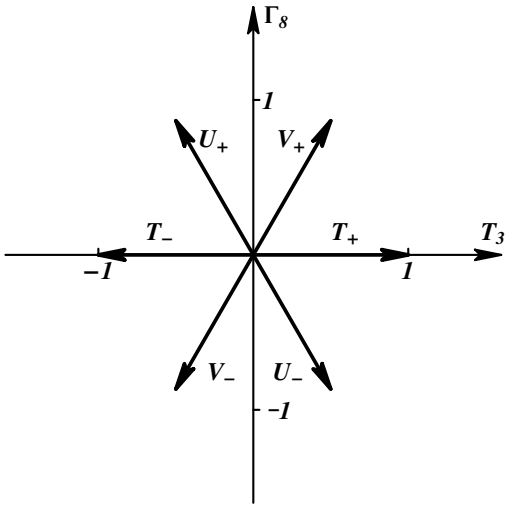


Рис. 3.3: Корневые векторы алгебры $\mathfrak{su}(3)$ на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$.

оси y, а потом по оси x, так что $\boldsymbol{\alpha}_2$ старше, чем $\boldsymbol{\alpha}_1$, поскольку x-компонента у $\boldsymbol{\alpha}_2$ отрицательная, и при прямом порядке следования старшинства компонент это корень следовало бы считать отрицательным, а не положительным. При обратном порядке следования компонент при определении старшинства корней ситуация становится стандартной. Старший вес мультиплета неприводимого представления несет самое большое значение координаты y среди весов мультиплета и затем еще и самое большое значение координаты x среди весов мультиплета с максимальным значением координаты y, равным значению этой координаты у старшего веса. Таким образом старшинство корней и весов задается правилом перемещения «вверх-направо» при поиске старшего веса или корня.

Коммутирующие генераторы подалгебры Картана в физической традиции обозначают парой

$$\hat{T}_3 \equiv \hat{\Gamma}_3, \qquad \hat{Y}\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv \hat{\Gamma}_8. \tag{III.1.25}$$

Данные формулы определяют связь «традиционных физических» генераторов T_3 и Y со стандартными математическими обозначениями, которые мы используем в этой книге. Эти физические генераторы известны под исторически сложившимися в кварковой теории адронов именами «проекция изоспина» и «гиперзаряд Y», соответственно.

Так как группа SU(2) является подгруппой SU(3), мы согласуем наш выбор нормировки простых положительных весов и метрики Киллинга с проведенным ранее на стр. 132 рассмотрением алгебры $\mathfrak{su}(2)$.

Отличные от нуля компоненты метрики Киллинга в базисе Картана–Вейля (II.3.51) для генераторов подалгебры Картана расположены на диагонали — $g_{ll'} = \Omega^2\delta_{ll'}$, а для простых положительных корней — $g_{\alpha\beta} = \Omega^2\delta_{\alpha,-\beta}$. В терминах эрмитово самосопряженных генераторов мы полагаем

$$g_{ab} = C_A\delta_{ab}, \qquad a, b \in \overline{\{1, 8\}}, \quad C_A = \Omega^2 > 0. \tag{III.1.19}$$

Для того, чтобы освежить в изложении вопросы с введением конформно плоской метрики Киллинга, отошлем читателя к **задаче 20** в разделе **2.3 Операторы Казимира** главы 2, **§2. Представление группы Ли и генераторы** на стр. 86, где дано также определение индекса Дынкина (II.2.47) и обсуждается введение формулы (II.2.48), идентичной (III.1.19). Вычисление C_A мы отложим до момента, когда будут описаны неприводимые представления (см. **§2. Неприводимые представления** главы 3), к которым относится и присоединенное представление группы SU(N) (см. раздел **2.4 Веса присоединенного представления** главы 3, **§2. Неприводимые представления**). Авансом заметим, что конформный фактор Ω^2 для конформно плоской метрики зависит от группы и для SU(N) равен $C_A = N$.

Для повышающих корневых генераторов введем обозначения, аналогичные введенному для $\mathfrak{su}(2)$ символу повышающего оператора момента j_+ (см. соотношения (III.1.3)),

$$\frac{\hat{T}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \frac{\hat{U}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}. \tag{III.1.26}$$

Корни лестничных операторов – двумерные векторы – принято обозначать жирным шрифтом без шляпки, но теми же буквами, что и отвечающие им корневые генераторы, $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{T}_+$ и $\boldsymbol{\beta} \mapsto \boldsymbol{U}_+$ (см. рис. 3.2 и 3.3).

В принятых координатах на плоскости $\{\hat{T}_3, \hat{\Gamma}_8\}$ (см. рис. 3.3) простые положительные корневые векторы

$$\boldsymbol{T}_+ = (1,0), \quad \boldsymbol{U}_+ = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{III.1.27}$$

а их сумма задает положительный корень $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{V}_+$

$$\boldsymbol{V}_+ = \boldsymbol{T}_+ + \boldsymbol{U}_+ = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{III.1.28}$$

и отвечающий этому корню генератор, который обозначается тем же символом со шляпкой,

$$\frac{\hat{V}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} = \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Заметим, что умножение генераторов из корневого дополнения алгебры на любой множитель не меняет их основного свойства — преобразования базисного состояния, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана, с одним весовым вектором в другое состояние, тоже собственное и отличающееся весовым вектором от начального на величину корневого вектора, который в рамках физической традиции обозначен так же, как и генератор. Поэтому корневые генераторы в физической традиции умножены на $\sqrt{2}$, и это изменит коэффициенты в коммутационных соотношениях, а вот длины корней как разностей весов, т. е. собственных значений, останутся единичными по длине (в уже заданной системе единиц измерения).

Генераторы, соответствующие корням противоположного знака, называют понижающими и так же, как и повышающие генераторы, имеют характерные коммутационные соотношения с генераторами наблюдаемых величин базиса Картана–Вейля (II.3.51),

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_l \, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad [\Gamma_l, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = -\alpha_l \, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}.$$

Эти коммутаторы не зависят от нормировки корневых операторов, в то время как компоненты корневых векторов α_l просто определяются выбранным ортонормированным базисом в векторном пространстве весов, так что, подставляя численные значения координат из (III.1.27) и (III.1.28), найдем

$$\begin{aligned}
&[\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] = \big(\boldsymbol{T}_\pm\big)_x \hat{T}_\pm = \pm\hat{T}_\pm, \quad [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] = \big(\boldsymbol{U}_\pm\big)_x \hat{U}_\pm = \mp\tfrac{1}{2}\,\hat{U}_\pm, \qquad [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = \big(\boldsymbol{V}_\pm\big)_x \hat{V}_\pm = \pm\tfrac{1}{2}\,\hat{V}_\pm, \\
&[\hat{\Gamma}_8, \hat{T}_\pm] = \big(\boldsymbol{T}_\pm\big)_y \hat{T}_\pm = 0, \qquad [\hat{\Gamma}_8, \hat{U}_\pm] = \big(\boldsymbol{U}_\pm\big)_y \hat{U}_\pm = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{U}_\pm, \quad [\hat{\Gamma}_8, \hat{V}_\pm] = \big(\boldsymbol{V}_\pm\big)_y \hat{V}_\pm = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{V}_\pm.
\end{aligned} \tag{III.1.29}$$

Коммутаторы повышающих операторов с парными им понижающими

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_l \, \Gamma_l, \tag{III.1.30}$$

с учетом перемасштабирования (III.1.26) равны

$$\begin{aligned}
[\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}] = 2\alpha_l \, \Gamma_l, \\
[\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}, \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\beta}}] = 2\beta_l \, \Gamma_l, \\
[\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}, \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\gamma}}] = 2\gamma_l \, \Gamma_l, .
\end{aligned}$$

При подстановке в правую часть коммутатора численных значений координат из (III.1.27) и (III.1.28), эти коммутаторы примут вид

$$\begin{aligned}
&[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2(\boldsymbol{T}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\boldsymbol{T}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = 2\hat{T}_3, \\
&[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2(\boldsymbol{U}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\boldsymbol{U}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = -\hat{T}_3 + \sqrt{3}\,\hat{\Gamma}_8, \\
&[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2(\boldsymbol{V}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\boldsymbol{V}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = \hat{T}_3 + \sqrt{3}\,\hat{\Gamma}_8.
\end{aligned} \tag{III.1.31}$$

Здесь стоит подчеркнуть, что генераторы «изоспина» $\hat{T}_3$ и $\hat{T}_\pm$ в точности воспроизводят коммутационные соотношения для момента вращения, что вполне оправдывает принятое для них название.

По традиции вводят наблюдаемые величины

$$\hat{U}_3 \equiv \tfrac{1}{2}\left(-\hat{T}_3 + \tfrac{3}{2}\,\hat{Y}\right) = \hat{T}_3 \cos\tfrac{2\pi}{3} + \hat{\Gamma}_8 \sin\tfrac{2\pi}{3}, \qquad \hat{V}_3 \equiv \tfrac{1}{2}\left(\hat{T}_3 + \tfrac{3}{2}\,\hat{Y}\right) = \hat{T}_3 \cos\tfrac{\pi}{3} + \hat{\Gamma}_8 \sin\tfrac{\pi}{3}, \tag{III.1.32}$$

а это значит, что ось для проекции изоспина U_3 получается из оси T_3 поворотом на 120° против часовой стрелки, а ось для проекции изоспина V_3 получается из оси T_3 поворотом на 60° против часовой стрелки. Тогда коммутаторы повышающих генераторов с понижающими сводятся к стандартным соотношениям в алгебре изоспина ($\mathfrak{su}(2)$ в математической терминологии)

$$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_3, \tag{III.1.33}$$

что позволяет говорить не только о T-изоспине, но и о U- и V-изоспине в алгебре $\mathfrak{su}(3)$. Каждый такой изоспин реализует тот или иной выбор одного из пары генераторов подалгебры Картана и совпадает с одной из трех осей трех пар корневых векторов на рис. 3.1.

Для замкнутости изложения повторим некоторые выводы «математизированного» изложения предыдущего раздела в физических терминах, которые мы используем в этом разделе. Свобода выбора структурных констант $N_{\alpha,\beta}$ в базисе Картана–Вейля в коммутационном соотношении для простых положительных корней типа

$$[\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = N_{\alpha,\beta}\, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}, \tag{III.1.11}$$

ограничена соотношением

$$N^2_{\alpha,\beta} = -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \tag{II.4.27}$$

в котором в случае $\mathfrak{su}(3)$ скалярное произведение нормированных на единицу корневых векторов

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Действительное положительное решение уравнения (II.4.27) мы выбираем для коммутатора (III.1.30) упорядоченной пары корней $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{T}_+$ и $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{U}_+$ и соответствующих им операторов $\hat{T}_+ = \sqrt{(}2)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\hat{U}_+ = \sqrt{(}2)\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}$. Остальные коммутаторы корневых операторов зафиксированы этим выбором. Тогда с учетом перемасштабирования повышающих генераторов (III.1.26) и определения

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} = \frac{\hat{V}_+}{\sqrt{2}}$$

из

$$[\sqrt{2}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}, \sqrt{2}\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sqrt{2})^2 \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}},$$

находим

$$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+, \tag{III.1.34}$$

что после эрмитова сопряжения[14] дает также

$$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = -\hat{V}_-. \tag{III.1.35}$$

Наконец, мы установили ранее (см. стр. 110)

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta}, \tag{II.4.12}$$

откуда согласно (III.1.34) и (III.1.35) сразу получаем

$$[\hat{T}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{V}_+, \hat{U}_-] = \hat{T}_+, \tag{III.1.36}$$

и для эрмитово сопряженных к ним коммутаторов

$$[\hat{T}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-, \quad [\hat{V}_-, \hat{U}_+] = -\hat{T}_-. \tag{III.1.37}$$

Отсутствие корней вида $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = 2\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$ приводит согласно (III.1.11) к коммутаторам

$$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = [\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0, \tag{III.1.38}$$

а их эрмитово сопряжение дает

$$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = [\hat{V}_-, U_-] = 0. \tag{III.1.39}$$

Формулы (III.1.29)–(III.1.39) перечисляют все варианты коммутаторов генераторов алгебры $\mathfrak{su}(3)$, и из них можно восстановить структурные константы группы SU(3) в базисе эрмитово самосопряженных

[14] Вместо эрмитова сопряжения коммутаторов можно напрямую использовать то, что $N_{\alpha,\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta}$.

генераторов, если перейти к операторам Γ_a, для которых метрика Киллинга принимает конформно плоский вид (III.1.19). В полном соответствии с определениями предыдущего раздела

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \tfrac{1}{2}\,(\hat{T}_+ + \hat{T}_-), \quad &&\Gamma_2 = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(\hat{T}_+ - \hat{T}_-),\\
&\Gamma_4 = \tfrac{1}{2}\,(\hat{V}_+ + \hat{V}_-), \quad &&\Gamma_5 = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(\hat{V}_+ - \hat{V}_-),\\
&\Gamma_6 = \tfrac{1}{2}\,(\hat{U}_+ + \hat{U}_-), \quad &&\Gamma_7 = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(\hat{U}_+ - \hat{U}_-),\\
&\Gamma_3 = \hat{T}_3, &&\Gamma_8 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{Y}.
\end{aligned} \tag{III.1.40}$$

и

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \mathrm{i}\, f_{ab}^c\, \Gamma_c, \qquad a,b,c \in \overline{\{1,8\}}, \tag{III.1.41}$$

причем антисимметричные структурные константы f_{abc} уже приведены нами[15] в (III.1.22).

Квадратичный оператор Казимира согласно формуле (II.2.49) на стр. 87 в случае метрики Киллинга, пропорциональной символу Кронекера,

$$C_2 = \sum_{a=1}^{8} \Gamma_a \Gamma_a$$

в силу (III.1.20) можно выразить через повышающие и понижающие операторы

$$C_2 = \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \frac{1}{2}\big(\hat{T}_+\hat{T}_- + \hat{T}_-\hat{T}_+ + \hat{V}_+\hat{V}_- + \hat{V}_-\hat{V}_+ + \hat{U}_+\hat{U}_- + \hat{U}_-\hat{U}_+\big). \tag{III.1.42}$$

С помощью коммутационных соотношений (III.1.31) легко преобразовать к виду, где все повышающие операторы стоят справа,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_-\hat{T}_+ + \hat{T}_3 + \hat{V}_-\hat{V}_+ - \tfrac{1}{2}\hat{T}_3 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Gamma}_8 + \hat{U}_-\hat{U}_+ + \tfrac{1}{2}\hat{T}_3 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Gamma}_8 =\\
&= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_-\hat{T}_+ + \hat{V}_-\hat{V}_+ + \hat{U}_-\hat{U}_+ + \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8.
\end{aligned} \tag{III.1.43}$$

Подчеркнем, что, во-первых, в теории неприводимых представлений вводится состояние со старшим весом $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, так что действие всех повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль,

$$\hat{T}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \hat{U}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \hat{V}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0.$$

Во-вторых, собственное значение оператора Казимира для всех состояний неприводимого представления является одним и тем же, так что вычисление значения квадратичного инварианта может быть сведено к суммированию вкладов от действия на состояние старшего веса тех членов в (III.1.43), которые выражены через генераторы подалгебры Картана,

$$C_2|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \big(\hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8\big)|\boldsymbol{\mu}_S\rangle,$$

и, следовательно, собственное значение C_2 дается в виде алгебраического полинома второй степени от собственных чисел генераторов подалгебры Картана.

Примеры вычисления квадратичного оператора Казимира для разных неприводимых представлений приводятся при рассмотрении задач для группы SU(N) в конце раздела **§6. Тензорный метод и схемы Юнга** главы 3, **§4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$. Общее же выражение в терминах индекса Дынкина T_R (II.2.47) для неприводимого представления R размерности $\mathcal{D}_R$ (см. **задачу 20** и формулы на стр. 87) имеет вид

$$C_2^R = T_R\,\frac{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}{\mathcal{D}_R}.$$

[15]Эти структурные константы записаны в осях, где явно выделена подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, образованная T-изоспином. Ясно, что повороты осей отсчета собственных значений генераторов подалгебры Картана — проекций весов позволяют также выделять подалгебры $\mathfrak{su}(2)$, образованные U- и V-изоспинами.

§2. Неприводимые представления

Базисное состояние старшего веса неприводимого представления и квантовые числа базисных состояний, единственность состояния старшего веса неприводимого представления, ранг простой компактной группы и число независимых инвариантов Казимира, рекуррентное соотношение нормировки состояний при действии понижающего оператора, фундаментальные векторы алгебры Ли и формула для старшего веса произвольного неприводимого представления, фундаментальные представления, действие генераторов алгебры на пространстве тензорного произведения состояний неприводимых представлений, зеркальная симметрия состояний неприводимого представления, корневые векторы как веса состояний присоединенного представления, группа Вейля.

Пусть генераторы группы Ли действуют на некотором пространстве состояний. При этом может оказаться, что всякое действие группы преобразований в некотором подпространстве переводит его состояния в суперпозиции этого же подпространства состояний. Такое подпространство называется инвариантным относительно действия группы. Очевидно, что для описания действия группы на пространстве состояний достаточно рассмотреть преобразования на инвариантных подпространствах, которые уже не содержат в себе инвариантных подпространств, кроме его самого или нуля. В таком случае говорят, что имеет место неприводимое представление группы преобразований состояний.

Итак, векторное пространство представления $\mathcal{V}_{\rm ir}$ группы Ли называется неприводимым (irreducible), если для любого отличного от нуля элемента этого пространства $|\psi\rangle$ линейная оболочка, построенная из образов действия операторов представления группы $\hat{G}|\psi\rangle$, совпадает с самим пространством представления:

$$\forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{V}_{\rm ir}, \quad |\psi\rangle \neq 0 \qquad \mathrm{Span}\big(\{\hat{G}|\psi\rangle\}\big) \cong \mathcal{V}_{\rm ir}. \tag{III.2.1}$$

Опишем, как строится базис неприводимого представления *простой компактной группы Ли*, которой отвечает связная диаграмма Дынкина. Для этого необходимо взять какое-либо собственное состояние полного набора наблюдаемых с квантовыми числами, под которыми мы понимаем уникальный мультииндекс, нумерующий собственные значения наблюдаемых из полного набора. Назовем такое состояние исходным в процедуре построения базиса пространства неприводимого представления группы Ли. Этот набор квантовых чисел включает в себя инвариантные собственные значения операторов Казимира и собственные значения генераторов из подалгебры Картана, а в случае неполноты уже перечисленных наблюдаемых еще и эрмитовы операторы, которые делают набор наблюдаемых полным, т. е. описывают вырождение, когда число базисных состояний, соответствующих одному и тому же набору собственных значений операторов Казимира и генераторов подалгебры Картана, превышает единицу. Неочевидный термин «вырождение» введен физиками, которые при исследовании физических состояний материи обнаружили, что в ряде систем набору квантовых чисел может соответствовать более одного состояния.

На языке набора наблюдаемых это означает, что набор наблюдаемых и соответствующих им квантовых чисел оказывается неполным, и нужно искать дополнительные физические величины, чтобы отличать эти состояния между собой[16]. Затем необходимо действовать на это исходное состояние произвольными элементами группы, получая таким образом другие состояния, так как повышающие и понижающие корневые генераторы преобразований (в отличие от операторов, которые являются элементами группы) порождают состояния с другими собственными значениями тех наблюдаемых, которые не являются инвариантами группы, а затем взять линейную оболочку найденных таким способом собственных состояний полного набора наблюдаемых, т. е. всех образов многократного действия элементов алгебры на исходный базисный вектор состояния (для элементов группы может хватить и одноразового действия).

Можно сказать, что такая линейная оболочка образов многократного действия на исходное квантовое состояние генераторов алгебры Ли образует класс эквивалентности исходного базисного элемента. Для введения класса эквивалентности необходимо установить справедливость двух постулатов: взаимности и транзитивности. Постулат взаимности утверждает, что любой элемент из класса эквивалентности исходного элемента определяет свое множество эквивалентных элементов, которому принадлежит и исходный элемент: если $a \cong b$, то $b \cong a$. Постулат транзитивности утверждает, что, если первый и второй элементы множества принадлежат одному классу эквивалентности, а второй и третий элементы также принадлежат одному классу эквивалентности, то первый и третий элементы принадлежат одному классу эквивалентности: если $a \cong b$, $b \cong c$, то $a \cong c$. Класс эквивалентности по построению образует инвариантное подпространство состояний: всякий отличный от нулевого элемент класса эквивалентности может быть преобразован при действии группы с точностью до множителя в любой другой элемент

[16] Мы увидим, что вырождение весового вектора неприводимого представления возникает тогда, когда, например, в компактной простой группе есть компактные простые подгруппы меньшей размерности, которые не могут быть инвариантными подгруппами по условию простоты группы, но определяют свои внутренние инварианты относительно преобразований подгруппы, так что один и тот же весовой вектор может отвечать состояниям с разными значениями этих подгрупповых инвариантов, а это и означает описание вырождения с помощью этих инвариантов подгрупп.

класса. В таком инвариантном подпространстве нет других инвариантных подпространств, т. е. других классов эквивалентности исходных состояний[17]. Для решения задачи о построении неприводимого представления необходимо установить ограничения на выбор исходного состояния.

Прежде всего, поскольку операторы Казимира простой компактной группы Ли являются эрмитово самосопряженными и коммутируют со всеми генераторами алгебры Ли группы Ли, операторы Казимира входят в полный набор наблюдаемых величин, т. е. базис пространства состояний представления является собственным для операторов Казимира C_k, и исходное базисное состояние $|\boldsymbol{\mu}\rangle$, задающее класс эквивалентности неприводимого представления, характеризуется некоторыми собственными значениями λ_k^C инвариантов группы — операторов Казимира, значения которых не изменяются при действии группы[18],

$$C_k|\boldsymbol{\mu}\rangle = \lambda_k^C|\boldsymbol{\mu}\rangle \quad \Rightarrow \quad C_k\big(\hat{G}|\boldsymbol{\mu}\rangle\big) = \lambda_k^C\big(\hat{G}|\boldsymbol{\mu}\rangle\big). \tag{III.2.2}$$

Таким образом исходное состояние неприводимого представления не может быть суперпозицией состояний с разными собственными значениями одного и того же оператора Казимира, иначе действие преобразований группы привело бы к нескольким инвариантным подпространствам взаимно ортогональных состояний с разными значениями одного и того же оператора Казимира. В этой ситуации нарушалось бы условие взаимности элементов одно класса эквивалентности: элемент с одним собственным значением оператора Казимира не может быть преобразован в элемент с другим собственным значением этого же оператора Казимира, хотя в линейной оболочке образов действия группы на суперпозицию элементов с двумя разными собственными значениями оператора Казимира содержится элемент с определенным собственным значением этого оператора Казимира. Итак, мы устанавливаем *необходимый признак неприводимости*: исходный элемент класса эквивалентности неприводимого представления с необходимостью должен быть собственным состоянием всех независимых инвариантов Казимира.

Мы рассматриваем только пространства состояний неприводимого представления с конечномерным базисом: для этого необходимо, чтобы ранг группы был конечен, а значит, конечно число независимых инвариантов. Тогда среди состояний базиса неприводимого представления группы удобно выбрать такое состояние, действие на которое всех повышающих операторов алгебры группы дает нуль. Подобное состояние $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, как мы знаем по опыту квантования момента вращения, называется старшим, в физической литературе — «старший вектор состояния». В нашем изложении мы предпочтительно используем термин «состояние старшего веса» в целях более ясного разграничения понятий элементов в различных векторных пространствах. Одни элементы — базисные векторы неприводимого представления, а элементы другого пространства — веса и корни как наборы собственных значений и их разности (см. разъяснения в первом абзаце после формулы (II.3.6) на стр. 89). По определению значения собственных чисел $\boldsymbol{\mu}$ из полного набора наблюдаемых у такого состояния не могут быть повышены, так как состояний с весом старше $\boldsymbol{\mu}_S$ в неприводимом представлении нет, и, следовательно,

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0. \tag{III.2.3}$$

Существование старшего вектора состояния в неприводимом представлении конечной размерности можно установить, пользуясь определением старшего веса, которое мы дали на стр. 90: это положительный вес, у которого значение первой ненулевой компоненты $\boldsymbol{\mu}_l$ максимально среди всего множества весов состояний неприводимого представления; и после такого выбора множества весов с максимальной первой компонентой такая же процедура отбора повторяется затем в этом множестве по второй компоненте веса, затем аналогично по третьей и так далее, так что максимальны и все последующие значения компонент веса по порядку при условии фиксированных согласно процедуре отбора значений предыдущих компонент. Отсюда сразу следует, что действие генератора любого положительного корня на состояние со старшим весом $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ в данном неприводимом представлении приводило бы к состоянию с весом старше $\boldsymbol{\mu}_S$, что противоречит самому определению старшего веса.

• Формула Рака

Вследствие положительной определенности квадратичного оператора Казимира C_2 для компактной простой алгебры Ли групповой инвариант C_2 можно представить как сумму квадратичных эрмитовых мономов, которая берется по генераторам в подалгебре Картана Γ_l и по генераторам $\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}$ корневого дополнения подалгебры Картана. Здесь $\gamma_{\tilde{m}}$ — это *все положительные корни*, а

$$\tilde{m} \in \big\{\overline{1, \tfrac{1}{2}(N_g - n)}\big\}.$$

[17] Этого не может произойти, если выполнены постулаты взаимности и транзитивности в определении соотношения эквивалентности.

[18] Операторы Казимира как образующие центр алгебры Ли по построению коммутируют между собой и со всеми генераторами группы. Следовательно, оператор Казимира коммутирует и с любым элементом группы, поскольку групповой элемент можно записать в экспоненциальной форме с аргументом экспоненты в виде произведения ковектора генераторов на контрвектор групповых координат. Поэтому групповые преобразования в собственном пространстве оператора Казимира оставляют это пространство инвариантным.

При переходе к базису Картана–Вейля (II.3.51) от базиса эрмитовых генераторов, в котором метрика Киллинга диагональна и пропорциональна символу Кронекера $g_{ab} = \Omega^2\delta_{ab}$ с конформным фактором $\Omega^2 > 0$, в обратной метрике $g^{ab} = \delta^{ab}/\Omega^2$ обычно опускают конформный фактор и определяют квадратичный оператор Казимира (с тильдой) как $\tilde{C}_2 = \delta^{ab}\Gamma_a\Gamma_b = \Gamma_a\Gamma_a$ (см. стр. 87 и формулу (II.2.49))

$$\tilde{C}_2 = \Gamma_a\Gamma_a = \Gamma_l\Gamma_l + \sum_{\tilde{m}} \big(\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\big). \tag{III.2.4}$$

Отсюда находим, что каждый вклад в среднее значение C_2 неотрицателен, так как для эрмитово самосопряженных генераторов подалгебры Картана

$$\langle\boldsymbol{\mu}|\Gamma_l\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}|\Gamma_l\mu_l|\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_l\mu_l\langle\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\mu}\rangle = (\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu})\langle\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\mu}\rangle > 0,$$

а для корневых генераторов имеет место связь

$$\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma^\dagger_{\gamma_{\tilde{m}}},$$

откуда среднее произведения генераторов выражается через положительную норму состояния

$$|\psi\rangle = \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}\rangle.$$

Находим

$$\langle\psi|\psi\rangle = \big(\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}\rangle\big)^\dagger\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}|\Gamma^\dagger_{\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}|\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}\rangle \geqslant 0.$$

Значит, среднее значение квадратичного оператора Казимира по собственному состоянию операторов подалгебры Картана представления

$$\langle\tilde{C}_2\rangle \equiv \langle\boldsymbol{\mu}|C_2|\boldsymbol{\mu}\rangle = (\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}) + \langle\boldsymbol{\mu}|\sum_{\tilde{m}}\big(\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\big)|\boldsymbol{\mu}\rangle \geqslant (\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}).$$

Если вычислять среднее по состоянию старшего веса, то, во-первых, действие любого повышающего генератора на состояние старшего веса равно нулю, поэтому

$$\langle\boldsymbol{\mu}_S|\sum_{\tilde{m}}\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0.$$

Во-вторых, с помощью выражения для коммутатора двух генераторов с противоположными значениями корней

$$[\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}},\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}] = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}})_l\Gamma_l \quad\Rightarrow\quad \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}})_l\Gamma_l,$$

можно вычислить вклад в среднее значение членов вида

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\mu}_S|\sum_{\tilde{m}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}_S|\sum_{\tilde{m}}\big(\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}})_l\Gamma_l\big)|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0 + \sum_{\tilde{m}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}})_l\langle\boldsymbol{\mu}_S|\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \\ = \sum_{\tilde{m}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}})_l(\boldsymbol{\mu}_S)_l\langle\boldsymbol{\mu}_S|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sum_{\tilde{m}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}},\boldsymbol{\mu}_S)\langle\boldsymbol{\mu}_S|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sum_{\tilde{m}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}},\boldsymbol{\mu}_S),\end{aligned}$$

где мы приняли, что вектор состояния нормирован на единицу,

$$\langle\boldsymbol{\mu}_S|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 1.$$

В дальнейшем изложении мы всегда полагаем, что *все собственные состояния пространства представления с определенным весом, обозначенные как базисные, являются нормированными на единицу.*

В итоге, среднее значение квадратичного оператора Казимира в состоянии старшего веса носит название формулы Рака, совпадает с его собственным значением в неприводимом представлении и выражается через положительные корни и старший вес[19]

$$\langle\tilde{C}_2\rangle \equiv \langle\boldsymbol{\mu}_S|C_2|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = (\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\mu}_S) + \sum_{\tilde{m}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}},\boldsymbol{\mu}_S). \tag{III.2.5}$$

[19]В математической литературе принято указывать имя автора формулы (III.2.5) — Г. Рака.

• Веса базисных состояний неприводимого представления

Состояние старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ (в англоязычной литературе — highest weight, мы же используем индекс S от слова senior) обнуляется не только генераторами простых положительных корней, но и всеми другими генераторами положительных корней, представимых как линейные комбинации простых с натуральными коэффициентами[20]. Следовательно, все остальные состояния неприводимого представления получаются действием на состояние старшего веса композиции только понижающих операторов, так как при наличии хотя бы одного повышающего оператора в композиции нескольких можно было бы его переставлять с понижающими, пользуясь коммутационными соотношениями, до тех пор, пока повышающий оператор не станет первым (самым правым) в композиции, не подействует на состояние старшего веса и не даст тем самым нулевой результат[21].

В самом деле, так как базис состояний неприводимого представления состоит из конечного числа состояний, всякое базисное состояние этого представления, отличное от состояние старшего веса, можно представить как результат действия полиномов конечной степени по корневым генераторам $\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_n}$ на состояние старшего веса. Это определяет для состояния старшего веса класс эквивалентности, которому принадлежит всякое базисное состояние в неприводимом представлении,

$$|\boldsymbol{\nu}\rangle = \sum_{k<k_{\max}} c'_{n_k,\dots,n_1}\,\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_k}}\cdots\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \qquad \boldsymbol{\nu}\neq\boldsymbol{\mu}_S.$$

В рамках метода математической индукции предположим, что при действии произведения k корневых генераторов алгебры Ли на базисное состояние старшего веса при получении нового базисного состояния с весом $\boldsymbol{\nu}\neq\boldsymbol{\mu}_S$ это произведение можно свести к линейным комбинациям произведений только понижающих генераторов степени не выше k

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_k}}\cdots\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sum_{p\leqslant k} c_{i_p,\dots,i_1}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}}\cdots\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Очевидно, это справедливо при $k=1$. Поскольку любой повышающий оператор по определению старшего вектора дает нулевой результат, а могущие появиться при преобразованиях начального монома генераторы из подалгебры Картана не меняют ни состояние, ни его вес[22]. Тогда по индукции для произведения корневых генераторов $k+1$ степени новые базисные состояния получаются при действии корневого генератора на произведение понижающих генераторов

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_k}}\cdots\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}}\sum_{p\leqslant k} c_{i_p,\dots,i_1}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}}\cdots\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Но при коммутации генераторов

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}} + N_{\gamma_{n_{k+1}},-\alpha_{i_p}}\,\Gamma_{(\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}-\boldsymbol{\alpha}_{i_p})},$$

мы получаем из монома произведения генераторов бином, в котором второе слагаемое сведено к произведению генераторов степени k, т. е. оно может быть приведено к полиному от понижающих генераторов степени не выше k, а первое слагаемое приводит к выражению вида

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}}\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_{p-1}}}\cdots\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{i_p}}\sum_{\tilde{p}\leqslant k}\tilde{c}_{\tilde{i}_{\tilde{p}},\dots,\tilde{i}_1}(\boldsymbol{\gamma}_{n_{k+1}},\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_1})\,\Gamma_{-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\tilde{i}_{\tilde{p}}}}\cdots\Gamma_{-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\tilde{i}_1}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle,$$

в котором мы опять можем воспользоваться условием индукции. В итоге, случай степени $k+1$ сводится к полиному лишь от понижающих операторов степени не выше $k+1$, т. е. действительно все состояния базиса суть результаты многократного действия понижающих генераторов на состояние старшего веса. Отсюда вытекает, что все другие базисные состояния неприводимого представления имеют координаты на весовой диаграмме (весовые векторы)

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu}_S - \sum_m k_m\,\boldsymbol{\alpha}_m, \tag{III.2.6}$$

[20] Достаточно, чтобы действие генераторов для простых положительных корней на состояние старшего веса давало нуль, так как отсюда следует, что и все другие генераторы положительных корней обращают состояние старшего веса в нуль. Доказательство этого утверждения мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

[21] Мы имеем ввиду здесь метод математической индукции, который описан подробнее ниже, так что двукратное действие двух генераторов на состояние старшего веса при учете коммутатора генераторов сводится к двукратному действию тех же генераторов в обратном порядке плюс однократное действие генератора, который задан коммутатором рассматриваемой пары генераторов.

[22] Из этого замечания почти очевидно, что результат действия однородного полинома генераторов алгебры, *сохраняющего состояние старшего веса*, совпадает с действием полинома, составленного из генераторов подалгебры Картана. Коэффициенты этого полинома могут зависеть только от структурных констант алгебры Ли и компонент старшего веса неприводимого представления.

где $k_m \in \{0, \mathbb{N}\}$, т. е. неотрицательные целые числа, а $\boldsymbol{\alpha}_m$ — простые положительные корневые векторы алгебры Ли[23]. Это позволяет заключить также, что *состояние старшего веса — единственное для данного неприводимого представления.* Во-первых, старший вес определен однозначно, и другого старшего веса в неприводимом представлении нет. Во-вторых, состояние со старшим весом невырождено. В самом деле, если есть два разных состояния с одним старшим весом $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_1$ и $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_2$, то среди состояний неприводимого представления, построенного по $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_1$ есть только состояния, которые получаются действием понижающих операторов, с весами, отличными от $\boldsymbol{\mu}_S$. Поэтому среди них нет $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_2$. Значит, $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_2$ не принадлежит неприводимому представлению состояния $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle_1$. Другими словами, каждое состояние старшего веса порождает свое отдельное пространство неприводимого представления (один класс эквивалентности, который инвариантен относительно действия генераторов алгебры Ли и не содержит в себе инвариантных подпространств).

Этот вывод единственности состояния старшего веса неприводимого представления очень важен, так как из него следуют следующие положения:

- поскольку состояние старшего веса однозначно характеризуется набором n собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана, т. е. компонентами старшего веса, число которых равно рангу группы n, то этот набор n чисел является, как мы докажем, уникальным для каждого старшего веса, фактически являющегося исходным элементом неприводимого представления, и неприводимое представление однозначно задается этим набором из n собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана,

- количество независимых инвариантов – операторов Казимира, т. е. количество образующих в центре алгебры Ли (см. обсуждение при введении операторов Казимира степени k сразу после определений (II.2.39) и (II.2.40)) равно рангу группы n, так как всякое неприводимое представление однозначно задается либо значениями координат старшего веса, т. е. набором из n чисел, либо значениями независимых инвариантов, а значит, это соответствие между n компонентами старшего веса неприводимого представления и значениями независимых инвариантов для того же неприводимого представления может быть только взаимнооднозначным[24].

Докажем, что значения компонент старшего веса неприводимого представления задаются набором n чисел, уникальным для каждого неприводимого представления.

2.1 Допустимые значения старшего веса и фундаментальные представления

Установим допустимые значения старшего веса в неприводимом представлении простой компактной группы Ли. Для этого вычислим норму состояния, полученного многократным действием понижающего оператора на состояние старшего веса

$$\Gamma^p_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \mapsto \langle\boldsymbol{\mu}_S|\Gamma^p_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma^p_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \mathcal{K}_p, \tag{III.2.7}$$

где $\mathcal{K}_p$ — положительная величина, равная квадрату нормы состояния. Стандартный коммутатор повышающего оператора с понижающим выражается через генераторы подалгебры Картана

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_l\Gamma_l,$$

так что

$$\mathcal{K}_p = \langle\boldsymbol{\mu}_S|\Gamma^{p-1}_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}\Gamma^{p-1}_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle + \langle\boldsymbol{\mu}_S|\Gamma^{p-1}_{\boldsymbol{\alpha}}\alpha_l\Gamma_l\Gamma^{p-1}_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Но

$$\Gamma^{p-1}_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \sim |\boldsymbol{\mu}_S - (p-1)\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

а

$$\Gamma_l|\boldsymbol{\mu}_S - (p-1)\boldsymbol{\alpha}\rangle = \{(\mu_S)_l - (p-1)\alpha_l\}|\boldsymbol{\mu}_S - (p-1)\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

и, следовательно,

$$\alpha_l\Gamma_l\Gamma^{p-1}_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\mu}_S) - (p-1)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\}\Gamma^{p-1}_{-\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

[23] Вычитаться будут и составные корни, но они не изменят формулы (III.2.6) в силу того,что составные корни образованы из суммы простых с целыми неотрицательными коэффициентами.

[24] Число независимых инвариантов не может быть меньше n, поскольку в уникальном наборе из n неотрицательных чисел, однозначно задающих старший вес, каждое из этих чисел является атрибутом неприводимого представления в целом. Число независимых инвариантов Казимира не может превышать количества неотрицательных чисел в уникальном наборе, задающем компоненты старшего веса неприводимого представления, поскольку все собственные значения инвариантов Казимира в любом неприводимом представлении выражаются в виде одинаковых для всех представлений функций от n переменных, равных числам в уникальном наборе.

Значит,

$$\mathcal{K}_p = \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle + \{ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}_S) - (p-1)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \} \mathcal{K}_{p-1}.$$

Переставляя повышающий оператор дальше вправо по той же схеме, найдем

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle &= \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^2 \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-2} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} \alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-2} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle = \\
&= \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^2 \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-2} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle + \{ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}_S) - (p-2)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \} \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-2} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle = \\
&= \langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^2 \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p-2} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle + \{ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}_S) - (p-2)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \} \mathcal{K}_{p-1}.
\end{aligned}$$

Повторяя эти шаги ровно p раз до тех пор, пока повышающий оператор не окажется первым справа и, действуя на состояние старшего веса, не преобразует его в вектор с нулевой нормой

$$\langle \boldsymbol{\mu}_S | \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^{p-1} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}}^{p} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} | \boldsymbol{\mu}_S \rangle = 0,$$

получим, что

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \left\{ \sum_{k=1}^{p} \Big((\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}_S) - (p-k)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \Big) \right\}.$$

Тогда из сумм для арифметических прогрессий

$$\sum_{k=1}^{p} (p-k) = \frac{1}{2}\, p\,(p-1), \qquad \sum_{k=1}^{p} 1 = p$$

установим рекуррентное соотношение

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \left\{ p\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}_S) - \frac{1}{2}\, p\,(p-1)\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \right\} \tag{III.2.8}$$

при очевидном условии нормировки в определении (III.2.7)

$$\mathcal{K}_0 = \langle \boldsymbol{\mu}_S | \boldsymbol{\mu}_S \rangle = 1. \tag{III.2.9}$$

Однако, так как базис пространства состояний представления конечен, рекурренция (III.2.8) должна оборваться на некотором $p_m + 1$ шаге, т. е. норма состояния, полученная действием $p_m + 1$ понижающих генераторов $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$, по необходимости обращается в нуль, что согласно (III.2.8) возможно, только если для всех простых положительных корней простой компактной алгебры Ли числа[25]

$$p_m = 2\, \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \in \{0, \mathbb{N}\} \tag{III.2.10}$$

являются неотрицательными целыми и имеют смысл числа шагов понижения старшего веса в каждом из заданных простыми корнями направлений, после которых следующее понижение дает нулевое состояние. В этой связи удобно ввести фундаментальные векторы $\boldsymbol{\lambda}_j$, каждый из которых ортогонален всем простым положительным корневым векторам кроме одного и имеет на него фиксированную проекцию, а именно

$$2\, \frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \delta_{jm}. \tag{III.2.11}$$

Простые положительные корни образуют базис в n-мерном пространстве корневых и весовых векторов. Определение фундаментальных векторов задает альтернативный базис в том же пространстве. На рис. 3.4 мы показали плоскость двух простых положительных корней и сопряженных им фундаментальных векторов, каждый из которых ортогонален простому положительному корневому вектору с «чужим» номером.

Например, если старший вес равен λ_m (мы покажем чуть ниже, что это возможно), то из сравнения (III.2.10) с (III.2.11) получим, что отличный от нуля результат при действии понижающими операторами, отвечающими простым отрицательным корням, на состояние такого старшего веса получится только для $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$, и только однократно. Остальные понижающие генераторы дадут нуль пространства состояний при действии на такое состояние старшего веса в силу ортогональности других корней выбранному фундаментальному вектору.

[25] Сама формула справедлива для любого положительного корня, а не только простого. Более того, возможно обобщение и на состояние, действие на которое повышающего корневого генератора дает нуль, а не только на состояние старшего веса.

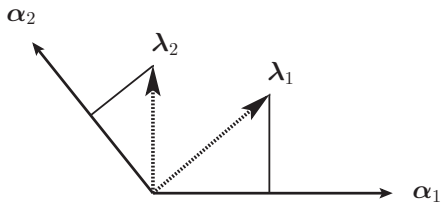


Рис. 3.4: Два простых положительных корня и сопряженные им фундаментальные векторы.

Перепишем формулу (III.2.11) в случае, когда $j = m$, $\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_m$, а корень $\boldsymbol{\alpha}_m$ имеет единичную длину,

$$(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) = \tfrac{1}{2}.$$

Ортогональным преобразованием генераторов подалгебры Картана всегда можно сделать корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m$ равным $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. При таком выборе операторов подалгебры Картана мы получаем, что m-ый фундаментальный вектор, который в нашем примере совпадает со старшим весом представления, равен $(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \ldots)$. Тогда

$$p_m = 2(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) = 1,$$

и, следовательно, следующее, второе по счёту действие понижающего генератора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ превратит состояние в нулевое. Однократное действие даст

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \sim |\boldsymbol{\lambda}_m - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle = \big|-\tfrac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \ldots)\big\rangle.$$

Таким образом при этом выборе базиса на диаграмме весов мы получаем, что набор собственных значений первого оператора подалгебры Картана Γ'_1 сводится к множеству $\mu_1 = \big\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\big\}$. Это означает, что Γ'_1 и $\Gamma_{\pm\boldsymbol{\alpha}_m}$ образуют на первой компоненте пространства весов двумерное представление алгебры $\mathfrak{su}(2)$, так как $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\big|\big(-\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \ldots\big)\big\rangle \sim \big|\big(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \ldots\big)\big\rangle$.

Продолжая совместное рассмотрение свойств старшего веса и фундаментальных векторов, разложим старший вес по базису фундаментальных векторов

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_{j=1}^{n} f_j \boldsymbol{\lambda}_j,$$

и найдем коэффициенты f_j, вычисляя скалярное произведение

$$(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\mu}_S) = \sum_{j=1}^{n} f_j (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\lambda}_j) = \sum_{j=1}^{n} f_j \delta_{jm} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) = f_m \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_{m=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_m \, 2 \, \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}.$$

После подстановки выражения для p_m (III.2.10) имеет место следующее разложение по базису фундаментальных векторов

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_{m=1}^{n} p_m \boldsymbol{\lambda}_m, \tag{III.2.12}$$

где неотрицательные целые коэффициенты p_m равны максимальному числу последовательных шагов понижения старшего веса заданного неприводимого представления в направлениях, каждое из которых задано простым положительным корнем $\boldsymbol{\alpha}_m$ простой компактной алгебры Ли, а число таких направлений равно рангу алгебры Ли n.

Мы доказали важное утверждение: *весовой вектор состояния старшего веса является линейной комбинацией фундаментальных векторов с целочисленными неотрицательными коэффициентами.* Фундаментальные векторы образуют базис в пространстве корневых векторов. Фундаментальные векторы, образуя базис, являются линейно независимыми, так что уникальный набор неотрицательных целых чисел $\{p_m\}$, количество которых равно рангу группы, однозначно задает весовой вектор состояния старшего веса неприводимого представления, т. е. и само неприводимое представление задается уникальным набором из этих независимых n чисел $\{p_m\}$. Выражение (III.2.12) по сути определяет

классификацию всех неприводимых представлений простых компактных алгебры Ли: неприводимое представление полностью задается своим старшим весом $\boldsymbol{\mu}_S$, а старший вес полностью определяется набором неотрицательных целых чисел p_m, которые таким образом однозначно характеризуют неприводимое представление, и никаких других старших весов быть не может[26].

Другими словами, какое бы неприводимое представление мы не исследовали, мы получим набор неотрицательных целых чисел p_m. Но для нас более важным утверждением является условно обратное: любому набору из n неотрицательных целых чисел p_m соответствует неприводимое представление рассматриваемой алгебры Ли.

С этим утверждением связано важное определение. Наборы $\{p_k\}$, состоящие из единственной единицы на k-той позиции и $n-1$ нулей, назовем *фундаментальными*. Каждому такому набору $\{p_k\}$ по определению соответствует *фундаментальное представление, в котором старший вес равен фундаментальному вектору*. Следовательно, у каждой алгебры Ли ранга n есть n фундаментальных представлений. Для m-того фундаментального представления при $p_k = \delta_{km}$ введем обозначение

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \equiv |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \quad \text{— фундаментальное состояние.}$$

Число фундаментальных векторов по построению равно рангу группы Ли n. Набор фундаментальных векторов образует альтернативный базис[27] в векторном пространстве корневых векторов наряду с базисом простых положительных корневых векторов. Каждому фундаментальному вектору отвечает фундаментальное представление со старшим вектором представления из множества

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \ \in \ \{|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle, \ldots, |\boldsymbol{\lambda}_n\rangle\}.$$

Значит, число различных фундаментальных представлений также равно рангу группы Ли.

2.2 Состояние старшего веса как тензорное произведение фундаментальных состояний

Важно подчеркнуть роль фундаментальных представлений, поскольку согласно (III.2.12) старший вес какого-либо неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов с неотрицательными целочисленными коэффициентами

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_m p_m \boldsymbol{\lambda}_m.$$

Это значит, само представление можно построить, взяв состояние старшего веса в виде произведения состояний старших весов фундаментальных представлений

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle^{p_1} \otimes \ldots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_n\rangle^{p_n}, \quad \text{где} \quad |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle^{p_k} \equiv \underbrace{|\boldsymbol{\lambda}_k\rangle \otimes \cdots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle}_{p_k}, \tag{III.2.13}$$

[26] Некомпактым обобщением проведенных построений является присвоение отличным от нуля коэффициентам p_m не натуральных значений: в таком случае теряет смысл понятие нормы состояния, так что и компоненты весов как собственные значения генераторов подалгебры Картана перестают быть характеристиками физических состояний. Такие обобщения возможны, если речь идет не о симметрии физических величин, характеризующих квантовые состояния, а о симметрии выражений для матричных элементов в квантовой механике. Например, обобщение представлений алгебры $\mathfrak{su}(2)$ с одномерными весами и корнями путем введения вещественного значения единственного в данном случае числа p_1 вместо натурального или равного нулю определяет модули Верма, для которых нет периодичности по углам преобразований, т. е. пространство групповых параметров не является компактным, а цепочка состояний, полученная многократным действием понижающего оператора на состояние старшего веса, является бесконечной, а не состоит их конечного числа состояний. Поэтому модуль Верма является бесконечномерным пространством без нормы.

Другой пример — бесконечная одномерная решетка как периодический потенциал движения частицы в сравнении со свободной частицей на окружности. Волновые функции частицы на окружности периодические: трансляция при полном обороте является тождественным преобразованием, так что угловая координата компактна, и на окружности укладывается счетное число периодов колебания волны, и это число задает дискретные значения волнового вектора, который квантуется, а не принимает произвольные значения. На бесконечной решетке сдвиг волновой функции на период означает переход к тому же значению волновой функции, умноженному на фазовый множитель, модуль которого равен единице, так как плотность распределения вероятностей при сдвиге на период не может измениться по самому смыслу движения в потенциале решетки. В итоге волновой вектор на решетке не квантуется, хотя и принято область его изменений разбивать на отрезки, отвечающие одной длине волны, равной периоду решетки (зона Бриллюэна) и присваивать каждой такой области ее порядковый номер, принимающий целые значения (номер зоны Бриллюэна). Как видим, в этом примере волновые функции на решетке не нормируемы и нет квантования волнового вектора, причем волновой вектор в зоне Бриллюэна, умноженный на $\hbar$ называют квазиимпульсом, от которого может зависеть энергия частицы на решетке так, что в каждой зоне эта зависимость определяется, вообще говоря, разными функциями (правда, можно показать, что эти функции одинаковы для противоположных значений номера зоны: n и $-n$).

[27] Напомним, что в векторном анализе, если задан базис вещественного векторного пространства $\boldsymbol{e}_a$, по которому разлагаются все элементы $\boldsymbol{v}$ этого пространства $\mathcal{V}$ согласно формуле $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{e}_a$, базис линейных функций $f(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$, которые переводят элементы $\mathcal{V}$ в вещественные числа, — это набор $h^b(\boldsymbol{e}_a) = \delta^b_a$. Тогда говорят, что векторы $\boldsymbol{h}^b$ — это базис ковариантного векторного пространства, так как введенные связи можно записать в виде скалярных произведений

$$(\boldsymbol{h}^b, \boldsymbol{e}_a) = \delta^b_a, \qquad \boldsymbol{f} = f_b \boldsymbol{h}^b, \qquad f(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = (f_b \boldsymbol{h}^b, v^a \boldsymbol{e}_a) = f_b v^a \delta^b_a = f_a v^a,$$

где $f(\boldsymbol{e}_a) = f_a$. Поэтому можно говорить, что введенное определение фундаментальных векторов (III.2.11) с точностью до коэффициента повторяет определение базиса в ковариантном пространстве, сопряженном контравариантному пространству с базисом, заданным простыми положительными корнями.

или в краткой записи

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \prod_m^{\otimes} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m}. \tag{III.2.14}$$

В этих тензорных произведениях обычно подразумевается симметризация по перестановкам любых фундаментальных векторов. Например, симметризация тензорного произведения двух базисных состояний с разными старшими весами дает

$$\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}\big(|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle\big) \equiv \frac{1}{2}\big(|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle + |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle\big)\, A,$$

где A — это постоянная, которая обеспечивает нормировку состояния на единицу: при $m \neq m'$ она равна $\sqrt{2}$, а при $m' = m$ — единице.

При антисимметризации тензорного произведения двух фундаментальных состояний получается либо нулевое состояние в случае одинаковых фундаментальных состояний, либо, если фундаментальные состояния различны и потому ортогональны, состояние старшего веса, ортогональное состоянию старшего веса, заданного симметризацией тензорного произведения. Такие состояния старшего веса задают различные неприводимые представления, изоморфные друг другу. Поэтому в рамках подобного изоморфизма можно определить процедуру построения тензорного произведения фундаментальных состояний следующим образом: сначала упорядочим множество фундаментальных состояний, а тензорное произведение для состояния старшего веса станем записывать в заданном таким упорядочиванием виде от первого фундаментального состояния к последующим, например, $|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_3\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_4\rangle \otimes \ldots$

Действие генератора алгебры Ли на состояния в тензорном произведении задается как действие симметризованной прямой суммы генераторов, определенных на фундаментальных представлениях, и мы напишем его чуть ниже в явном виде (III.2.15). Поэтому симметризация тензорного произведения по перестановке его сомножителей неважна. Но в случае, когда на состояния тензорного произведения могут действовать операторы иной, отличной от генераторов алгебры Ли природы, симметризация тензорного произведения может оказаться значимой. Нормирующий множитель A при симметризации тензорного произведения различных фундаментальных состояний подобран так, чтобы действие генераторов алгебры на симметризованное и несимметризованное тензорное произведение фундаментальных представлений давало одинаковый результат в смысле изоморфизма неприводимых представлений.

На построенное таким образом состояние старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ действуют генераторы $\Gamma^{\otimes}$, которые необходимо определить на тензорном произведении пространств фундаментальных представлений как прямую сумму действия генераторов в соответствующих множителях тензорного произведения, причем сумма строится *симметрично* по отношению к каждой из компонент тензорного произведения. Например, действие повышающего генератора $\Gamma^{\otimes}_{\alpha_k}$ на тензорное произведение двух состояний старшего веса, т. е. двух фундаментальных состояний, в этой схеме задается в виде

$$\begin{aligned}\Gamma^{\otimes}_{\alpha_k}\big(|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle\big) &\equiv \big\{(\Gamma_{\alpha_k} \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_{\alpha_k})\big\}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \\ &= \Gamma_{\alpha_k}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle + |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes \Gamma_{\alpha_k}|\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \mathbf{0} \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle + |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{III.2.15}$$

Мы видим, что состояние (III.2.13) действительно является состоянием старшего веса. Убедимся, что это состояние имеет вес старшего вектора представления с выбранными ранее неотрицательными целыми коэффициентами p_m,

$$\Gamma^{\otimes}_l|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma^{\otimes}_l \prod_m^{\otimes} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m} = \left\{\sum_m p_m(\boldsymbol{\lambda}_m)_l\right\} \prod_m^{\otimes} |\boldsymbol{\lambda}_m\rangle^{p_m} = \big(\boldsymbol{\mu}_S\big)_l|\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \tag{III.2.16}$$

где действие генератора из подалгебры Картана на тензорное произведение векторов определяется опять же как действие прямой суммы генераторов, определенных на фундаментальных представлениях. Например,

$$\Gamma^{\otimes}_l\big(|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle\big) \equiv \big\{(\Gamma_l \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_l)\big\}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \big\{(\boldsymbol{\lambda}_m)_l + (\boldsymbol{\lambda}_{m'})_l\big\}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle. \tag{III.2.17}$$

Подчеркнем, что тензорное произведение фундаментальных состояний является собственным состоянием генераторов подалгебры Картана и инвариантных операторов Казимира независимо от порядка сомножителей в тензорном произведении.

С точки зрения физики построение неприводимого представления с помощью состояния старшего веса, которое выражается через состояния старших весов фундаментальных представлений, называется составной моделью: состояния такого неприводимого представления выражаются через произведение состояний фундаментальных представлений. Поэтому можно говорить о том, что квантовые числа состояний неприводимого представления составлены из квантовых чисел состояний фундаментальных

представлений: в этом смысле формулы типа (III.2.16) или (III.2.17) играют важную роль, так как собственное значение генератора подалгебры Картана для базисного состояния в тензорном произведении равно сумме собственных значений этого же генератора для базисных состояний на пространствах фундаментальных представлений, что и составляет суть утверждения о квантовых числах в составной модели. Например, мы увидим, что из кварков и антикварков, образующих два фундаментальных представления группы ароматов, можно составить состояния барионов (3 кварка) и мезонов (кварк-антикварк). Вместе с тем состояния неприводимого представления могут трактоваться и не как составные, а самостоятельные, отдельные исходные блоки построения квантовых состояний физической системы. Нет никакого различия между такими толкованиями в рамках чисто математической конструкции, но в физике такое различие возникает при введении дополнительных характеристик, которые определяются массой, энергией и спином состояний.

Здесь важно подчеркнуть, что описанное нами тензорное произведение состояний со старшими весами фундаментальных представлений относится только к состоянию старшего веса неприводимого представления, а при рассмотрении всего неприводимого представления нужно быть внимательным, так как тензорное произведение пространств даже двух неприводимых представлений может оказаться приводимым: линейная оболочка, построенная из образов состояния старшего веса при действии на него матриц групповых преобразований, вообще говоря, у́же, чем пространство тензорного произведения неприводимых представлений. Этот вопрос мы рассмотрим более детально при изучении тензорных произведений неприводимых представлений в группе SU(3) с помощью схем Юнга.

2.3 Операция вейлевского отражения

Запишем вес $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$ для последнего отличного от нуля состояния $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$, которое получается в цепочке понижения состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, с помощью выражения для максимального числа шагов p_m в направлении $-\boldsymbol{\alpha}_m$ согласно (III.2.10),

$$\boldsymbol{\nu}_{S,m} \equiv \boldsymbol{\mu}_S - p_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\mu}_S - 2\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m. \tag{III.2.18}$$

Смысл этой формулы достаточно ясен: вычисляется проекция старшего веса на корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m$, а затем эта проекция вычитается дважды (см. рис. 3.5). Таким образом, проекция весового вектора $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$ на это направление у состояния $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ в цепочке понижения от состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ равна проекции старшего весового вектора со знаком минус. Если бы пространство весов и корней было трехмерным, то такое изменение веса можно было бы назвать отражением весового вектора в плоскости, перпендикулярной корню $\boldsymbol{\alpha}_m$. Это объясняет происхождение термина «отражение Вейля».

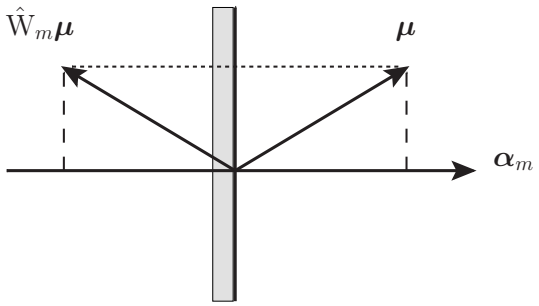


Рис. 3.5: Вейлевское отражение веса $\boldsymbol{\mu}$ вдоль оси, которая задана корневым вектором $\boldsymbol{\alpha}_m$. Для наглядности в двумерном случае показано «зеркало».

Напомним, что базисное состояние старшего веса является единственным для данного веса в неприводимом представлении группы, т. е. кратность вырождения старшего веса равна единице, а значит, мы можем ввести операцию отражения состояния старшего веса как преобразования в другое базисное состояние этого же представления

$$\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle,$$

причем конечное состояние имеет норму состояния старшего веса. Таким образом оператор отражения унитарен по построению. Состояние $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ является базисным состоянием того же неприводимого представления и однозначно задается p_m-кратным действием понижающего генератора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ на состояние старшего веса, а действие этой операции отражения на состояние $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ совпадает с обратным

преобразованием:

$$\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle = |\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

В самом деле, обозначим тем же, но не прописным, а строчным символом и операцию отражения во множестве весовых векторов неприводимого представления:

$$\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\nu}_{S,m}.$$

Тогда в полной аналогии с (III.2.18)

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}_{S,m} &= \boldsymbol{\nu}_{S,m} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}_{S,m},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m = \\ &= \boldsymbol{\mu}_S - 2\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m - 2\,\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m\,\left(\boldsymbol{\mu}_S - 2\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m\right) = \\ &= \boldsymbol{\mu}_S - 4\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m + 4\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\mu}_S.\end{aligned}$$

Это значит, что если существует другое состояние $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'$ с тем же весом $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$, то в этом дополнительном состоянии можно исключить вклад, пропорциональный ортонормированному состоянию $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$,

$$|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle' \;\mapsto\; |\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle' - |\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle\langle\boldsymbol{\nu}_{S,m}|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'.$$

После этой замены получим, что дополнительное состояние $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'$ ортогонально состоянию $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$, которое получается последовательным p_m-кратным действием понижающих операторов на состояние старшего веса. Операция отражения дополнительного состояния $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'$ приведет к состоянию $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle'$ со старшим весом $\boldsymbol{\mu}_S$, и это состояние ортогонально исходному состоянию старшего веса, что следует из унитарности оператора отражения:

$$\begin{aligned}\big(\hat{\mathrm{W}}_m|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle\big)^\dagger\big(\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'\big) = \langle\boldsymbol{\nu}_{S,m}|\hat{\mathrm{W}}_m^\dagger\,\hat{\mathrm{W}}_m|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle' = \langle\boldsymbol{\nu}_{S,m}|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle' = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \big(\hat{\mathrm{W}}_m|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle\big)^\dagger\big(\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'\big) = \langle\boldsymbol{\mu}_S|\boldsymbol{\mu}_S\rangle' = 0.\end{aligned}$$

Но состояние старшего веса неприводимого представления является уникальным в этом представлении, а значит, состояние $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle'$ и его прообраз $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle'$ не могут принадлежать неприводимому представлению с состоянием старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, т. е. эти состояния со штрихом принадлежат другому неприводимому представлению. Поэтому образ состояния старшего веса неприводимого представления $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ — это единственное состояние с весом $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$ в неприводимом представлении, построенном из состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$. *В неприводимом представлении при отражении вдоль любого корня алгебры состояния старшего веса, которое по построению невырождено, получается состояние с невырожденным весом.*

■ Каждое действие понижающего оператора приводило к однозначно определенному состоянию с пониженным значением веса. Но при этом мы не ставили вопрос о том, сколько может быть состояний, собственных для операторов подалгебры Картана с этим пониженным весом: вообще говоря, состояние с определенным весом ниже старшего может получаться не только многократным действием одного и того же понижающего оператора на состояние старшего веса, а комбинацией действия разных понижающих операторов, так что в каждой из таких комбинаций может возникнуть свое, отличное от результатов действия других комбинаций корневых операторов состояние с этим весом. Таким образом вес ниже старшего может быть, вообще говоря, вырожденным. Покажем, что в последовательности состояний, образованных многократным действием одного и того же понижающего оператора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$, отвечающего простому положительному корню $\boldsymbol{\alpha}_m$, на состояние старшего веса, все пониженные веса невырожденные. После первого шага понижения получится состояние с весом $\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \sim |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle.$$

В этом соотношении коэффициент пропорциональности отличен от нуля, если коэффициент p_m в разложении старшего веса по фундаментальным больше нуля. Согласно (III.2.10) это значит, что скалярное произведение $(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\mu}_S)$ отлично от нуля, а значит, и сама цепочка состояний с понижением веса содержит состояния, отличные от состояния со страшим весом. Допустим, что существует другое состояние с тем же пониженным значением веса $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle'$, в котором мы исключим вклад пропорциональный состоянию $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle$, так что

$$\langle\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle' = 0.$$

Результаты действия повышающего оператора из корневого дополнения с тем же значением корня на эти два состояния должны быть разными. В самом деле, из состояния, построенного действием понижающего оператора, мы снова получим состояние старшего веса:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle \sim \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle\big) = \Big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} + \big(\alpha_m\big)_l\Gamma_l\Big)|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \\ = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}\big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle\big) + \big(\alpha_m\big)_l\big(\mu_S\big)_l|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\mu}_S)|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.\end{aligned}$$

В этом выражении мы воспользовались тем, что повышающий оператор, действуя на состояние старшего веса, дает нуль, а скалярное произведение в конце формулы также отлично от нуля в случае, если состояние $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle$ существует ($\mathcal{K}_1 \neq 0$ в (III.2.8)). Действие же повышающего оператора на другое состояние с пониженным весом $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_M\rangle'$ может дать только состояние, пропорциональное состоянию старшего веса, так как состояние старшего веса в неприводимом представлении единственное. Вычислим скалярное произведение

$$\langle\boldsymbol{\mu}_S|\Big(\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle'\Big) = \Big(\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle\Big)^\dagger|\boldsymbol{\mu}_s - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle' \sim \big(|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle\big)^\dagger|\boldsymbol{\mu}_s - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle' = \langle\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m|\boldsymbol{\mu}_s - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle' = 0.$$

Но это значит, что

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle' = 0,$$

т. е., если это состояние отлично от нуля, оно не может быть повышено оператором $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$. Но состояние с таким весом не может быть повышено и любым другим оператором с простым положительным корнем $\boldsymbol{\alpha}_{m'}$, так как

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle = N'|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_{m'}\rangle,$$

и вес состояния при таком действии изменяется на величину $\boldsymbol{\alpha}_{m'} - \boldsymbol{\alpha}_m$. Но вес состояния представления группы может измениться только на корень, неважно, положительный или отрицательный, простой или нет, а разность простых положительных корней, как мы подчеркивали, не может быть корнем. Значит, нет и состояния, которое указано в формуле выше, т. е. множитель $N' = 0$.

Так как действие всех повышающих генераторов с простыми положительными корнями на дополнительное состояние $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle'$ дает нуль, то либо такого состояния нет, либо это состояние старшего веса для другого неприводимого представления той же простой компактной группы Ли, и оно не принадлежит неприводимому представлению со страшим весом $\boldsymbol{\mu}_S$. Итак, при первом шаге понижения состояния старшего веса получается состояние $|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle$ с невырожденным весом. Однако проведенное нами рассмотрение не обобщается на случай, когда хотя бы один из двух корней в паре повышающего и понижающего генераторов не является простым. Поэтому вырожденность веса, который не является старшим, требует специального рассмотрения. Особый случай — присоединенное представление, и оно будет рассмотрено нами ниже в отдельном разделе. ■

Сейчас же вернемся к общему изложению и исследуем вопрос о том, как действует операция отражения $\hat{\mathrm{W}}_m$ на другие базисные состояния неприводимого представления $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$, где $\boldsymbol{\nu}$ — весовой вектор, а индекс a нумерует базисные состояния с данным весом, так что $a \in \big\{\overline{1, K}\big\}$, и K — это кратность вырождения веса $\boldsymbol{\nu}$ в заданном неприводимом представлении. Будем называть такой вес вырожденным, а любое собственное состояние с таким весом — состоянием вырожденного веса.

Итак, для весового вектора $\boldsymbol{\nu}$ как набора собственных значений генераторов подалгебры Картана на базисных состояниях неприводимого представления формально определим операцию отражения $\hat{\mathrm{W}}_m$ вдоль корневого вектора $\boldsymbol{\alpha}_m$ как

$$\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m \equiv \boldsymbol{\nu}_m. \tag{III.2.19}$$

Из этого определения видно, что отражения вдоль корневых векторов $\boldsymbol{\alpha}_m$ и $-\boldsymbol{\alpha}_m$ совпадают, так что мы будем говорить также об операции отражения вдоль корневой пары $\boldsymbol{\alpha}_m$ и $-\boldsymbol{\alpha}_m$, причем как в пространстве весовых векторов, так и во множестве базисных состояний с определенными весами.

Все отражения $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$ старшего веса $\boldsymbol{\mu}_S$ базисного состояния неприводимого представления группы Ли вдоль различных осей корней алгебры Ли этой группы по построению принадлежат множеству невырожденных весов этого же неприводимого представления. Покажем теперь, что и веса всех отражений любого базисного состояния неприводимого представления тоже принадлежат множеству весов базисных состояний этого же неприводимого представления. Более того, введем индекс a, который нумерует состояния с одним и тем же весом, в обозначения базисных состояний вырожденного веса

$$\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\nu}, a\rangle = |\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}, a\rangle \equiv |\boldsymbol{\nu}_m, a\rangle. \tag{III.2.20}$$

• Отражение состояния вырожденного веса

Нам необходимо показать, что независимо от значения индекса вырождения веса a состояние $|\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ принадлежит неприводимому представлению, в котором задано состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$. Для этого мы выполним несколько шагов. Первый шаг — построение с помощью действия корневого генератора $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, вдоль корня которого строится отражение состояния $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$, состояния $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$, повышение которого дает нулевое состояние. Второй шаг — определение зеркального образа $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ в полной аналогии с построениями для состояния старшего веса. Третий шаг — утверждение о том, что зеркальный образ $|\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ исходного состояния $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ находится в цепи отличных от нуля состояний, которые получаются понижением состояния $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ при действии корневого генератора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$.

Пусть базисное состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$, имеющее вес $\boldsymbol{\nu}$, принадлежит неприводимому представлению. Поскольку представление имеет конечный базис из собственных векторов подалгебры Картана, для заданного повышающего корневого оператора $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$ всегда существует такое отличное от нулевого вектора состояние $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$, которое получено q_a-кратным повышением исходного состояния $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$,

$$N_{q_a}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \Gamma^{q_a}_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\nu}, a\rangle, \qquad N_{q_a} \neq 0, \quad \langle\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = 1, \tag{III.2.21}$$

действие на которое тем же повышающим оператором даст нулевой вектор,

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \mathbf{0}.$$

Состояние $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ аналогично состоянию со старшим весом, для которого состояние $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ обращается в нуль при действии на $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ в отличие от случая состояния старшего веса не любого, а рассматриваемого повышающего оператора $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, заданного в (III.2.21) и отвечающего корню $\boldsymbol{\alpha}_m$. Поэтому для состояния $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ можно повторить проведенные выше на стр. 148 после формулы (III.2.7) рассуждения. Тогда для нормированного на единицу состояния с пониженным на $\boldsymbol{\alpha}_m$ весом согласно (III.2.8) и (III.2.9) в результате действия понижающего генератора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ на нормированное на единицу состояние $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ возникает множитель $\zeta_m \cdot \sqrt{\mathcal{K}_1} = \zeta_m \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a})}$, где знак $\zeta_m = +1$ или $\zeta_m = -1$ зависит, как мы покажем в **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3, от упорядочения повышающих корневых генераторов, который связан с выбором знака в коммутационных соотношениях для генераторов простых положительных корней, а

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \zeta_m \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a})}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} - \boldsymbol{\alpha}_m, a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \mathbf{0},$$

$$2\,\frac{(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0, \mathbb{N}\}. \tag{III.2.22}$$

Неотрицательное целое число $\tilde{p}_{m,a}$ опять имеет смысл числа понижающих шагов, после которых действие генератора понижения $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ на вектор состояния $\Gamma^{\tilde{p}_m}_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ даст нуль.

Возвращаясь к проводимым нами построениям, для базисного состояния неприводимого представления $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ с весом $\boldsymbol{\nu}$ мы сначала построили аналог старшего вектора $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ с весом $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}$, повышая состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ в направлении $\boldsymbol{\alpha}_m$ максимально допустимое число раз q_a, как это записано в (III.2.21). Затем мы вычислили допустимое число шагов $\tilde{p}_{m,a}$ при понижении состояния $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ по направлению $-\boldsymbol{\alpha}_m$. По построению число понижающих шагов от $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}$ в обратную сторону в направлении $-\boldsymbol{\alpha}_m$, т. е. от $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}$ до $\boldsymbol{\nu}$ или дальше, не меньше, чем число шагов от $\boldsymbol{\nu}$ к $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}$, т. е. $\tilde{p}_{m,a} \geqslant q_a$. Согласно (III.2.21) и

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} = \boldsymbol{\nu} + q_a\boldsymbol{\alpha}_m \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} - q_a\boldsymbol{\alpha}_m$$

получаем

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_{m,a} - 2q_a \in \{\mathbb{Z}\}, \tag{III.2.23}$$

где по построению целое неотрицательное число шагов q_a лежит в интервале $0 \leqslant q_a \leqslant \tilde{p}_{m,a}$. Значит, отражение весового вектора $\boldsymbol{\nu}$ приводит к

$$\boldsymbol{\nu}_m \equiv \hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\nu} - (\tilde{p}_{m,a} - 2q_a)\,\boldsymbol{\alpha}_m. \tag{III.2.24}$$

Так как весовой вектор $\boldsymbol{\nu}_m$ определяется только весом $\boldsymbol{\nu}$ и корнями $\boldsymbol{\alpha}_m$ (см. первое после знака отождествления равенство в (III.2.24)), а также их скалярными произведениями, и не зависит от индекса a, который нумерует базисные состояния неприводимого представления с заданным весом, комбинация неотрицательных целых чисел $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$ (см. второе равенство в (III.2.24)) не зависит от индекса a несмотря на то, что каждое из этих чисел, вообще говоря, зависит от a.

Ввиду того, что

$$\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} - q_a\boldsymbol{\alpha}_m,$$

выразим $\boldsymbol{\nu}_m$ через $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}$

$$\boldsymbol{\nu}_m \equiv \hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} - (\tilde{p}_{m,a} - q_a)\boldsymbol{\alpha}_m, \qquad 0 \leqslant (\tilde{p}_{m,a} - q_a) \leqslant \tilde{p}_{m,a}. \tag{III.2.25}$$

Отсюда следует, что базисное состояние с весом $\boldsymbol{\nu}_m \equiv \hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}$ принадлежит «цепочке» базисных состояний неприводимого представления и находится на линии этих состояний в цепочке между $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$ и $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a} -$

$\tilde{p}_{m,a}\boldsymbol{\alpha}_m, a\rangle$, построенной многократным действием понижающего генератора $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ на состояние $|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle$. При этом каждое базисное состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ переходит в базисное состояние $|\boldsymbol{\nu}_m, a\rangle$ с одним и тем же весом $\boldsymbol{\nu}_m$, но сами состояния по построению нумеруются тем же индексом a, что и исходное базисное состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$.

В итоге заключаем, что *отражение всякого базисного состояния неприводимого представления с заданным весом существует, принадлежит тому же неприводимому представлению и является базисным состоянием с весом, равным образу исходного веса при отражении*:

$$\hat{\mathrm{W}}_m\,|\boldsymbol{\nu}, a\rangle = |\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}, a\rangle.$$

аметим, что индекс a является по сути квантовым числом, нумерующим элементы базиса в собственном подпространстве подалгебры Картана с заданным весом $\boldsymbol{\nu}$. Этому базису по процедуре соответствует построенный путем действия отражения Вейля базис в собственном подпространстве подалгебры Картана с весом $\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}$, который мы нумеруем тем же квантовым числом[28]. Если разные состояния с одним и тем же весом $\boldsymbol{\nu}$ описываются разными собственными значениями какой-то физической наблюдаемой, то необязательно полученный такой процедурой базис в подпространстве с весом $\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}$ будет состоять из собственных состояний той же наблюдаемой.

Ясно, что, так как операция отражения на состояниях базиса неприводимого представления является линейной, суперпозиция базисных состояний неприводимого представления при отражении переходит в суперпозицию образов этих базисных состояний, а значит, отражение любого состояния неприводимого представления — это состояние, которое принадлежит этому же неприводимому представлению. Этот факт, как мы увидим ниже на примерах, существенно упрощает процедуру построения неприводимых представлений.

Подчеркнем, что в проведенном нами выше построении операции отражения базисных состояний неприводимого представления с простыми положительными корнями условие простоты положительного корня никак не использовалось. Это значит, все выводы сохраняют свою силу для всех положительных корней алгебры Ли, т. е. *операция отражения базисных состояний неприводимого представления и индуцированное этой операцией отражение весов базисных состояний определены для каждого положительного корня алгебры Ли.*

Очевидно, что в случае, когда вес ортогонален корню, отражение веса относительно этого корня сводится к тождественному преобразованию. Отметим также, что отражение состояния с нулевым весом относительно любого из корней алгебры — это тождественное преобразование. Поэтому множество базисных состояний неприводимого представления алгебры Ли, которые характеризуются своими весами, включая нулевой весовой вектор, при отражении переходит во множество базисных состояний этого же неприводимого представления алгебры Ли. Подчеркнем, что отражение Вейля не равно кратному действию понижающего генератора на базисное состояние, так как генератор может менять норму получающегося состояния, а отражение сохраняет норму состояния.

Композиция двух одинаковых отражений весов, т. е. двукратное действие операции отражения вдоль одного и того же корня алгебры Ли, — это тождественное преобразование для любого веса неприводимого представления, так как

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{w}}_m(\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}) = \hat{\mathrm{w}}_m\left(\boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m\right) = \\ = \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m - 2\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_m}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\left(\boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m\right) = \\ = \boldsymbol{\nu} - 4\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m + 4\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\nu}. \qquad \text{(III.2.26)}\end{aligned}$$

Операция отражения весов базисных состояний неприводимого представления индуцирована операцией отражения самого базисного состояния как линейного преобразования в базисное состояние того же неприводимого представления с сохранением нормы, а значит, отражение базисного состояния можно представить как комбинацию дискретных принадлежащих группе Ли преобразований в пространстве представления и умножения на отличное от нуля число для сохранения унитарности операции отражения Вейля. Но все эти операции, действие элемента группы и умножение на отличное от нуля число сами образуют группу на пространстве неприводимого представления со всеми свойствами, которым с необходимостью должна удовлетворять группа: композиция с ассоциативностью, единица и обратный элемент. Таким образом, отражения весов неприводимого представления вдоль корней группы индуцированы отражениями базисных состояний неприводимого представления и образуют дискретную группу на пространстве весов.

[28] В подпространстве состояний с весом $\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}$ можно выбрать другой базис с иным физическим смыслом и другим нумератором, отличным от a.

■ Для пытливого читателя заметим, что для построения группы отражений необходимо наряду с операциями отражений вдоль корней группы ввести операции многократных или каскадных отражений. Например, для двух разных корней $\boldsymbol{\alpha}_m$ и $\boldsymbol{\alpha}_{m'}$ композиция отражений вдоль этих корней $\hat{\mathrm{W}}_m \cdot \hat{\mathrm{W}}_{m'}$ не сводится к отражению вдоль какого-либо корня, так как

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{w}}_m(\hat{\mathrm{w}}_{m'}\,\boldsymbol{\nu}) &= \hat{\mathrm{w}}_m\left(\boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}\,\boldsymbol{\alpha}_{m'}\right) = \\ &= \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}\,\boldsymbol{\alpha}_{m'} - 2\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_m}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\left(\boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}\,\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_m\right) = \\ &= \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}\,\boldsymbol{\alpha}_{m'} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m + 4\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_{m'})}\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m. \qquad \text{(III.2.27)}\end{aligned}$$

Поэтому к операциям отражения вдоль корней группы необходимо добавить каскадные отражения согласно определению вида

$$\hat{\mathrm{W}}_{mm'} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{W}}_m \cdot \hat{\mathrm{W}}_{m'}, \qquad \hat{\mathrm{W}}_{m_1\ldots m_k} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathrm{W}}_{m_1}\cdots\hat{\mathrm{W}}_{m_k}. \qquad \text{(III.2.28)}$$

По построению каскадное отражение определяется как последовательное действие отражений. У каждого каскадного отражения существует обратное, конструкция которого очевидна. Ясно, что множество всех отражений, состоящее из отражений вдоль корневых векторов и каскадных отражений, на конечномерном пространстве неприводимого представления может быть только конечным. Из (III.2.27) видно, что если корни ортогональны, то $\hat{\mathrm{W}}_{mm'} = \hat{\mathrm{W}}_{m'm}$. Если корни неортогональны, то произведение двух отражений не сводится к отражению вдоль суммы этих корней. Обратный элемент каскадного отражения — это каскадное отражение в обратном порядке, например, $\hat{\mathrm{W}}^{-1}_{mm'} = \hat{\mathrm{W}}_{m'm}$. ■

• Дискретная группа Вейля

Математики говорят, что преобразования многократных отражений вдоль всех корней алгебры Ли на пространстве состояний неприводимого представления образуют группу Вейля. Пространство неприводимого представления инвариантно относительно группы Вейля, т. е. суперпозиция базисных состояний неприводимого представления переходит при действии отражений Вейля в суперпозицию базисных состояний того же неприводимого представления, а линейная оболочка образов всех базисных состояний неприводимого представления простой компактной группы Ли по отношению к действию группы Вейля совпадает с самим пространством этого неприводимого представления.

Доказательство проведем методом от противного и предположим обратное. Если $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}$ — это пространство неприводимого представления, а $\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})$ — это образ пространства $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}$ относительно действия группы Вейля[29], то $\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}) \subset \mathcal{V}_{\mathrm{ir}}$. Если дополнение $\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})$ до $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}$ непусто, т. е.[30] $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}\backslash\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}) \neq \emptyset$, то в силу обратимости действия группы Вейля находим, что, во-первых, $\mathcal{W}\big(\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})\big) = \mathcal{V}_{\mathrm{ir}}$, а во-вторых, образ $\mathcal{W}\big(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}\backslash\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})\big) = \mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})\backslash\mathcal{W}\big(\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})\big) = \mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})\backslash\mathcal{V}_{\mathrm{ir}} = \emptyset$. Таким образом действие группы Вейля на $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}\backslash\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})$ дает пустое множество, откуда мы заключаем, что прообраз - тоже пустое множество. Мы доказали, что дополнение $\mathcal{V}_{\mathrm{ir}}\backslash\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})$ является пустым множеством, и пространство неприводимого представления при действиии группы Вейля переходит в себя.

Важно подчеркнуть, что операция отражения переводит все подпространство состояний с ортонормированным базисом[31] $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$, размерность которого равна кратности вырождения весового вектора $\boldsymbol{\nu}$, в подпространство *той же размерности* с базисом, который образован ортонормированными состояниями $|\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ с весом $\hat{\mathrm{w}}_m\,\boldsymbol{\nu}$. Заметим, что хотя число шагов $\tilde{p}_{m,a}$ и q_a зависят от индекса a, нумерующего собственные состояния с одним и тем же весом, скалярное произведение $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)$, которое определяет вес образа вектора $\boldsymbol{\nu}$ при отражении (см. формулу (III.2.24)), не зависит от a, т. е. комбинация $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$ есть инвариант этого подпространства.

[29] При действии отражений из группы Вейля на элемент пространства представления в образ включаются не только результаты однократных отражений этого элемента, но и результаты всевозможных многократных отражений: на образ однократного отражения также можно подействовать операциями отражения и т.д. Кроме того, состояния с весом, компоненты которого тождественно равны нулю, переходят при отражениях сами в себя, так что образ $\mathcal{W}(\mathcal{V}_{\mathrm{ir}})$ включает в себя такие состояния с нулевым весом.

[30] Если A — это подмножество B, $A \subset B$, то множество C всех элементов c таких, что $c \in B$, $c \notin A$ называется дополнением A до B и символьно обозначается как $C = B\backslash A$.

[31] Это происходит, когда в полный набор наблюдаемых кроме независимых инвариантов — операторов Казимира и генераторов из подалгебры Картана входят еще и операторы Казимира подалгебр Ли в простой компактной алгебре Ли. Оператор Казимира подалгебры не является инвариантом группы Ли, и поэтому он может принимать разные значения на базисных состояниях неприводимого представления при одних и тех же собственных значениях инвариантов Казимира алгебры Ли и компонент весов вырожденных состояний. Например, в алгебре $\mathfrak{su}(3)$, как и в любой другой компактной простой алгебре Ли, очевидно, есть подалгебра $\mathfrak{su}(2)$, что ясно уже из самого вида диаграммы Дынкина для $\mathfrak{su}(3)$: две точки, соединенные линией, содержат одну точку, которая отвечает алгебре $\mathfrak{su}(2)$.

Отметим в этой связи еще раз, что старшему весовому вектору неприводимого представления соответствует только одно нормированное на единицу базисное состояние. Договоримся, что если какой-либо весовой вектор соответствует единственному собственному состоянию генераторов подалгебры Картана, то мы будем говорить, что вес этого состояния *невырожден* или *кратность вырождения весового вектора равна единице,* $K = 1$. Тогда проведенное рассмотрение операции отражения базисных состояний позволяет утверждать, что состояние невырожденного веса переходит при отражениях в состояние невырожденного образа веса.

2.4 Веса присоединенного представления

Покажем, что присоединенное представление компактной простой алгебры Ли определяется старшим весом $\boldsymbol{\mu}_S$, который равен старшему положительному корню $\boldsymbol{\alpha}_S$. Старший положительный корень имеет в порядке следования номеров своих компонент максимальные неотрицательные компоненты среди всех корней алгебры Ли: сначала максимальное значение первой компоненты, потом при условии максимального значения первой компоненты максимальное для второй и т.д. Старший корень не обязательно является простым, он может выражаться через простые положительные корни алгебры Ли.

Для доказательства утверждения о старшем весе присоединенного представления запишем сначала один из коммутаторов в базисе Картана–Вейля (II.3.51)

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = \alpha_l \, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{III.2.29}$$

В присоединенном представлении корневые генераторы наряду с генераторами подалгебры Картана образуют базис в пространстве представления по построению. Покажем, что это базис из собственных состояний генераторов подалгебры Картана. Корневые генераторы $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ как базисные элементы пространства состояний присоединенного представления в рамках дираковских обозначений можно обозначить как $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \mapsto |\boldsymbol{\alpha}\rangle$. Напомним, что коммутатор генератора из подалгебры Картана с корневым генератором имеет один и тот же вид (III.2.29) вне зависимости от нормировки корневого генератора, так что в качестве базисного состояния можно выбрать нормированное на единицу $|\boldsymbol{\alpha}\rangle$. Тогда запись коммутатора как действия линейного преобразования в присоединенном представлении в дираковских обозначениях примет вид[32]

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] \equiv \widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_l\big)} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_l \, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_l\big)} \, |\boldsymbol{\alpha}\rangle = \alpha_l \, |\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

а значит, корни алгебры Ли — это весовые векторы базисных состояний присоединенного представления. Вследствие вида коммутатора для генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0 \tag{III.2.30}$$

введем аналогичные дираковские обозначения для элементов базиса присоединенного представления $\Gamma_l \mapsto |\mathbf{0}, l\rangle$ и запишем

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] \equiv \widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_l\big)} \Gamma_{l'} = 0 \cdot \Gamma_{l'} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_l\big)} \, |\mathbf{0}, l'\rangle = 0 \cdot |\mathbf{0}, l'\rangle = \mathbf{0}.$$

Значит, генераторы подалгебры Картана, записанные как базисные состояния присоединенного представления, образуют базис подпространства размерности, равной рангу группы n по числу состояний $|\mathbf{0}, l'\rangle$ с нулевыми собственными значениями для всех генераторов подалгебры Картана как операторов присоединенного представления с единственным весовым вектором, все компоненты которого тождественно равны нулю.

Если $\boldsymbol{\alpha}_S$ — старший из всех положительных корней алгебры Ли, то он является старшим весом для присоединенного представления, поскольку для всех корневых генераторов, соответствующих положительным корням $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$,

$$\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\big)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_S} \equiv [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_S}] = N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_S} \, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_S} = 0,$$

так как по определению старшего положительного корня он не может быть повышен, и $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_S}$ не существует, т. е. $N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_S} = 0$, и поэтому в дираковской записи

$$\widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\big)} \, |\boldsymbol{\alpha}_S\rangle = \mathbf{0}.$$

В этой же схеме

$$\widehat{\big(\mathrm{ad}\ \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}\big)} \, |\boldsymbol{\alpha}_n\rangle = [\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_n}] = N_{mn} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_m} = N_{mn} \, |\boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_m\rangle.$$

[32] Сравните эту запись с формулой (II.2.14) на стр. 73, где мы описывали общие свойства присоединенного представления и линейные преобразования в этом представлении, возникающие при действии генераторов на векторы пространства.

Итак, пространство присоединенного представления — это линейная оболочка $\mathcal{D} = N_G$ ортонормированных базисных состояний: n собственных состояний генераторов подалгебры Картана с весовым вектором, все компоненты которого равны нулю,

$$|\mathbf{0}, l\rangle, \quad l \in \{\overline{0,n}\},$$

и $(N_G - n)$ состояний, которые имеют веса, равные всем, положительным и отрицательным, корням алгебры Ли,

$$|\boldsymbol{\alpha}_k\rangle.$$

Покажем, что набору ненулевых собственных значений, т. е. весу, который равен корню, соответствует единственное состояние, которое мы обозначаем как $|\boldsymbol{\alpha}_k\rangle$. Для этого обратимся к преобразованиям группы Вейля.

Действие операции отражения из группы Вейля переводит базисное состояние старшего веса в базисное состояние с весом того же неприводимого представления. В случае присоединенного представления это означает, что состояние с весом, равным старшему корню алгебры Ли, при отражении переводится в базисное состояние в весом, равным корню этой же алгебры Ли. А так как старший вес для базисных состояний в пространстве неприводимого представления невырожден, т. е. существует единственное базисное состояние, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана с собственными значениями, равными компонентам старшего веса, то в согласии с установленными свойствами отражений Вейля все многократные отражения состояния старшего веса образуют состояния с невырожденными весами. Значит, образы базисного состояния со страшим весом при действии группы Вейля образуют подмножество базисных состояний неприводимого представления с весами, которые получаются при всевозможных многократных действиях отражений Вейля на старший вес[33].

Теперь докажем, что особенность присоединенного представления простой компактной алгебры Ли заключается в том, что множество образов старшего корня при действии группы Вейля — это все корни этой алгебры Ли. Построим множество всех образов действия группы Вейля на старший корень $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$ и предположим противное: пусть существует положительный корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ рассматриваемой простой компактной алгебры Ли, который не принадлежит $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$, а значит, и все множество его образов[34] при действии группы отражений Вейля не пересекается с множеством образов старшего корня,

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S) \cap \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}') = \emptyset.$$

Это возможно, только если любые элементы из этих двух множеств ортогональны,

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S) \perp \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}'),$$

так как для любого корня $\boldsymbol{\alpha}_m \in \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$ отражение корня $\boldsymbol{\alpha}'$ вдоль $\boldsymbol{\alpha}_m$ — это корень этой же подалгебры Ли, который выражается через корни из множеств $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ и $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$,

$$\hat{\mathrm{w}}_m \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}_m \, 2 \, \frac{(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}.$$

Следовательно

$$\mathcal{W}(\hat{\mathrm{w}}_m \boldsymbol{\alpha}') = \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}') + \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S),$$

что противоречит предположению об изолированности $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ от $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$, если корни в этих множествах не ортогональны друг другу. Однако ортогональность означает, что для любого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}'_{m'}$ из $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ и любого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}_m$ из $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$

$$(\boldsymbol{\alpha}'_{m'}, \boldsymbol{\alpha}_m) = 0.$$

Если во множестве $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ нет простого положительного корня, то все простые положительные корни тогда содержатся во множестве $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$. Но корни в $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ выражаются через простые положительные

[33] Подчеркнем, что под элементом группы Вейля Вейля мы понимаем, во-первых, операцию, которая преобразуют одно базисное состояние в другое с изменением веса в пространстве неприводимого представления. Таким образом, речь идет о вполне определенном базисе состояний, когда каждое базисное состояние $|\boldsymbol{\nu}, a\rangle$ является собственным для генераторов подалгебры Картана Γ_l с собственными значениями $(\boldsymbol{\nu})_l$. Во-вторых, под группой отражений Вейля мы понимаем и дискретную группу преобразований указанных базисных состояний в пространстве неприводимого представления, а именно, преобразования базисного состояния индуцируют отражения веса $\boldsymbol{\nu}$, в то время как набор значений индекса базисного состояния a задает кратность вырождения веса и он не изменяется при действии отражения Вейля на базисное состояние.

[34] Образ отражения положительного корня относительно самого себя, как следует из определения операции отражения весов, — это противоположный этому корню, отрицательный корень. Поэтому во множество образов отражения корня всегда входит как сам корень, так и противоположный ему корень.

корни и одновременно все они ортогональны простым положительным корням алгебры Ли. Такое возможно только если $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ — пустое множество. Остается предположить, что нетривиальное множество $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ содержит простые положительные корни.

Но тогда из ортогональности двух множеств следует, что простые положительные корни в $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}')$ и простые положительные корни в $\mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}_S)$ по правилам построения диаграмм Дынкина для простых положительных корней не соединены линиями между простыми положительными корнями этих двух подсистем корней. Поэтому заключаем, что простые положительные корни двух рассматриваемых подсистем простых положительных корней образуют диаграмму Дынкина, как минимум, с двумя компонентами связности, по одной или более в каждой из подсистем, если каждую из подсистем не считать пустой. Это вступает в противоречие с критерием простой компактной алгебры Ли[35]. Значит, сделанное предположение о неполноте образов старшего корня при отражениях Вейля было неверно, и во множество образов старшего корня присоединенного представления при действии отражений Вейля входят все корневые векторы простой компактной алгебры Ли. Все эти образы имеют ту же кратность вырождения, что и старший вес присоединенного представления, т. е. кратность вырождения равна единице. Таким образом мы показали, что каждому корню алгебры Ли $\boldsymbol{\alpha}_k$ в присоединенном представлении отвечает единственное базисное состояние $|\boldsymbol{\alpha}_k\rangle$, которое является собственным для всех генераторов подалгебры Картана Γ_l с собственными значениями, равными компонентам $(\boldsymbol{\alpha}_k)_l$.

Итак, в присоединенном представлении ненулевые веса собственных состояний подалгебры Картана являются корнями алгебры Ли. Поэтому для простых компактных алгебр Ли задача построения всей системы корневых векторов алгебры Ли при заданной системе простых положительных корней этой алгебры наиболее эффективно решается при помощи вейлевских отражений в присоединенном представлении. Сначала, исходя из диаграммы Дынкина строится система простых положительных корней и сопряженных им отрицательных корней. Затем строятся последовательности из пар простых положительных корней так, как это следует из диаграммы Дынкина, и отрицательные корни, сопряженные к положительным корням последовательностей. После этого строятся образы всех найденных корней при действии отражений Вейля до тех пор, пока действие всех отражений не станет переводить множество найденых корней в себя, так что вся система корней становится замкнутой относительно группы Вейля. Способ отражений по своей наглядности и эффективности превосходит алгебраический метод поиска дочерних последовательностей корневых векторов, который описан в **задаче 24** на стр. 115. Пример такой процедуры применения группы Вейля приведен в **задаче 26**.

Задача 26. Постройте на плоскости все корневые векторы в алгебре особой группы G_2.
Примечание. Построив последовательности из двух простых положительных корней, используйте группу отражений Вейля, чтобы найти корневые векторы, которые существуют вне этих последовательностей, т. е. возникают в «дочерних» последовательностях.

■ После описания матриц присоединенного представления для простой компактной группы Ли уместно сделать отступление и сформулировать концепцию **разложения Фиттинга** в алгебре Ли произвольного вида. Дело в том, что в теории матриц доказано, что совместным базисом собственных векторов могут обладать не только попарно коммутирующие эрмитово самосопряженные матрицы, с которыми мы имели дело в случае простых компактных групп Ли, но и верхнетреугольные матрицы над полем комплексных чисел: такие матрицы образуют нильпотентную подалгебру относительно коммутатора, который задается с помощью матричного умножения. При этом базис собственных состояний генераторов нильпотентной подалгебры является и базисом пространства присоединенного представления. Таким образом нильпотентная подалгебра является полным аналогом подалгебры Картана с точки зрения базиса собственных состояний. Но собственные значения элементов максимальной нильпотентной подалгебры $\Gamma^{(0)}$, которые по прежнему называются весами, уже не являются вещественными, как для генераторов подалгебры Картана. Вместе с тем, схема построения корневых генераторов алгебры Ли и их коммутаторов, приведенная нами в случае компактной простой алгебры Ли, остается в силе и для алгебры Ли общего вида, так что генераторы алгебры Ли разбиваются на два класса: на максимальную нильпотентную подалгебру $\Gamma^{(0)}$ и на корневое дополнение Γ_a. В итоге, вместо базиса Картана–Вейля в алгебре Ли произвольного вида имеет место разложение Фиттинга,

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} \oplus \sum_{a\neq 0} \Gamma_a,$$

[35]Заметим, что для других представлений, отличных от присоединенного, ни старший вес представления, ни множество его образов при действии отражений Вейля, вообще говоря, не являются корневыми векторами алгебры. Поэтому вывод о том, что образы старшего веса покрывают все отличные от нулевого весовые векторы представления, как мы это показали для присоединенного представления, может быть неверен для произвольного неприводимого представления. Наиболее очевидный пример — представление группы поворотов со спином s: в одномерном пространстве весов, т. е. во множестве проекций спина на ось z, которую обозначают символом m_s, старший вес равен $m_s = s$, и действие группы Вейля, включающей в себя в данном случае только два элемента, тождественное преобразование веса и инверсию знака веса, дает сам вес $m_s = s$ и противоположный вес $m_s = -s$, а все промежуточные значения проекции спина на ось z не могут быть получены отражениями старшего веса, если $s \geqslant 1$. Дело в том, что промежуточных состояний нет при $s = 1/2$, а $s = 1$ — присоединенное представление. В дальнейшем изложении на примере группы SU(3) мы построим несколько неприводимых представлений, для которых задача об образах старшего веса также решается в явном виде.

причем каждому корню $\boldsymbol{a}$ соответствует, во-первых, единственный генератор и, во-вторых, противоположный корень $-\boldsymbol{a}$ со своим генератором. Поскольку в нильпотентной алгебре всегда есть абелева подалгебра, которая возникает на последнем шаге вложенных друг в друга подалгебр коммутаторов, как мы это описали на стр. 78 в разделе **2.2 Метрика Киллинга и критерий Картана** главы 2, **§2. Представление группы Ли и генераторы** для разрешимых алгебр Ли, то эта абелева подалгебра является прямым аналогом подалгебры Картана.

Тогда в присоединенном представлении, как было показано в этом разделе, на весовой диаграмме веса базисных состояний равны корням, причем базисные векторы с нулевыми корнями являются вырожденными, и кратность вырождения равна размерности подалгебры $\Gamma^{(0)}$.

В полной аналогии с обозначениями данного раздела перепишем в присоединенном представлении коммутаторы генераторов нильпотентной подалгебры как действие на состояния с весами, равными корням алгебры $\boldsymbol{\alpha}$, с учетом линейности коммутатора по своим аргументам в виде уравнений на собственные состояния:

$$[\Gamma^{(0)}_l, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha, \quad \text{или} \quad [\Gamma^{(0)}, \Gamma_\alpha] = \mathrm{ad}\,\Gamma^{(0)} \cdot \Gamma_\alpha = \alpha\big(\Gamma^{(0)}\big)\Gamma_\alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{(0)}|\boldsymbol{\alpha}\rangle = \alpha\big(\Gamma^{(0)}\big)|\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

где $\Gamma^{(0)}$ — это любая суперпозиция генераторов нильпотентной подалгебры. Для коммутаторов в нильпотентной подалгебре точно также

$$[\Gamma^{(0)}_l, \Gamma^{(0)}] = \lambda^{(0)}_l \Gamma^{(0)}, \quad \text{или} \quad [\Gamma^{(0)}_x, \Gamma^{(0)}] = \mathrm{ad}\,\Gamma^{(0)}_x \cdot \Gamma^{(0)} = \lambda^{(0)}(x)\Gamma^{(0)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{(0)}_x|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(x)|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\rangle,$$

где $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ могут быть вырождены. Например, для абелевой подалгебры в нильпотентной подалгебре всегда имеется корень $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = 0$, а кратность его вырождения равна размерности абелевой подалгебры. Верхний индекс у корней $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ введен для того, чтобы не путать эти векторы с фундаментальными векторами простой компактной алгебры Ли. Аргумент корня $\lambda^{(0)}(x)$ указывает на зависимость корня от индекса генератора из подалгебры нильпотентных генераторов $\Gamma^{(0)}_x \in \Gamma^{(0)}$.

Теперь мы можем завершить **доказательство критерия Картана**, начатое на стр. 78, а именно его достаточное условие: если метрика Киллинга вырождена, то алгебра Ли содержит абелев идеал, а значит, в группе есть инвариантная абелева подгруппа, и группа не является полупростой. Итак, нами было установлено, что в алгебре Ли с вырожденной метрикой Киллинга есть алгебра инвариантной подгруппы Ли с нулевой метрикой Киллинга в этом идеале. Рассмотрим более детально подалгебру этого идеала, а именно воспользуемся разложением Фиттинга и построим специальные элементы нильпотентной части этой подалгебры Ли (с индексом z) как результат вычисления коммутаторов пары корневых генераторов с противоположными корнями

$$\Gamma^{(0)}_z = [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] \subset \Gamma^{(0)},$$

для которых определены корни

$$\Gamma^{(0)}_z|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(z)|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\rangle.$$

Установим, каким образом $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ связаны с корнями $\boldsymbol{\alpha}$ из корневого дополнения. Многократными коммутаторами построим генераторы

$$\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)} \sim [\Gamma^{(0)}_z, \Gamma_\alpha] \quad \mapsto \quad \Gamma_{\lambda(z)+2\alpha(z)} \sim [\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)}, \Gamma_\alpha] \quad \mapsto \quad \ldots \quad \mapsto \quad \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)},$$

и генератор

$$\Gamma_Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)},$$

которому отвечают состояния в присоединенном представлении с весами, равными корням, указанным в сумме. Поскольку след генератора $\Gamma^{(0)}_z$ равен нулю, как и след всякого коммутатора, вычисление следа tr_Y по указанным нами состояниям в генераторе Γ_Y тоже дает нуль,

$$\mathrm{tr}_Y\Big(\Gamma^{(0)}_z\Big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \boldsymbol{\lambda}^{(0)} + k\boldsymbol{\alpha}|\Gamma^{(0)}_z|\boldsymbol{\lambda}^{(0)} + k\boldsymbol{\alpha}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(n_k\big(\lambda^{(0)}(z) + k\alpha(z)\big)\Big) = 0,$$

где n_k — это кратность вырождения корня $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} + k\boldsymbol{\alpha}$, так что записанное выражение учитывает и случай, когда кратность вырождения равна нулю, т. е. корню не отвечает какое-либо состояние в присоединенном представлении, а значит, и в алгебре Ли нет соответствующего генератора. Поэтому мы полагаем, что суммы оказываются конечными. В итоге,

$$\lambda^{(0)}(z) = -r_\lambda\, \alpha(z)$$

с рациональным коэффициентом

$$r_\lambda = \Big(\sum n_k k\Big)\Big(\sum n_k\Big)^{-1}.$$

Найдем теперь след квадрата генератора $\Gamma^{(0)}_z$, суммируя по всем корням $\lambda(z)$,

$$\mathrm{tr}\Big(\Gamma^{(0)}_z\Gamma^{(0)}_z\Big) = \sum_\lambda \langle \boldsymbol{\lambda}^{(0)}|\Gamma^{(0)}_z\Gamma^{(0)}_z|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\rangle = \sum_\lambda \Big(\lambda^{(0)}(z)\Big)^2 = \Big(\sum_\lambda r_\lambda^2\Big)\cdot\big(\alpha(z)\big)^2.$$

Если в алгебре есть хотя бы один корень из корневого дополнения, отличный от нуля, то

$$\operatorname{tr}\left(\Gamma_z^{(0)}\Gamma_z^{(0)}\right) \neq 0.$$

Во-первых, среди корней $\lambda(z)$ есть корень, равный нулю, который отвечает абелевой подалгебре в нильпотентной подалгебре. Во-вторых, серия с нулевого корня обрывается на первом шаге в обе стороны, поскольку кратные корни не существуют в алгебре (коммутатор генератора с собой равен нулю). Таким образом, по общей формуле для r_λ

$$r_{\lambda=0} = \frac{n_1 - n_{-1}}{n_0 + n_1 + n_{-1}}.$$

Но в алгебре есть и корень $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha}$, для которого допустимы лишь 2 шага в отрицательную сторону, что дает

$$r_\lambda = \frac{-n_0 - 2n_{-1}}{n_1 + n_0 + n_{-1}}.$$

По построению $n_{-1} = n_1$, и мы найдем, что

$$r_\lambda - r_{\lambda=0} = -\frac{n_0 + 2n_1}{n_0 + 2n_1} = -1.$$

Это означает, что оба эти рациональные множителя не могут обратиться в нуль совместно, а

$$\sum_\lambda r_\lambda^2 > 0.$$

Итак, если в идеале есть корневое дополнение, то элемент метрики Киллинга, отвечающий следу квадрата генератора $\Gamma_z^{(0)}$, отличен от нуля. Если теперь метрика Киллинга в идеале тождественно равна нулю, то это значит, что предположение о наличии в идеале корневого дополнения неверно, и весь идеал — это нильпотентная подалгебра, что и требовалось для того, чтобы в идеале существовала абелева подалгебра, задающая инвариантную абелеву подгруппу Ли. Поэтому алгебра с вырожденной метрикой Киллинга не является полупростой.

Подчеркнем, что компактные простые группы и их представления в физике описывают квантовые состояния, которые являются собственными для наблюдаемых физических величин, и сами эти физические величины задаются эрмитово самосопряженными генераторами подалгебры Картана, а групповые преобразования квантовых состояний происходят в результате действия на эти состояния операторов физических величин — эрмитово самосопряженных генераторов группы Ли. В физике состояния неприводимых представлений нашли применение, если это квантовые состояния физической системы, которые характеризуются собственными значениями наблюдаемых.

Вместе с тем, возможны ситуации, когда преобразования состояний неприводимого представления возникают в рамках действия некомпактных групп Ли. Пример — группа Лоренца, т.е. симметрия метрики Минковского относительно преобразований поворотов и гиперповоротов. В этой группе генераторы поворотов — это эрмитово самосопряженные операторы, заданные относительно компактных компонент групповых координат — углов поворота, и эти генераторы являются физическими наблюдаемыми — компонентами момента вращения. В отличие от поворотов генераторы лоренцевых бустов, т. е. генераторы гиперповоротов, заданных относительно неограниченных компонент групповых координат, не являются эрмитовыми, а групповые преобразования в пространстве представления не являются унитарными. Тем не менее в алгебре группы Лоренца удается с помощью обратимых комплексных преобразований перейти к эрмитовым генераторам, отвечающим другим групповым координатам, и построить конечномерные неприводимые представления — релятивистские поля, которые относительно гиперповоротов преобразуются неунитарно.

Что же касается случая, когда базис состояний представления связан не с подалгеброй Картана, а с максимальной нильпотентной подалгеброй общего вида, то его сложно отнести к ситуации, применимой в физике при описании симметрии преобразований физических величин и их квантовых состояний. Тем не менее, в квантовой теории кроме наблюдаемых величин и их состояний рассматриваются комплексные числа — матричные элементы произведений, построенных из операторов наблюдаемых, по некоторым начальному и конечному состояниям. Это так называемые корреляторы. Например, изучают двухточечные корреляторы координат или петлевые интегралы от полей, упорядоченные по направлению перемещения по петле. Эти матричные элементы сами по себе могут обладать свойствами симметрии относительно групп Ли с общими свойствами их алгебр Ли, т. е. среди характеристик таких корреляторов могут быть выделены такие, которые имеют вполне определенные трансформационные свойства относительно групповых преобразований. В таких случаях уже нет ограничений, связанных с необходимостью компактности и простоты группы преобразований, как в случае наблюдаемых величин и их квантовых состояний, а также нет необходимости ограничивать число генераторов конечным набором, так что становится актуальным рассмотрение бесконечномерных алгебр вне критерия полупростоты группы по Картану. ■

Итак, мы описали общую процедуру построения конечномерных неприводимых представлений простых компактных алгебр Ли, которую проиллюстрируем далее на примерах алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$.

§3. Представления $\mathfrak{su}(2)$

Спинор как фундаментальное представление, матрицы Паули, матрицы операторов момента вращения j, приближенная симметрия ядерных сил — изотопический спин и кварки, слабое взаимодействие и дублеты кварков и лептонов, тензор поворотов Эли Картана, разложение алгебры $\mathfrak{so}(4)$ в прямую сумму $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

При описании конкретных примеров мы следуем общим результатам о неприводимых представлениях главы 3, **§2. Неприводимые представления**, где на стр. 149 были определены фундаментальные представления. Каждому фундаментальному вектору (III.2.11) соответствует фундаментальное представление, в котором этот вектор является весовым вектором состояния старшего веса. Напомним, что количество фундаментальных векторов равно рангу группы. Ранг алгебры $\mathfrak{su}(2)$ равен единице (одна точка на диаграмме Дынкина — один простой положительный корень).

3.1 Фундаментальное представление

Единственный фундаментальный одномерный вектор λ_z алгебры $\mathfrak{su}(2)$ по определению

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \delta_{jm} \tag{III.2.11}$$

удовлетворяет равенству

$$2\,\frac{\lambda_z \cdot \alpha_z}{\alpha_z^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_z = \frac{1}{2}\,\alpha_z.$$

При $\alpha_z = 1$ находим[36]

$$\lambda_z = \tfrac{1}{2}.$$

В фундаментальном представлении, где вес состояния старшего веса (senior помечен индексом S) имеет координату $\mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$, допустимо только однократное понижение этого веса, которое дает состояние младшего веса (minor помечен индексом M)

$$\hat{\mathrm{w}}_m \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_j - 2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m \quad \mapsto \quad \hat{\mathrm{w}}_z\,\lambda_z = \lambda_z - \alpha_z = -\tfrac{1}{2} = \mu_M.$$

Состояние с таким весом — результат действия понижающего оператора Γ_- на старший вектор состояния фундаментального представления, $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\lambda_z\rangle$. В физических приложениях принято определять операторы

$$\hat{j}_- \equiv \sqrt{2}\,\Gamma_- \quad \text{и} \quad \hat{j}_z \equiv \Gamma_z, \tag{III.3.1}$$

где Γ_z — генератор одномерной подалгебры Картана в $\mathfrak{su}(2)$.

По определению фундаментального представления число шагов понижения веса равно единице[37], так что других состояний, кроме двух, что имеют веса $\mu \mapsto \mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$ и $\mu \mapsto \mu_M = \mu_S - \alpha_z = \lambda_z - \alpha_z = -\mu_S = -\frac{1}{2}$, в фундаментальном представлении нет. Итак, запишем действие оператора проекции момента вращения на ось z на оба базисных состояния фундаментального представления

$$\Gamma_z|\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_z|\boldsymbol{\mu}\rangle \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z|\pm\tfrac{1}{2}\rangle = \pm\tfrac{1}{2}\,|\pm\tfrac{1}{2}\rangle, \qquad |\pm\rangle \equiv |\pm\tfrac{1}{2}\rangle, \qquad \text{т.е. } \hat{j}_z|\pm\rangle = \pm\tfrac{1}{2}|\pm\rangle.$$

Напомним в учебных целях, что в рамках построенного нами математического аппарата и обозначений нормировки базисных состояний равны $\langle+\frac{1}{2}|+\frac{1}{2}\rangle = 1$, $\langle-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\rangle = 1$. Базисные состояния ортогональны $\langle+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\rangle = 0$, что является свойством собственных векторов состояния эрмитова оператора $\hat{j}_z$: собственные векторы эрмитова оператора с разными собственными значениями ортогональны.

В базисе, образованном собственными ортонормированными состояниями $|+\rangle$ и $|-\rangle$ двумерного пространства фундаментального представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$, все операторы линейных преобразований Γ могут быть представлены в виде матриц[38] $\hat{\Gamma}$ размера 2×2,

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\Gamma_{++} = \langle+|\Gamma|+\rangle, \quad \Gamma_{+-} = \langle+|\Gamma|-\rangle, \\ &\Gamma_{-+} = \langle-|\Gamma|+\rangle, \quad \Gamma_{--} = \langle-|\Gamma|-\rangle. \end{aligned}$$

[36] Выбор $\alpha_z = 1$ соответствует, например, тому, что генераторы преобразований — это компоненты оператора момента вращения $\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{J}}/\hbar$.

[37] Напомним, что неотрицательные целые коэффициенты разложения старшего веса неприводимого представления p_m по фундаментальным векторам $\boldsymbol{\lambda}_m$ — это максимальное число шагов понижения веса генератором $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$. В фундаментальном представлении только один такой коэффициент равен единице, $p_m = \delta_{mk}$, и старший вес $\boldsymbol{\lambda}_k$ можно понизить только один раз до веса $\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\alpha}_k$.

[38] Мы следуем схеме со стандартной матричной нумерацией элементов: первый индекс — номер строки, второй — столбца. Но вместо числовых индексов 1 и 2 мы используем символы + и −.

Согласно общей формуле для квадратичного оператора Казимира (III.2.4), который мы обозначим с использованием определения (III.3.1) в группе SU(2) как $C_2 = \Gamma_a\Gamma_a \equiv \widehat{\boldsymbol{j}^2}$, запишем действие $\widehat{\boldsymbol{j}^2}$ на состояние старшего веса фундаментального представления, что даст значение этого инварианта для всех векторов состояния рассматриваемого неприводимого представления,

$$\widehat{\boldsymbol{j}^2}|+\rangle = \{\hat{j}_z^2 + \tfrac{1}{2}(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+)\}|+\rangle. \tag{III.3.2}$$

Согласно важному общему соотношению (III.2.22)

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\nu}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\boldsymbol{\nu}\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\nu})}|\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\alpha}_m\rangle, \qquad 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)} = p_m \in \{0,\mathbb{N}\} \tag{III.2.22}$$

при подстановках

$$|\boldsymbol{\nu}\rangle \mapsto |+\tfrac{1}{2}\rangle, \quad \boldsymbol{\nu} \mapsto \lambda_z = \tfrac{1}{2}, \quad \boldsymbol{\alpha}_m \mapsto \alpha_z = 1, \quad \boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\alpha}_m \mapsto -\lambda_z = -\tfrac{1}{2}, \quad \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m} \mapsto \Gamma_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{j}_-$$

находим результат действия понижающего генератора на состояние старшего веса и норму состояния $\Gamma_-|+\frac{1}{2}\rangle$:

$$\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad \Big(\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle\Big)^\dagger\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(|-\tfrac{1}{2}\rangle\Big)^\dagger|-\tfrac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle+\tfrac{1}{2}|\Gamma_+\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{2}, \tag{III.3.3}$$

или

$$\hat{j}_-|+\rangle = |-\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle+|\hat{j}_+\hat{j}_-|+\rangle = 1. \tag{III.3.4}$$

Поскольку действие понижающим генератором на состояние с самым младшим значением веса дает нуль,

$$\Gamma_-|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0,$$

то матричные элементы понижающего оператора равны

$$(\Gamma_-)_{-+} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\Gamma_-)_{+-} = (\Gamma_-)_{--} = (\Gamma_-)_{++} = 0.$$

Его матричная запись в базисе состояний $|\pm\rangle$ имеет вид

$$\hat{\Gamma}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.3.5}$$

Повышающий оператор Γ_+ эрмитово сопряжен Γ_-, так что

$$\hat{\Gamma}_+ = \hat{\Gamma}_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.3.6}$$

откуда сразу получаем, что действие повышающего генератора на состояние младшего веса равно

$$\begin{aligned}\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \mathbb{1}\cdot\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \Big(|+\tfrac{1}{2}\rangle\langle+\tfrac{1}{2}| + |-\tfrac{1}{2}\rangle\langle-\tfrac{1}{2}|\Big)\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \\ = |+\tfrac{1}{2}\rangle\,(\Gamma_+)_{+-} + |-\tfrac{1}{2}\rangle(\Gamma_+)_{--} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\tfrac{1}{2}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{j}_+|-\rangle = |+\rangle.\end{aligned} \tag{III.3.7}$$

Полезно вывести этот результат чисто алгебраически. Численный коэффициент $(\Gamma_+)_{+-}$, который получается при действии повышающего генератора на состояние с младшим весом,

$$\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = (\Gamma_+)_{+-}|+\tfrac{1}{2}\rangle,$$

легко найти, используя (III.3.3)

$$\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \Gamma_+\Big(\sqrt{2}\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle\Big).$$

Так как в базисе Картана–Вейля для группы SU(2)

$$[\Gamma_+,\Gamma_-] = \alpha_z\Gamma_z, \quad \alpha_z = 1, \qquad \Rightarrow \quad \Gamma_+\Gamma_- = \Gamma_-\Gamma_+ + \Gamma_z,$$

то находим, что

$$\Gamma_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \Gamma_+\Big(\sqrt{2}\Gamma_-|+\tfrac{1}{2}\rangle\Big) = \sqrt{2}\Big(\Gamma_-\Gamma_+ + \Gamma_z\Big)|+\tfrac{1}{2}\rangle = \\ = \sqrt{2}\Big(\Gamma_-\Gamma_+|+\tfrac{1}{2}\rangle + \Gamma_z|+\tfrac{1}{2}\rangle\Big) = \sqrt{2}\Gamma_-\mathbf{0} + \sqrt{2}\,\tfrac{1}{2}|+\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\tfrac{1}{2}\rangle,$$

где мы учли, что повышение состояния старшего веса неприводимого представления дает нулевой вектор пространства состояний $\Gamma_+|+\frac{1}{2}\rangle = \mathbf{0}$.

С учетом определения старшего вектора состояния $\hat{j}_+|+\rangle = \mathbf{0}$ и согласно (III.3.2) вычисляем квадратичный оператор Казимира для фундаментального спинорного представления частицы со спином $j = 1/2$,

$$\widehat{\boldsymbol{j}^2}|+\rangle = \tfrac{3}{4}\,|+\rangle, \qquad j(j+1) = \tfrac{3}{4}.$$

Закончим пункт замечанием, которое значимо для правильного понимания традиционных физических обозначений: собственное значение квадратичного оператора Казимира мы обозначаем как $j(j+1) = 3/4$ с очевидным решением $j = 1/2$. Таким образом в физике частиц, говоря, что у частицы спин равен $1/2$, подразумевают, что спином частицы в физике называется индекс j собственного значения инварианта Казимира $j(j+1)$ пространства состояний частицы, равного $3/4$.

3.2 Матрицы Паули

В фундаментальном представлении алгебры $\mathfrak{su}(2)$ генераторы — это матрицы размера 2×2. Так как генератор Γ_z — это диагональный оператор из подалгебры Картана в базисе его собственных ортонормированных состояний $|\pm\rangle$, то

$$\langle +|\Gamma_z|+\rangle = \tfrac{1}{2}, \qquad \langle -|\Gamma_z|-\rangle = -\tfrac{1}{2}, \tag{III.3.8}$$

Согласно (III.3.3) и (III.3.7) ненулевые матричные элементы равны

$$\langle +|\Gamma_+|-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \langle -|\Gamma_-|+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}. \tag{III.3.9}$$

При действии на базисные векторы представления любая матрица может быть представлена через матричные элементы $\Gamma_{mn} = \langle m|\Gamma|n\rangle$ как

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\Gamma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.3.10}$$

Введенная нами при рассмотрении фундаментального представления стандартная связь одного из двух корневых генераторов алгебры, понижающего, т. е. соответствующего отрицательному корню, Γ_- и компоненты момента $\hat{j}_-$ согласно (III.3.1) задает и связь корневых генераторов $\hat{j}_\pm = \sqrt{2}\Gamma_\pm$, а это приводит к явному виду матриц

$$\hat{j}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{j}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.3.11}$$

Генераторы

$$\hat{j}_z = \Gamma_z, \qquad \hat{j}_x = \tfrac{1}{2}(\hat{j}_+ + \hat{j}_-), \qquad \hat{j}_y = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}(\hat{j}_+ - \hat{j}_-),$$

задают $\widehat{\boldsymbol{j}^2} = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$ и определяют матрицы Паули $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$,

$$\tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \hat{\boldsymbol{j}}, \tag{III.3.12}$$

откуда

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.3.13}$$

Заметим здесь, что операторы или генераторы мы снабжаем шляпками, как и матрицы, которые являются реализацией операторов в любом конечномерном представлении после фиксации ортонормированного базиса пространства представления. Если под шляпкой написан жирный символ, то это указывает на его векторный характер, который может быть заменен индексом компоненты. Свойства матриц Паули подробно изучаются в квантовой механике. Отметим лишь, что

$$\mathrm{tr}\,(\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b) = 2\delta_{ab}, \qquad \mathrm{tr}\,(\hat{j}_a\hat{j}_b) = \tfrac{1}{2}\,\delta_{ab}, \qquad a,b \in \{x,y,z\}. \tag{III.3.14}$$

3.3 Представление с моментом вращения j

Старший вектор состояния $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\sum p_m \boldsymbol{\lambda}_m\rangle$ часто принято обозначать в математической литературе символом $|j\rangle$, так как в случае одномерного пространства фундаментальных векторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$

$$p_1\boldsymbol{\lambda}_1 \mapsto p_1\lambda_z = \mu_S, \qquad \text{т. е. } \mu_S = \frac{p_1}{2} = j,$$

согласно общей схеме построения неприводимого представления (III.2.14)–(III.2.17) с записью старшего веса в виде разложения по фундаментальным векторам с неотрицательными целыми коэффициентами. Подчеркнем, что *все базисные состояния неприводимого представления мы полагаем нормированными на единицу*. При этом напомним, что базисные состояния с разными собственными значениями операторов из полного набора наблюдаемых величин являются еще и ортогональными друг другу.

Минимальное значение проекции момента на ось z – младший вес – получается отражением старшего веса относительно единственного корня алгебры $\mathfrak{su}(2)$,

$$\hat{\mathrm{w}}_j(p_j\boldsymbol{\lambda}_j) = p_j\boldsymbol{\lambda}_j - p_j\cdot 2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}\,\boldsymbol{\alpha}_j \quad \mapsto \quad \hat{\mathrm{w}}_z\,(p_1\lambda_z) = p_1(\lambda_z-\alpha_z) = 2j(\tfrac12-1) = -j,$$

т. е.

$$\hat{\mathrm{w}}_z j = -j.$$

Значение $\alpha_z = 1$ задает длину шага в изменении веса состояния при действии понижающего оператора. Число базисных состояний равно числу шагов $p_1 = 2j$ от старшего веса к младшему плюс одно исходное состояние со старшим весом, т. е. всего имеется $2j+1$ состояний с проекциями момента на ось z, значение которой равно m:

$$m \in \{j, j-1, \ldots, -j+1, -j\}.$$

Инвариант представления – квадрат момента импульса $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ – легко вычислить, действуя на состояние старшего веса, если учесть, что согласно (III.2.22) выражение

$$\langle\mu_S|\Gamma_+\Gamma_-|\mu_S\rangle = \langle\mu_S|(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_z)|\mu_S\rangle = \langle\mu_S|\mu_S\cdot\alpha_z|\mu_S\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle j|\Gamma_+\Gamma_-|j\rangle = j$$

можно переписать для операторов $\hat{j}_\pm = \sqrt{2}\Gamma_\pm$

$$\langle\mu_S|j_+j_-|\mu_S\rangle = \langle\mu_S|2\,(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_z)|\mu_S\rangle = \langle\mu_S|2\,\mu_S\cdot\alpha_z|\mu_S\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\, j|\hat{j}_+\hat{j}_-|j\rangle = 2j.$$

Из выражения

$$\widehat{\boldsymbol{j}^2} = \hat{j}_z^2 + \tfrac12(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+)$$

находим известный стандартный результат

$$\langle j|\widehat{\boldsymbol{j}^2}|j\rangle = \langle j|\Big(\hat{j}_z^2 + \tfrac12(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+)\Big)|j\rangle = \langle j|\hat{j}_z^2|j\rangle + \tfrac12\langle j|\hat{j}_+\hat{j}_-|j\rangle + \tfrac12\langle j|\hat{j}_-\hat{j}_+|j\rangle =$$
$$= \langle j|j^2|j\rangle + \tfrac12\,2j + \tfrac12\langle j|\hat{j}_-\big(\hat{j}_+|j\rangle\big) = j^2 + j + 0 = j(j+1).$$

В общем формализме квадратичный оператор Казимира (III.1.8)

$$\widehat{\boldsymbol{j}^2} = \hat{j}_z^2 + \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z \tag{III.3.15}$$

при действии на старший вектор состояния воспроизводит этот результат, поскольку

$$\hat{j}_+|j\rangle = 0, \quad \text{а} \;\; \hat{j}_z|j\rangle = j|j\rangle.$$

Рекуррентное соотношение (III.2.8) для нормировочного коэффициента (III.2.7) позволяет определить нормированное на единицу базисное состояние $|j-m\rangle$ с собственным значением согласно уравнению на собственные состояния $\hat{j}_z|j-m\rangle = (j-m)|j-m\rangle$ как

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_m}}\,\Gamma_-^m|j\rangle = |j-m\rangle = \frac{\hat{j}_-^m}{\sqrt{2^m\mathcal{K}_m}}\,|j\rangle,$$

где

$$\mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{K}_m\left\{(m+1)\,(\boldsymbol{\alpha}_z,\boldsymbol{\mu}_S) - \frac12\,m\,(m+1)\,(\boldsymbol{\alpha}_z,\boldsymbol{\alpha}_z)\right\} = \mathcal{K}_m(m+1)\left(\frac12\,p_1 - \frac12\,m\right).$$

Значит, действие понижающего оператора на базисное состояние, имеющее единичную норму, дает

$$\hat{j}_-|j-m\rangle = \sqrt{2}\Gamma_-|j-m\rangle = \sqrt{2}\Gamma_- \frac{\Gamma_-^m}{\sqrt{\mathcal{K}_m}}|j\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{K}_m}}\cdot\Gamma_-^{m+1}|j\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{K}_m}}\cdot\sqrt{\mathcal{K}_{m+1}}|j-m-1\rangle.$$

С учетом того, что $p_1 = 2j$, значение ненулевого матричного элемента понижающего оператора

$$\langle j-m-1|\left(\hat{j}_-|j-m\rangle\right) = \sqrt{\frac{2\mathcal{K}_{m+1}}{\mathcal{K}_m}} = \sqrt{(m+1)(2j-m)}.$$

Введение стандартных квантовомеханических обозначений для базисных состояний момента импульса j с его проекцией на ось z, равной m_j, согласно

$$|j-m\rangle \mapsto |j,m_j\rangle, \quad \text{где } \ m_j = j-m,$$

приводит к общеизвестному результату

$$\langle j,m_j-1|\left(\hat{j}_-|j,m_j\rangle\right) = \sqrt{(j-m_j+1)(j+m_j)} = \sqrt{j(j+1)-m_j(m_j-1)}. \tag{III.3.16}$$

Эту формулу записывают в матричной форме: квадратная матрица j_- размером $(2j+1)\times(2j+1)$ имеет два индекса $(\hat{j}_-)_{mm'}$, и в данном выражении $m = m_j - 1$, а $m' = m_j$, т. е. отличные от нуля элементы матрицы —

$$(\hat{j}_-)_{(m_j-1)m_j} = \sqrt{(j-m_j+1)(j+m_j)} = \sqrt{j(j+1)-m_j(m_j-1)}.$$

Эрмитово сопряжение матрицы — это композиция комплексного сопряжения матричных элементов и транспонирования, т. е. смены порядка следования матричных индексов,

$$(\hat{j}_-^\dagger)_{m'm} = \{(\hat{j}_-)_{mm'}\}^*.$$

Так как $\hat{j}_-^\dagger = \hat{j}_+$, мы устанавливаем, что эрмитово сопряжение дает отличные от нуля матричные элементы повышающего оператора

$$(\hat{j}_+)_{m_j,(m_j-1)} = \langle j,m_j|\left(j_+|j,m_j-1\rangle\right) = \sqrt{(j-m_j+1)(j+m_j)} = \sqrt{j(j+1)-m_j(m_j-1)},$$

или после элементарного сдвига отсчета индексов на единицу, $m_j \mapsto m_j + 1$,

$$\langle j,m_j+1|\left(\hat{j}_+|j,m_j\rangle\right) = \sqrt{(j-m_j)(j+m_j+1)} = \sqrt{j(j+1)-m_j(m_j+1)}. \tag{III.3.17}$$

Для читателя, знакомого с квантовой механикой, заметим, что в силе остаются известные выражения для коэффициентов Клебша–Гордана и теорема Вигнера–Эккарта для неприводимых тензорных операторов.

Применение общих формул (III.3.16) и (III.3.17) в частном случае, когда $j = \frac{1}{2}$, позволяет воспроизвести генераторы групповых преобразований $\hat{j}_\pm$, которые приведены в (III.3.11) и получены нами чуть выше другим способом при описании фундаментального представления $\mathfrak{su}(2)$. Диагональный вид матрицы $\hat{j}_z$ также легко устанавливается, так как он является следствием выбора базиса собственных состояний этой матрицы в пространстве представления. В итоге,

$$\hat{\boldsymbol{j}} = \frac{1}{2}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

где $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — матрицы Паули.

Подчеркнем, что и для неприводимого представления с моментом j, указанные формулы позволяют однозначно найти генераторы поворотов в виде матриц размером $(2j+1)\times(2j+1)$. Эти матрицы называют стандартным представлением генераторов поворота момента j. Таким образом стандартное представление определяется в ортонормированном базисе квантовых состояний $|j,m_j\rangle$.

Наряду со стандартным представлением в виде матриц размером $(2j+1)\times(2j+1)$, которые определяют линейные преобразования в пространстве состояний размерности $2j+1$, широко известно тензорное представление генераторов группы поворотов в случае, когда j — это целое положительное число, а значит, представление SO(3) совпадает с представлением SU(2). Тогда можно показать, что в декартовых координатах трехмерного пространства симметричный бесследовый по любой паре индексов тензор ранга j также описывает неприводимое представление момента j (см. главу 1 и [1]).

Задача 27. Найдите стандартное представление для генераторов поворотов в случае $j = 1$, т. е. матрицы генераторов в базисе состояний $|j,m\rangle$.

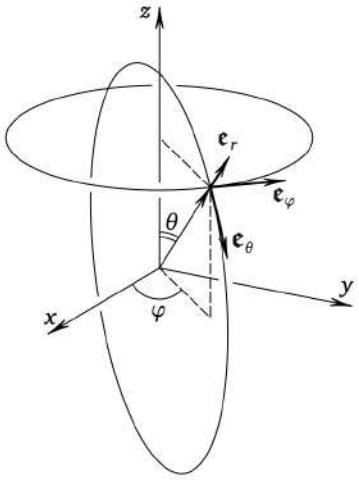


Рис. 3.6: Базис в сферических координатах.

• Орбитальный момент вращения

В качестве примера построения пространства функций как элементов неприводимых представлений укажем на группу поворотов SO(3), в которой реализуются представления SU(2) с положительными целочисленными значениями момента вращения. Генераторы группы — компоненты $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}/\hbar$, где орбитальный момент вращения определяется как векторное произведение радиус-вектора на вектор количества движения[39]: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, причем на функциях состояния в координатном представлении $\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}$.

Для построения собственных функций орбитального момента в координатном представлении используют сферическую систему координат, так что вектор в декартовых координатах

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z,$$

где базисные векторы имеют вид

$$\mathbf{e}_x = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_y = (0,1,0), \quad \mathbf{e}_z = (0,0,1),$$

выражают через базис в сферических координатах (см. рис. 3.6)

$$\boldsymbol{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi,$$

где уже

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta),\\ \mathbf{e}_\theta &= (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta),\\ \mathbf{e}_\phi &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0).\end{aligned}$$

При этом квадрат элемента длины

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 \equiv \mathrm{d}\ell_r^2 + \mathrm{d}\ell_\theta^2 + \mathrm{d}\ell_\phi^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

состоит из суммы квадратов дифференциалов длины $\mathrm{d}\ell_k$ вдоль компонент ортонормированного репера

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_r,\, \mathbf{e}_\theta,\, \mathbf{e}_\phi),$$

где индекс k принимает значения r, θ, ϕ. Тогда вектор набла имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_k\frac{\partial}{\partial\ell_k} = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

с суммированием по немому индексу k, а радиус–вектор —

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{e}_r r.$$

[39]В современной научной литературе количество движения часто называют импульсом — калькой с англоязычного термина, хотя в традиционной русской научной терминологии под импульсом понимается изменение количества движения, вызванное действием силы: см. сноску 3 на стр.133 .

Выразим компоненты орбитального момента в сферических координатах. Например,

$$\hat{l}_z = \mathfrak{e}_z \cdot \boldsymbol{l} = -\mathrm{i}\mathfrak{e}_z \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla}), \tag{III.3.18}$$

где векторное произведение запишем в сферических координатах

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} = r\,\mathfrak{e}_r \times \boldsymbol{\nabla} = r\left\{\mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}. \tag{III.3.19}$$

Учтем, что в правой ортонормированной тройке базисных векторов $\{\mathfrak{e}_r, \mathfrak{e}_\theta, \mathfrak{e}_\phi\}$ векторные произведения в (III.3.19) равны

$$\mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_r = 0, \quad \mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_\theta = \mathfrak{e}_\phi, \quad \mathfrak{e}_r \times \mathfrak{e}_\phi = -\mathfrak{e}_\theta.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} = \mathfrak{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathfrak{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{III.3.20}$$

Отсюда для z–й компоненты $\hat{l}_z = \mathfrak{e}_z \cdot \hat{\boldsymbol{l}}$ после подстановки скалярных произведений

$$\mathfrak{e}_z \cdot \mathfrak{e}_\phi = 0, \qquad \mathfrak{e}_z \cdot \mathfrak{e}_\theta = -\sin\theta$$

находим

$$\hat{l}_z = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{III.3.21}$$

Этого следовало ожидать, так как проекция орбитального момента на ось z как раз отвечает поворотам со сдвигом угла ϕ.

Задача 28. Покажите, что оператор $\hat{l}_z$ эрмитов на функциях, периодических по ϕ с периодом 2π.

Для оставшихся компонент орбитального момента $\hat{\boldsymbol{l}}$ прямые вычисления скалярных произведений

$$\mathfrak{e}_x \cdot \mathfrak{e}_\phi = -\sin\phi, \qquad \mathfrak{e}_x \cdot \mathfrak{e}_\theta = \cos\phi\cos\theta$$

и

$$\mathfrak{e}_y \cdot \mathfrak{e}_\phi = \cos\phi, \qquad \mathfrak{e}_y \cdot \mathfrak{e}_\theta = \sin\phi\cos\theta$$

после несложных выкладок, которые мы здесь опускаем, дают

$$\begin{aligned} \hat{l}_x &= +\mathrm{i}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cos\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\phi}, \\ \hat{l}_y &= -\mathrm{i}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\sin\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\phi}, \end{aligned} \tag{III.3.22}$$

откуда

$$\hat{l}_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\Big(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big). \tag{III.3.23}$$

Как видим, компоненты орбитального момента зависят только от углов.

Задача 29. Самостоятельно вычислите «в уме»

$$\hat{l}_x^2 = -\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cos^2\phi\,\mathrm{ctg}^2\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos^2\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi},$$

$$\hat{l}_y^2 = -\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \sin^2\phi\,\mathrm{ctg}^2\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \sin^2\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}.$$

Для справок приведем также вид оператора квадрата орбитального момента в угловых переменных

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{III.3.24}$$

который связан с угловой частью лапласиана $\triangle_{\theta,\phi} = -\hat{\boldsymbol{l}}^2$ (см. **§ 2. Формулы тензорного анализа** Приложения, раздел **2.4 Градиент, дивергенция, ротор**), так что

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\triangle_{\theta,\phi} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}. \tag{III.3.25}$$

Собственные функции

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{l}}^2\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) &= l(l+1)\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi),\\ \hat{l}_z\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) &= m\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi),\end{aligned} \tag{III.3.26}$$

нормированные при интегрировании по сфере на единицу

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \mathcal{Y}^*_{l,m}(\theta,\phi)\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \mathcal{Y}^*_{l,m}(\theta,\phi)\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) = 1,$$

называются сферическими гармониками. В угловых переменных уравнение на собственные значения для проекции момента на ось z

$$\hat{l}_z\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) = m\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi)$$

легко интегрируется, так что

$$\mathcal{Y}_{l,m}(\theta,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}Y_{l,m}(\theta).$$

Функции $Y_{l,m}(\theta)$ проще всего найти, используя повышающий оператор, который зануляет старший вектор состояния:

$$\hat{l}_+\mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = 0.$$

Используя в явном виде оператор $\hat{l}_+$ из (III.3.23), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{l,l}(\theta) - l\operatorname{ctg}\theta Y_{l,l}(\theta) = 0,$$

с решением $Y_{l,l}(\theta) \sim (\sin\theta)^l$. Для «старшей» сферической гармоники находим

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = C_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}(\sin\theta)^l, \tag{III.3.27}$$

где нормировочную константу C_l определим, взяв интеграл

$$I_l = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,(\sin\theta)^{2l}.$$

■

Для вычисления интеграла

$$I_l = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}(\sin\theta)^{2l}\,\mathrm{d}\cos\theta = 2\pi\int\limits_0^{\pi}(\sin\theta)^{2l+1}\,\mathrm{d}\theta,$$

в котором при записи равенства мы учли изменение порядка пределов интегрирования, проведем интегрирование по частям:

$$I_l = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}(\sin\theta)^{2l}\,\mathrm{d}\cos\theta = 2\pi\,(\sin\theta)^{2l}\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} - 2\pi\int\cos\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)^{2l} =$$

$$= -2\pi\,2l\int\limits_{\pi}^{0}\cos\theta\,(\sin\theta)^{2l-1}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -2\pi\,2l\int\limits_{\pi}^{0}(\sin\theta)^{2l-1}(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2l[I_{l-1} - I_l],$$

Получаем рекуррентное соотношение

$$I_l = \frac{2l}{2l+1}\,I_{l-1} = \frac{2l}{2l+1}\,\frac{2l}{2l}\,I_{l-1} = \frac{2^2l^2}{(2l)(2l+1)}\,I_{l-1}, \quad l\in\mathbb{N}$$

с началом последовательности

$$I_0 = 4\pi.$$

Следовательно,

$$I_l = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}4\pi.$$

■

В итоге нормированная на единицу сферическая функция для старшего вектора состояния (состояние старшего веса) —

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} (\sin\theta)^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}, \tag{III.3.28}$$

где множитель $(-1)^l$ введен по традиции. Сферические гармоники с меньшими значениями проекции момента получаются действием понижающего оператора. В этой книге нам важно в первую очередь состояние старшего веса как объекта, генерирующего пространство представления. За деталями описания состояний орбитального момента отсылаем читателя к учебникам по квантовой механике, например, к книге [10].

• Модуль Верма

Обратим внимание на то, что решение уравнения $\hat{l}_+ \mathcal{Y}_{l,l}(\theta,\phi) = 0$ для состояния старшего веса в виде функции (III.3.27) справедливо и для любого положительного вещественного значения $l \mapsto \lambda \in \mathbb{R}_+$, а не только натурального! В этом случае функции $\mathcal{Y}_{\lambda,\lambda}(\theta,\phi)$ определены при $\theta \in (0,\pi)$ и $\phi \in (-\infty,+\infty)$, так как периодичности по переменной ϕ уже нет, а пространство координат становится некомпактным. При изменении $\phi \to \phi + 2\pi$ функция $\mathcal{Y}_{\lambda,\lambda}(\theta,\phi)$ приобретает множитель с фазой $2\pi\lambda$.

На непериодических функциях операторы компонент $\boldsymbol{l}$ не являются эрмитовыми, операторы $\hat{l}_+$ и $\hat{l}_-$ при эрмитовом сопряжении не переходят друг в друга, а многократное действие понижающего оператора $\hat{l}_-$ на состояние старшего веса $\mathcal{Y}_{\lambda,\lambda}(\theta,\phi)$ не обрывается ни на каком шаге! В таком случае говорят, что имеет место представление, которое носит название модуль Верма. Как видим, некомпактность групповых координат существенно сказывается на пространстве представления и свойствах генераторов в этом пространстве.

Задача 30. Используя явный вид понижающего оператора $\hat{l}_-$ в (III.3.23), постройте состояния $\hat{l}_- \mathcal{Y}_{\lambda,\lambda}(\theta,\phi)$ и $\hat{l}_-\big(\hat{l}_- \mathcal{Y}_{\lambda,\lambda}(\theta,\phi)\big)$. Какими свойствами обладают эти состояния при $\lambda = 1/3$?

3.4 Изотопическая инвариантность (спектроскопия)

Мы исходим из того, что ядра атомов состоят из связанных ядерными силами нуклонов: положительно заряженных протонов и нейтральных нейтронов, массы которых весьма близки друг к другу. Набор масс ядер называют спектром масс, а системное изучение этого набора — спектроскопией. В ведущем приближении при описании спектра масс ядер, составленных из нуклонов, отличием масс протона и нейтрона можно пренебречь, что дает возможность ввести симметрию в спектроскопии ядер, обусловленную инвариантностью массы в ядрах, которые содержат одно и то же количество нуклонов, но могут иметь разный заряд в зависимости от числа протонов в ядре. Говорят, что базис квантовых состояний ядер с одной и той же массой — это мультиплет состояний, в котором одно базисное состояние отличается от другого только за счет преобразования состояния составляющих ядро нуклонов: одно базисное состояние нуклона может быть преобразовано в другое. С математической точки зрения речь идет о том, что мультиплет — это базис в пространстве состояний неприводимого представления группы симметрии, а масса составных ядер мультиплета является инвариантом этой группы, т. е. зависит только от операторов Казимира в группе. Рассмотрим эти вопросы более детально.

Гипотезу о существовании нейтрона высказал Дм.Дм.Иваненко и независимо от него — В.Гейзенберг. При этом Гейзенберг сделал еще один важный шаг: ввел понятие зарядовой симметрии ядерных сил или, выражаясь современным языком, изотопической инвариантности сильных взаимодействий. Гейзенберг предположил, что, если пренебречь различием электромагнитного взаимодействия протонов и нейтронов, а также малой разностью их масс $m_n - m_p \approx 2$ МэВ при $m_n \approx 940$ МэВ, то протоны и нейтроны в отношении действия ядерных сил становятся неразличимыми, т. е. эквивалентными, и поэтому имеет смысл говорить о нуклоне как о квантовом состоянии, представляющем собой суперпозицию двух базисных состояний, состояний протона и нейтрона. Это состояние нуклона называют изоспинором или дублетом,

$$|\text{nucleon}\rangle = C_p|\text{proton}\rangle + C_n|\text{neutron}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Физический смысл коэффициентов C_p и C_n — это амплитуды вероятности того, что нуклон находится в состоянии протона или нейтрона, соответственно,

$$w_p = |C_p|^2, \quad w_n = |C_n|^2, \quad w_p + w_n = 1.$$

Суперпозиция двух базисных состояний является двумерным пространством представления, на котором определены преобразования, переводящие одну суперпозицию в другую и образующие группу. В этой группе допускаются преобразования, сохраняющие нормировку изоспинора. Преобразования, сохраняющие нормировку двухкомпонентного спинора, — это группа унитарных матричных преобразований двухкомпонентных столбцов,

$$N^u = \begin{pmatrix} C_p^u \\ C_n^u \end{pmatrix} = \hat{U} \cdot \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix} = \hat{U} \cdot N, \qquad \hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{1}.$$

Из унитарности сразу следует, что $|\det \hat{U}| = 1$. Если исключить из рассмотрения ненаблюдаемую общую комплексную фазу такого изоспинора, то можно считать, что детерминант матриц преобразования равен единице, $\det \hat{U} = 1$. Мы приходим к группе SU(2).

Введение изодублета нуклона, который является фундаментальным представлением группы SU(2), позволяет с помощью тензорного произведения строить состояние старшего веса любого неприводимого представления группы изотопической симметрии из состояний старшего веса фундаментального представления, а значит и все базисные состояния неприводимого представления выражать в виде тензорных произведений состояний фундаментального представления. В этом суть составной модели атомных ядер: все ядра — это состояния неприводимых представлений, причем каждое представление характеризуется массой и задается числом нуклонов с точностью до энергии связи. При этом экспериментальное значение массы состояний мультиплета с высокой точность до 2 МэВ одно и то же для всех состояний неприводимого представления.

Составное ядро включает в себя B нуклонов, где B называют барионным числом. Однако электрический заряд Q такого ядра, выраженный в зарядах протона e, зависит от числа протонов Z, а именно, $Q = Z$. Можно записать формулу для заряда ядра с использованием разных значений проекции изоспина для протона и нейтрона,

$$Q = \tfrac{1}{2}\, B + T_3. \tag{III.3.29}$$

Для изодублета $B = 1$, и формула дает верный результат. Для составного ядра с барионным числом B вклад в проекцию изоспина от Z протонов равен $+Z/2$, а вклад от $B - Z$ нейтронов равен $-(B - Z)/2$, так что

$$Q = \tfrac{1}{2}\, B + T_3 = Q = \tfrac{1}{2}\, B + \tfrac{1}{2}\, Z - \tfrac{1}{2}\, (B - Z) = Z.$$

Весь спектр составных атомных ядер описывается в рамках неприводимых представлений, построенных по состоянию старшего веса как тензорные произведения состояний старшего веса нуклонного изодублета.

По мере развития эксперимента в физике сильновзаимодействующих частиц стали проявляться другие симметрии: в больших количествах были открыты мультиплеты не ядер, а новых сильновзаимодействующих частиц — адронов. Наряду с изодублетом нуклона наблюдаются другие барионы с барионным числом $B = 1$, а также их античастицы с $B = -1$ и новые адроны — мезоны с барионным числом $B = 0$. Поэтому мезоны могут превращаться за счет слабого и электромагнитного взаимодействий в частицы, которые не обладают сильным взаимодействием, в лептоны без изменения барионного числа. Среди изотопических мультиплетов был открыт квартет дельта-изобар: $(\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-})$, состояния которого не являются ядрами и не могут быть построены как тензорные произведения состояний нуклонов, и особенно это ясно из наличия в квартете отрицательно заряженного состояния. Мезоны обладают барионным числом $B = 0$, а значит, для их построения необходимо наряду с нуклонным дублетом с $B = 1$ вводить изодублет антинуклона с $B = -1$. В группе SU(2) это можно сделать, но тогда массы основных состояний таких мезонов в составной модели ядер ожидались бы в области значений двух масс нуклона, а дельта-изобара могла быть построена из тензорных произведений двух нуклоных дублетов и одного антинуклонного дублета с общей массой около трех масс нуклона. Однако экспериментальные значения основных состояний как мезонов порядка 600 МэВ, так и новых барионов типа дельта-изобары порядка 1240 МэВ экспериментально оказались настолько малы по сравнению с предсказаниями составной ядерной моделью, что сама эта модель была признана несостоятельной для описания спектра адронов не только ядер, а в целом. Эпоха открытий новых адронов привела к обобщению симметрии изотопической инвариантности: был введен фундаментальный изодублет кварков, что позволило построить теорию адронов, составленных из кварков. А именно, Гелл-Манн предположил, что барионы состоят из трех кварков, которые, следовательно, обладают барионным числом $B = 1/3$, а мезоны из кварков и антикварков.

В современной трактовке теории сильных взаимодействий в основе изотопической симметрии лежат следующие три факта.

- Короткодействие ядерных сил на расстояниях порядка размера ядра $r_0 \sim 10^{-13}$ см позволяет оценить характерный импульс из соотношения неопределенности координата–импульс как $p \sim \hbar/r_0$ и

масштаб энергий как $E \sim pc$, если движение связанных сильным взаимодействием частиц происходит со скоростью порядка максимально допустимой скорости распространения частиц и полей c. Это верно в случае кварков, масса которых m_q задает комптоновскую длину $\lambda = \hbar/(m_q c)$ много больше радиуса действия сильного взаимодействия. Поэтому покоящийся кварк, неопределенность положения которого характеризуется комптоновской длиной, не может находиться внутри области действия ядерных сил, и, следовательно, кварки в адронах должны двигаться релятивистски, что приводит к уменьшению неопределенности по координате до радиуса действия ядерных сил r_0. Это значит, что характерная энергия связи частиц за счет сильных взаимодействий

$$E_0 \sim \frac{\hbar c}{r_0} \sim 300 \text{ МэВ} \gg m_q c^2 \sim 5 \text{ МэВ}.$$

- Электромагнитное взаимодействие двух зарядов в адроне на расстояниях порядка r_0 дает оценку энергии

$$E_{\text{em}} \sim \frac{e^2}{r_0} = \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{hc}{r_0} \sim \alpha_{\text{em}} E_0 \sim 2 \text{ МэВ} \qquad \text{при } \alpha_{\text{em}} \approx \frac{1}{137},$$

что на два порядка меньше характерного масштаба энергий сильного взаимодействия.

- Массы кварков u и d, составляющих протон и нейтрон, $p = (uud)$, $n = (udd)$ с электрическими зарядами $Q_u = +2/3$ и $Q_d = -1/3$ в единицах измерения, где заряд электрона равен -1, имеют величину в несколько МэВ, что пренебрежимо мало по сравнению с масштабом энергии связи за счет сильных взаимодействий (около 300 МэВ), удерживающих кварки в нуклоне или в любом другом адроне, составленном из кварков и антикварков. Поскольку комптоновская длина кварка $\lambda_q = \hbar/(m_q c)$ существенно превосходит радиус действия сильного взаимодействия, энергия кваркового состояния в адроне существенно превышает энергию покоя кварка, т. е. кварковое состояние внутри связанного состояния возникает за счет излучения квантов сильного взаимодействия при релятивистском движении кварков, так что итоговое кварковое состояние имеет энергию связи порядка 300 МэВ.

Поэтому при изучении сильных взаимодействий в ведущем приближении можно пренебречь как электромагнитными взаимодействиями кварков, так и различиями в их динамике, вызванными массами этих кварков, потому что динамика кварков является ультрарелятивистской: энергия взаимодействия по порядку величины равна энергии движения и много больше массы покоя.

В подобном подходе базисные квантовые состояния изоспиноров характеризуются единственным квантовым числом — проекцией изоспина T_3, которая связана с электрическим зарядом компонент спинора соотношением

$$Q = \tfrac{1}{6} + T_3,$$

т. е. $T_3 = \frac{1}{2}$ отвечает u-кварку, а $T_3 = -\frac{1}{2}$ — d-кварку. Обычно эту связь заряда с изоспином записывают с использованием еще одного квантового числа — гиперзаряда Y: для u- и d-кварков его полагают равным

$$Y_u = Y_d = \tfrac{1}{3}$$

и связывают с барионным числом B: барионное число нуклона $B = 1$, так что кварки несут по трети от барионного числа нуклонов. Формула

$$Q = \tfrac{1}{2}\,Y + T_3 \tag{III.3.30}$$

справедлива и для антикварков, которые как античастицы кварков имеют противоположное барионное число и, следовательно, гиперзаряд $Y_{\bar{u}} = Y_{\bar{d}} = -1/3$, а также противоположные значения проекции изоспина $T_3 \mapsto -T_3$ по отношению к изоспину кварков.

Важно подчеркнуть, что каждое базисное состояние представления является собственным для величины гиперзаряда, барионного числа (барионное число есть гиперзаряд с возможным сдвигом начала отсчета, как это станет ясно при рассмотрении группы симметрии более высокого ранга, а именно, группы SU(3)) и проекции изоспина как операторов, а формула (III.3.30) отражает операторный характер этих понятий.

Итак, вместо изодублета нуклонов Гелл-Манн ввел фундаментальное представление группы изотопической симметрии SU(2) —изоспинор кварков

$$\Psi_Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{III.3.31}$$

где верхняя компонента (up) обозначена символом u, а нижняя (down) — символом d. Эти имена компонент называют ароматом, так что изотопическую группу SU(2) называют группой двух ароматов

кварков и обозначают как $\mathrm{SU_f}(2)$ с индексом f (flavour). В группе SU(2) можно ввести сопряженный спинор (см. **§4. Спин $s = 1/2$** главы 1)

$$\bar{\Psi}_Q = -\hat{\epsilon}\cdot\Psi_Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.3.32)}$$

В этом выражении комплексно сопряженные амплитуды обозначены символом с чертой так, чтобы подчеркнуть переход от частиц к античастицам: $\bar{d}$ является верхней компонентой сопряженного спинора и описывает собственное значение проекции изоспина, равную $+1/2$ вместо проекции $-1/2$ у компоненты d, и аналогично для компонент $\bar{u}$ и u. Кроме того, комплексное сопряжение меняет и знак электрического заряда, откуда следует, что и барионное число меняет знак при переходе к комплексно сопряженным компонентам дублета.

В терминах тензорного произведения состояний старшего веса фундаментального представления спинора $|\lambda_1\rangle = |u\rangle$ и фундаментального представления сопряженного спинора $|\bar{\lambda}_1\rangle = -|\bar{d}\rangle$ можно построить состояние неприводимого представления изоспина $T = 1$, а именно,

$$-(u\bar{d}) \equiv -|u\rangle\otimes|\bar{d}\rangle,$$

которое имеет нулевое барионное число. Найдем электрический заряд этого состояния

$$Q[-u\bar{d}] = \frac{1}{2}B[-u\bar{d}] + T_3[-u\bar{d}] = \frac{1}{2}\,0 + 1 = +1,$$

что отвечает положительно заряженному пиону $\pi^+ = -(u\bar{d})$. Чтобы найти другие состояния этого неприводимого представления, подействуем понижающим оператором T_- с учетом того, что для состояний дублета и сопряженного дублета

$$T_-|u\rangle = |d\rangle, \qquad T_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle.$$

Поэтому

$$T_-\pi^+ = -|d\rangle\otimes|\bar{d}\rangle + |u\rangle\otimes|\bar{u}\rangle \equiv (u\bar{u}) - (d\bar{d}).$$

У этого состояния нулевой заряд и нулевое значение проекции изоспина. Для ортонормированных состояний изоспина

$$T_-|T,M\rangle = \sqrt{T(T+1) - M(M-1)}\,|T,M-1\rangle$$

при $T = M = +1$ для π^+ найдем

$$T_-\,\pi^+ = \sqrt{2}\,\pi^0,$$

где

$$\pi^0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(u\bar{u} - d\bar{d}).$$

Аналогично,

$$T_-\pi^0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,2(d\bar{u}) = \sqrt{2}\,\pi^-.$$

Это построение показывает, что кварковая модель позволяет систематизировать состояния адронов в согласии с данными экспериментов. Открытие новых адронов, не укладывающихся в мультиплеты, построенные из так называемых «обычных» u- и d-кварков, в таком случае означает, что новизна обусловлена существованием в природе дополнительных к обычным, новых кварковых состояний. Действительно, обнаружение изодублета K^+- K^0-мезонов, которых назвали «странными», указывает на кварковый состав с новым странным s-кварком (strange): $K^+ = (u\bar{s})$, $K^0 = (d\bar{s})$, причем s-кварк является синглетом по группе $\mathrm{SU_f}(2)$, т. е. значение проекции изоспина этого кварка равна нулю.

Формула (III.3.30)

$$Q = \frac{1}{2}\,Y + T_3$$

верна и для нуклонов, которые составлены из кварков, так что и нуклоны являются собственными состояниями для операторов гиперзаряда и изоспина: у протона проекция изоспина[40] и гиперзаряд

$$T_3[p] = T_3[uud] = 2T_3[u] + T_3[d] = \tfrac{1}{2}, \qquad Y_p = 2Y_u + Y_d = 1,$$

[40]Мы указываем собственное значение проекции изоспина для базисного состояния, символ которого записан в квадратных скобках.

а у нейтрона

$$T_3[n] = -\tfrac{1}{2}, \qquad Y_n = 1.$$

Мы получаем верные значения электрического заряда протона и нейтрона.

Забегая вперед, отметим, что феноменологически введенный гиперзаряд можно трактовать как масштабированный второй оператор подалгебры Картана в группе SU(3) наряду с проекцией изоспина T_3 (см. формулу(III.1.25) на стр. 140) физической реализации первого фундаментального представления группы SU(3) для сильновзаимодействующих частиц. Поворотом в плоскости весов на $2\pi/3$ против часовой стрелки (см рис. 3.3) можно перейти от этой пары операторов подалгебры Картана к другой, в которой изоспином будет U-изоспин, а «гиперзарядом» со знаком минус — масштабированный электрический заряд $Q\,\sqrt{3}/2 = -\tilde{\Gamma}_8$, где

$$\tilde{\Gamma}_8 \equiv -Q\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -\tfrac{1}{2}\,\Gamma_8 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_3 = \cos(2\pi/3)\,\Gamma_8 - \sin(2\pi/3)\,T_3.$$

Минус перед символом заряда носит чисто исторический характер. Если бы заряду электрона было назначено быть положительным, а протона — отрицательным, то этого минуса в формуле не было бы. Заметим, что отношения единиц заряда и гиперзаряда к стандартной в математике нормировке второго оператора подалгебры Картана, обусловленной единичной длиной всех корней алгебры SU(3), одинаковы и равны $\sqrt{3}/2$. Благодаря такой исторической нормировке заряды и гиперзаряды протона и нейтрона — целые. Третий заряд, назовем его Q_V-зарядом, парный к оси V-изоспина не нашел широкого применения в физике. Его можно ввести формулой

$$\tilde{\Gamma}'_8 \equiv Q_V\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2}\,\Gamma_8 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,T_3 = \cos(\pi/3)\,\Gamma_8 - \sin(\pi/3)\,T_3.$$

Введенный Q_V-заряд также будет сохраняться в реакциях с участием адронов, как и V-изоспин.

Интересно, что и для мезонов, составленных из кварка и антикварка, $Y = Y_q + Y_{\bar{q}} = 0$, заряд совпадает со значением проекции изоспина. Например, триплет пи-мезонов (π^+, π^0, π^-) имеет изоспин $T = 1$, а массы частиц в триплете отличаются не более, чем на 4 МэВ, что также мало по сравнению с $m_{\pi^+} \approx 140$ МэВ. При этом сразу предполагаем, что $\pi^+ = (u\bar{d})$, $\pi^- = (\bar{u}d)$, а π^0 — это суперпозиция[41] $(\bar{u}u)$ и $(\bar{d}d)$. Мы видим, что составная кварковая модель описывает мультиплеты адронных состояний, в которых массы приблизительно равны друг другу, как базисные состояния неприводимых представлений группы изоспина. При этом мультиплет — это неприводимое представление группы, которое характеризуется инвариантом: в группе это квадратичный оператор Казимира, а в физике это масса состояний мультиплета. Другими словами, масса базисных состояний мультиплета, как мы и говорили в начале раздела, является инвариантом, который определяется единственным независимым инвариантом группы SU(2) — собственным значением квадратичного оператора Казимира, так что неприводимое представление группы, на котором оператор Казимира равен своему собственному значению, и поэтому называется инвариантом представления, задает массу частиц мультиплета. Преобразования, оставляющие инвариантной массу состояний в мультиплете образуют группу симметрии адронов, составленных из сильно взаимодействующих кварков.

Формула (III.3.30) применяется и для состояний, синглетных по изоспину: $T = T_3 \equiv 0$. Обобщение (III.3.30) включает в себя странные кварки, изоспин которых равен нулю, но они, кроме барионного числа, несут еще и специальный заряд, который называют странность $S = -1$, так что гиперзаряд складывается из барионного числа и странности,

$$Y = B + S. \tag{III.3.33}$$

Тогда электрический заряд s-кварка согласно (III.3.30) равен

$$Q_s = -\tfrac{1}{3}, \tag{III.3.34}$$

что и наблюдается экспериментально.

Итак, кварки — это квантовые состояния, которые принадлежат пространствам неприводимых представлений группы изотопических преобразований SU(2): u- и d-кварки образуют изодублет, а s-кварк — изосинглет. Аромат кварка — это состояние физической системы с определенным набором собственных значений наблюдаемых величин: заряд, изоспин, масса и спин. Конкретный набор этих значений

[41] Для определения коэффициентов суперпозиции необходимо знать, что такое сопряженный спинор и как происходит сложение изоспина двух подсистем, образующих одну систему, а в данном случае кварк и антикварк образуют мезон. Эту задачу мы рассмотрим детально в разделе **§ 5. Симметрия массовых мультиплетов адронов и ароматы кварков** главы 3, **§ 4. Представления** su(3). Более того, мы изучим вопрос о спине или моменте количества движения составной системы как задачу о сложении двух спинов или моментов количества движения в главе 4, раздел **1.1 Сложение моментов вращения, § 1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов**.

указывает на u-кварк, d-кварк, s-кварк и т.д., т. е. на имя кварка. Поэтому говорят, что имя кварка определяет его «аромат» (flavour (UK), flavor (US)). Адроны — составные состояния, построенные из кварковых состояний. Адроны делятся на барионы, которые имеют отличное от нуля целое барионное число, и мезоны с барионным числом $B = 0$. Состояния с нецелым барионным числом не наблюдаются как асимптотически свободные состояния, причем асимптотически свободные состояния определяются как такие, которые могут распространятся в пространстве-времени вне зависимости от других состояний. Состояния с дробным барионным числом наблюдаются только как часть систем с целым барионным числом, т. е. только во взаимодействии с другими подсистемами, а значит, не в асимптотически свободной области. Говорят, что такое правило — это особенность динамики взаимодействий кварков, которое называют конфайнментом. Пример подсистемы — дикварки: uu-дикварк — это часть бариона (uud). Вместе с тем, природа конфайнмента кварков включает в себя не только рассуждение о барионном числе: силы, удерживающие кварки в адронах, описываются симметрией SU(3) в отношении новой характеристики кварков, которую назвали цветом. В историческом плане физические предпосылки для введения цветовой симметрии мы опишем в **§ 4. Представления $\mathfrak{su}(3)$** этой главы.

Отметим, что изотопическая симметрия в спектроскопии подтверждена экспериментально, так как обнаружено множество мультиплетов с определенным значением изоспина, причем члены изотопического мультиплета — это состояния, которые имеют совпадающие массы в рамках точности изотопической инвариантности, составляющей около 2 МэВ.

Барионы (аналоги нуклонов):

частицы	изоспин	масса	размерность	наименование мультиплета
$(p; n)$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 940$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет нуклонов со спином $\frac{1}{2}$,
$(\Sigma^+; \Sigma^0; \Sigma^-)$,	$T = 1$,	$m \approx 1190$ МэВ,	$2T + 1 = 3$,	триплет гиперонов со спином $\frac{1}{2}$ и странностью $S = -1$,
$(\Xi^0; \Xi^-)$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 1315$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет гиперонов со спином $\frac{1}{2}$ и странностью $S = -2$,
$(\Delta^{++}; \Delta^+; \Delta^0; \Delta^-)$,	$T = \frac{3}{2}$,	$m \approx 1232$ МэВ,	$2T + 1 = 4$,	квартет Δ-изобарионов со спином $\frac{3}{2}$,
$(\Sigma^{*+}; \Sigma^{*0}; \Sigma^{*-})$,	$T = 1$,	$m \approx 1385$ МэВ,	$2T + 1 = 3$,	триплет гиперонов со спином $\frac{3}{2}$ и странностью $S = -1$,
$(\Xi^{*0}; \Xi^{*-})$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 1530$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет гиперонов со спином $\frac{3}{2}$ и странностью $S = -2$.

Мезоны:

частицы	изоспин	масса	размерность	наименование мультиплета
$(K^+; K^0)$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 495$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет K-мезонов (каонов) со спином 0 и странностью $S = -1$,
$(\pi^+; \pi^0; \pi^-)$,	$T = 1$,	$m \approx 140$ МэВ,	$2T + 1 = 3$,	триплет π-мезонов (пионов) со спином 0,
$(\bar{K}^0; \bar{K}^-)$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 495$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет антикаонов со спином 0 и странностью $S = +1$,
$(K^{*+}; K^{*0})$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 892$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет векторных K-мезонов со спином 1 и странностью $S = -1$,
$(\rho^+; \rho^0; \rho^-)$,	$T = 1$,	$m \approx 770$ МэВ,	$2T + 1 = 3$,	триплет векторных ρ-мезонов со спином 1,
$(\bar{K}^{*0}; \bar{K}^{*-})$,	$T = \frac{1}{2}$,	$m \approx 892$ МэВ,	$2T + 1 = 2$,	дублет векторных антикаонов со спином 1 и странностью $S = +1$.

Отметим, что у мезонов в состав мультиплета могут входить и частицы, и их античастицы, как в случае триплетов π- и ρ-мезонов. У барионов античастицы образуют только отдельные изо-мультиплеты, которые мы не стали выписывать, так как свойства античастиц получаются заменой всех знаков зарядов в мультиплете частиц. У мезонов это также наблюдается для частиц со странностью, как в случае мультиплетов каонов, для которых мы выписали эти мультиплеты в явном виде. Такое различие по составу мультиплетов, когда у мезонов возможно вхождение в мультиплет и частиц, и античастиц, указывает на то, что мезоны составлены из кварков и антикварков, а барионы — исключительно из кварков.

Перечисленные нами свойства мультиплетов барионов и мезонов согласуются с формулами для электрического заряда (III.3.30) и гиперзаряда (III.3.33)

$$Q = \tfrac{1}{2}Y + T_3, \quad Y = B + S,$$

так что у мезонов барионное число равно нулю $B_M = 0$, в отличие от барионов, для которых $B = +1$, а у их античастиц, антибарионов $B = -1$.

Определение кваркового состава, т. е. запись этих мультиплетов в виде неприводимых представлений, которые можно выделить в тензорных произведениях фундаментальных представлений группы SU(2), потребует специальной техники схем Юнга, что и будет описано нами при изучении представлений группы SU(3). На данном этапе подчеркнем, что составная модель сильно взаимодействующих частиц – адронов – позволяет не только классифицировать состояния барионов и мезонов, но и выяснить физическую причину существования реплик одних и тех же мультиплетов с большей массой: в связанных состояниях кварков наряду с ароматами, которые описываются группой симметрии ароматов SU(2), есть такие пространственно-временные характеристики как спин, орбитальный момент, номер возбуждения радиальной волновой функции. Это приводит к появлению возбужденных состояний, которые также образуют мультиплеты по группе симметрии ароматов!

3.5 Слабый изоспин

Группа SU(2) описывает и свойства слабых взаимодействий. Дело в том, что при слабых взаимодействиях в бета-распаде нейтрона и во множестве других процессов наблюдаются так называемые заряженные токи: например, d-кварк переходит в u-кварк, электрон в электронное нейтрино $e \to \nu_e$ так, что испускается W^--бозон с зарядом -1, который и обеспечивает сохранение заряда в слабом процессе. Значит, одно базисное кварковое состояние при слабых заряженных токах преобразуется в другое базисное кварковое состояния, $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, так что и суперпозиция таких базисных кварковых состояний преобразуется в суперпозицию этих же базисных кварковых состояний, т. е. имеют место преобразования в двумерном пространстве представления, которое называют слабым кварковым изодублетом. То же можно сказать и о преобразованиях базисных лептонных состояний, $|e\rangle \leftrightarrow |\nu_e\rangle$, суперпозиция которых образует двумерное пространство слабого лептонного изодублета. Число кварков или лептонов в подобных процессах слабого взаимодействия остается неизменным, что означает введение группы SU(2), как мы видели в предыдущем разделе при рассмотрении группы симметрии мультиплета, где также имеет место условие нормировки изоспинора.

В описанном базисе кварковых и лептонных состояний реализация представления в смысле квантовой механики приводит к функции дискретного аргумента. принимающего всего два значения. Отсюда две компоненты — это запись функции двумерного пространства состояний путем перечисления всех ее значений при допустимых значениях аргумента, которых всего два.

Если ввести базис в пространстве квантовых состояний кварков с порядком компонент в сторону уменьшения электрического заряда на единицу от верхней компоненты к нижней

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}, \qquad |d\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}, \tag{III.3.35}$$

и лептонов

$$|\nu_e\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{L}}, \qquad |e\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{L}}, \tag{III.3.36}$$

то можно ввести дублеты

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix}\nu_e\\e\end{pmatrix}. \tag{III.3.37}$$

где компоненты — это комплексные числа, которые описывают суперпозицию состояний и называются амплитудами вероятности этих состояний. Общепринятой является запись квантового состояния[42]

$$u|u\rangle + d|d\rangle \equiv \mathcal{Q} = \begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}.$$

Тогда квадраты модулей амплитуд в суперпозиции состояний в логике квантовой механики определяют вероятности наблюдать в системе соответствующие квантовые состояния:

$$w(u) = u^*u \equiv \bar{u}u, \quad w(d) = \bar{d}d, \quad w(\nu_e) = \bar{\nu}_e\nu_e, \quad w(e) = \bar{e}e.$$

Сохранение числа лептонов и числа кварков означает, что в слабых взаимодействиях дублеты сохраняют квадрат длины[43] $\mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}$ или $\mathcal{L}^\dagger\mathcal{L}$, а это имеет место при унитарных преобразованиях дублетов

[42] Обращаем внимание читателя на то, что $|u\rangle$ или $|d\rangle$ внутри символа кет-вектора — не более чем обозначения для базиса в двумерном пространстве состояний, т. е. для двухкомпонентного объекта гильбертова пространства, который можно называть дублетом (или спинором, если подчеркивать закон его преобразования). А вот тот же значок перед символом кет-вектора — это комплексное число, на которое кет-вектор с той же буквой внутри умножается.

[43] Инварианты группы SU(2), построенные из спиноров, рассмотрены в главе 1.

матрицами U размера 2×2. Изменение общей фазы дублетов, во-первых, не меняет относительную фазу между базисными состояниями, и, следовательно, эта общая фаза не является наблюдаемой величиной в квантовой механике, т. е. физический смысл имеют только преобразования группы $\mathrm{U}(2)$, из которых исключили преобразования группы $\mathrm{U}(1)$, — это группа $\mathrm{SU}(2)$. Во-вторых, изменение общей фазы дублетов не имеет никакого отношения к преобразованиям за счет слабых взаимодействий, потому что наблюдаемые преобразования за счет слабых взаимодействий либо заменяют одно базисное состояние на другое: $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, $|e\rangle \leftrightarrow |\nu_e\rangle$, — либо, как мы увидим дальше, изменяют *относительную фазу базисных состояний в их суперпозиции*, так что группа унитарных преобразований с $|\det U| = 1$ в случае рассмотрения свойств слабых взаимодействий ограничивается специальными преобразованиями без изменения общей фазы дублета за счет действия группы $\mathrm{U}(1)$. Это можно получить, зафиксировав комплексную фазу $\det U$. Если потребовать, чтобы преобразования дублетов включали бы в себя тождественное преобразование, для которого $\det U = 1$, то в итоге получается группа $\mathrm{SU}(2)$, состояния представлений которой называются слабым изоспином T^W. Формула для связи электрического заряда базисных состояний с проекцией изоспина этих состояний имеет тот же вид, что и (III.3.30), так как разность зарядов верхних и нижних компонент дублетов отличается на единицу, что совпадает с разностью проекций слабого изоспина, откуда

$$Q = \tfrac{1}{2}\, Y^W + T_3^W. \tag{III.3.38}$$

Для верхних и нижних компонент дублетов проекция изоспина равна

$$T_3^W[u] = T_3^W[\nu_e] = \tfrac{1}{2}, \qquad T_3^W[d] = T_3^W[e] = -\tfrac{1}{2}, \tag{III.3.39}$$

а значение гиперзаряда Y^W является одним и тем же для обеих компонент дублета, но отличается для разных дублетов. Таким образом у кваркового и лептонного дублетов значения слабого гиперзаряда разные,

$$Y^W[\mathcal{L}] = -1, \qquad Y^W[\mathcal{Q}] = +\tfrac{1}{3}.$$

Такое отличие можно считать индикатором того, что у лептонов и кварков в дублете есть специфические заряды или квантовые числа, которые называют лептонным числом и барионным числом. Принято считать, что у лептонов лептонное число $L[\mathcal{L}]$ рано единице, $L[\mathcal{L}] = 1$, а у кварков — нулю, $L[\mathcal{Q}] = 0$, в то время как барионное число лептонов равно нулю $B[\mathcal{L}] = 0$, а у кварков оно отлично от нуля, и определяют его так, чтобы у протона и нейтрона как у самых известных представителей барионов это число было равно единице $B = 1$. Но, так как барионы состоят из трех кварков, связанных сильным взаимодействием[44], то отсюда вполне естественно предположить, что барионные числа кварков, как заряды, складываются в составленных из них состояниях, так что $B[\mathcal{Q}] = \frac{1}{3}$. Тогда можно подобрать подходящую формулу для слабого гиперзаряда в терминах барионного и лептонного чисел,

$$Y^W = B - L. \tag{III.3.40}$$

Важнейшим свойством слабых взаимодействий, которое было установлено экспериментальным путем, заключается в том, что в этих взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна $-\frac{1}{2}$, состояния с левой проекцией спина помечены нижним индексом L в смысле left) и их правые античастицы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна $+\frac{1}{2}$, состояния с правой проекцией спина помечены нижним индексом R в смысле right)[45]: замена частиц на античастицы вместе с заменой левого на правое и обратно называется комбинированной $\mathbb{CP}$-четностью, где $\mathbb{C}$ указывает на смену знаков зарядов частиц, а $\mathbb{P}$ — на зеркальную инверсию пространства. С учетом этого факта фермионы первого поколения — это дублеты левых

[44] В отношении сильных взаимодействий лептоны нейтральны, а кварки несут цвет и являются триплетами $\mathbf{3}$ по группе $\mathrm{SU}_c(3)$, которую мы обсудим ниже [индекс «c» — это аббревиатура colour (UK), color (US)]. Антикварки же — цветовые антитриплеты $\bar{\mathbf{3}}$ по группе $\mathrm{SU}_c(3)$.

[45] Как следует из самого определения левых и правых фермионов спина $s = 1/2$ как состояний в ультрарелятивистском (безмассовом) пределе, эти понятия являются сугубо релятивистскими по своей сути. В релятивистской теории эти фермионы описываются биспинорами Дирака (элементами четырехкомпонентного пространства представлений группы Пуанкаре), а левые и правые компоненты строятся как специфические суперпозиции компонент биспинора Дирака так, что их физическая интерпретация носит явный характер в терминах проекции спина на вектор импульса частицы только в ультрарелятивистском пределе для так называемых киральных полей.

лептонов и кварков (по слабому взаимодействию) и их правых античастиц[46]

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ -\bar{\nu}_R^e \end{pmatrix}, \tag{III.3.41}$$

квантовые числа которых мы уже обсудили выше, а правые частицы —синглеты по слабому взаимодействию и их CP-сопряженные партнеры,

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \qquad e_R, \quad e_L^+. \tag{III.3.42}$$

Термин «синглет по слабому изоспину» означает, что слабый изоспин равен нулю, так что гиперзаряд и заряд связаны редуцированной формулой

$$Q = \tfrac{1}{2} Y_R^W,$$

где известный электрический заряд этих состояний определяет величину гиперзаряда, которая получается разной для левых дублетов и правых синглетов, $Y_L^W \equiv Y^W \neq Y_R^W$. Объяснение такого неравенства может возникнуть только в модели, в которой и левые, и правые частицы оказываются базисными состояниями одного и того же неприводимого представления некоторой, более широкой компактной простой группы, отличной от SU(2) и имеющей большее значение ранга так, чтобы гиперзаряд или электрический заряд стали бы генераторами в подалгебре Картана в группе Ли большего ранга. В данном же разделе мы принимаем тот факт, что гиперзаряды левых и правых компонент как состояния одной и той же частицы принимают разные значения, как экспериментальную данность.

Таким образом левые частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ участвуют в слабых взаимодействиях, а в силу свойств группы Пуанкаре, которая здесь не рассматривается, отсюда следует, что точно также в слабых взаимодействиях участвуют и CP-сопряженные к частицам античастицы, т. е. правые античастицы. Однако и кварки, и электроны являются частицами, которые обладают как левой проекцией спина на ось импульса, так и правой. Правые частицы, как установил эксперимент, не участвуют в слабых взаимодействиях, т. е. не обладают слабым изоспином, что и называется «синглет по слабому изоспину». Все эти правые частицы перечислены в (III.3.42), но к ним добавлены и CP-сопряженные левые античастицы, которые в силу той же группы Пуанкаре обладают тем же изоспином, т. е. также являются синглетами и не участвуют в слабых взаимодействиях.

Остается еще правое нейтрино ν_R^e, у которого заряд, гиперзаряд и слабый изоспин тождественно равны нулю, так что его еще называют стерильным нейтрино, имея в виду, что по отношению в электромагнитным, слабым и сильным взаимодействиям ν_R^e абсолютно стерильно.

В отличие от изоспина, который связан со спектроскопией адронов за счет введения дублета легких кварков u, d и их антикварков, участвующих в сильных взаимодействиях, слабый изоспин — это инструмент описания динамики слабых взаимодействий. Поэтому и понятие гиперзаряда в этих случаях является совершенно разным.Линейная связь электрического заряда с гиперзарядом и слабым изоспином послужила основой для формулирования Вайнбергом, Глешоу и Саламом электрослабой калибровочной теории на основе группы $\mathrm{U}_Y(1) \times \mathrm{SU}_L(2)$. Отметим, что теория слабых взаимодействий стала сложнее после открытия трех поколений: все кварковые и лептонные дублеты и синглеты в природе представлены в виде трех копий, которые отличаются друг от друга только разными значениями масс.

• Единичная длина корня и заряд в физике

Здесь уместно обратить внимание на физический смысл условия единичной нормировки простого положительного корня наименьшей длины в простой компактной группе Ли. В физике заряды — это собственные значения генераторов подалгебры Картана, т. е. компоненты весов базисных состояний. В коммутационных соотношениях генераторов в базисе Картана–Вейля выбор масштаба групповых координат задает конформный фактор метрики Киллинга и длину простого положительного корня наименьшей длины. При заданном конформном факторе в метрике Киллинга выбор эталонной длины корневого вектора задает значения всех компонент весовых векторов, и все ненулевые значения выражаются через длину этого корня, причем отношения собственных значений к такой эталонной длине

[46]Знак минус в сопряженном дублете введен, чтобы сопряженный дублет преобразовывался той же матрицей, что и дублет, а не комплексно сопряженной матрицей: это свойство выводится при рассмотрении спиноров при квантовании спина:

$$\psi_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \qquad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{d}_R \end{pmatrix}.$$

Заметим, что по построению согласно свойствам преобразований верхние компоненты сопряженного дублета ψ_c имеют проекцию изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$, а нижние — $T_3 = -\frac{1}{2}$. Напротив, верхние компоненты дублета ψ^* имеют проекцию изоспина $T_3 = -\frac{1}{2}$, а нижние — $T_3 = +\frac{1}{2}$, что легко установить из явного вида этих компонент, приведенного выше.

зависят только от того, какое задано неприводимое представление простой компактной группы. Итак, изменение масштаба групповых координат в $1/e$ раз $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}/e$ по сравнению с масштабом, когда длина корня была равна единице, приводит к замене генераторов группы $\Gamma_a \mapsto e\,\Gamma_a$. Такое же преобразование происходит и с корневыми векторами, поскольку

$$[e\,\Gamma_a, e\,\Gamma_b] = \mathrm{i}e\, f^c_{ab}(e\,\Gamma_c),$$

или в базисе Картана–Вейля

$$[e\,\Gamma_l, e\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}] = (e\,\alpha_l)(e\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

В групповых соотношениях величина e задает единицу измерения зарядов, поскольку корневые векторы как разности весов имеют с весовыми векторами одни и те же единицы измерения. Относительные соотношения для зарядов, т. е. для компонент весовых векторов, никак при этом не изменяются. Однако в физике нормировки различных величин могут быть связаны, что означает существование динамических соотношений: нормировка простого положительного корня наименьшей длины на единицу приводит к тому, что в кинематических или динамических соотношениях неизбежно возникает абсолютная величина e. Например, в калибровочных теориях слабых взаимодействий e — это слабый заряд, который может быть измерен в процессах распада и рассеяния.

Рассмотрим точную формулировку тезиса о физическом смысле выбора эталонной длины простого положительного корня наименьшей длины.

Пусть $\psi(x)$ — элемент неприводимого представления группы Ли в точке пространства-времени x^μ, так что действие элемента группы G на $\psi(x)$, записанное в терминах групповых координат $a^k(x)$ экспоненциального представления элементов группы и генераторов $e\Gamma_k$, имеет вид

$$\psi_G(x) = G\cdot\psi(x) \equiv \exp\big(-\mathrm{i}\,e\,\Gamma_k a^k(x)\big)\psi(x). \tag{III.3.43}$$

Если групповая координата a^k не зависит от 4-координат x, т. е. $\partial_\mu a^k \equiv 0$, то преобразование (III.3.43) называют глобальным. В общем случае (III.3.43) — это локальное калибровочное преобразование поля $\psi(x)$. Действие $S[\psi,\bar\psi]$ как функционал поля $\psi(x)$ в заданном неприводимом представлении и других полей $\bar\psi$ в других неприводимых представлениях может быть инвариантно относительно глобальных преобразований, а это означает, что действие S — синглет относительно преобразований группы Ли всех входящих в действие полей. Тогда инвариантное действие определяет сохраняющийся ток Нётер. Вместе с тем, в действие поля, если поле является динамическим, обычно входит оператор 4-импульса $\hat p_\mu = \mathrm{i}\partial_\mu$, который при глобальных преобразованиях остается инвариантным, но вопрос о локальной калибровочной инвариантности действия требует отдельного рассмотрения.

Зависимость элемента неприводимого представления $\psi(x)$ от точки в пространстве-времени по определению задает локальное поле, для которого в квантовой теории определен оператор 4-импульса $\hat p_\mu = \mathrm{i}\partial_\mu$. Действие этого оператора на преобразованный элемент равно

$$\hat p_\mu\big(\psi_G(x)\big) = \mathrm{i}\partial_\mu\big(G\cdot\psi(x)\big) = \exp\big(-\mathrm{i}\,e\,\Gamma_k a^k(x)\big)\big(\mathrm{i}\partial_\mu + e\,\Gamma_k(\partial_\mu a^k(x))\big)\psi(x) = \\ = G\cdot\big(\mathrm{i}\partial_\mu + e\,\Gamma_k(\partial_\mu a^k(x))\big)\psi(x). \tag{III.3.44}$$

В этом выражении величина $\partial_\mu a^k(x)$ по 4-координатному нижнему индексу μ преобразуется как 4-ковектор, а по верхнему индексу групповых координат k как контрвектор в касательном пространстве групповых параметров.

Если вести оператор $\hat P_\mu(\mathcal{A})$, который зависит от 4-ковектора $\mathcal{A}^k_\mu(x)$ в присоединенном представлении группы (индекс k имеет размерность группы),

$$\hat P_\mu(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\nabla_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\partial_\mu - e\,\Gamma_k\mathcal{A}^k_\mu(x), \tag{III.3.45}$$

с ковариантной производной ∇_μ, в определение которой входит калибровочное поле $\mathcal{A}^k_\mu(x)$, вместо частной производной ∂_μ, то

$$\hat P_\mu(\mathcal{A}=0) = \mathrm{i}\partial_\mu,$$

и соотношение (III.3.44) примет вид

$$\hat P_\mu(\mathcal{A}=0)\big(G\cdot\psi(x)\big) = G\cdot\hat P_\mu(\mathcal{A})\,\psi(x), \quad \text{где } \mathcal{A}^k_\mu(x) = -\partial_\mu a^k(x).$$

Это равенство показывает, что величина $\hat P_\mu\,\psi(x)$ при калибровочном преобразовании G локального поля $\psi(x)$, т. е. при действии группового элемента G также преобразуется действием того же группового

элемента, если калибровочное поле $\mathcal{A}^k_\mu(x)$ при этом тоже преобразуется как элемент присоединенного представления группы Ли, так как это калибровочное поле представляет собой набор компонент состояния с базисом в виде генераторов алгебры Ли Γ_k.

Введем обозначение $\hat{P}_\mu(\mathcal{A}^G)$ для оператора, в котором калибровочное поле $\mathcal{A}^k_\mu(x)$ преобразовано в $(\mathcal{A}^G)^k_\mu(x)$ при действии группового преобразования G:

$$\hat{P}_\mu(\mathcal{A}^G) = \mathrm{i}\partial_\mu - e\,\Gamma_k(\mathcal{A}^G)^k_\mu(x),$$

и положим, что имеет место *групповое преобразование для ковариантного оператора при действии на локальное поле*:

$$\hat{P}_\mu(\mathcal{A}^G)\,\psi_G(x) \stackrel{\text{def}}{=} G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,\psi(x). \tag{III.3.46}$$

В правой части равенства введем единицу

$$\mathbb{1} = G^{-1}\cdot G,$$

так что

$$G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,\psi(x) = G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,G^{-1}\cdot G\,\psi(x) = G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,G^{-1}\cdot\psi_G(x) \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \hat{P}_\mu(\mathcal{A}^G)\,\psi_G(x) = G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,G^{-1}\cdot\psi_G(x).$$

Введем обозначение для разложения калибровочного поля по базису генераторов

$$\mathcal{A}_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_k\mathcal{A}^k_\mu(x)$$

и найдем

$$G\cdot\hat{P}_\mu(\mathcal{A})\,G^{-1}\cdot\psi_G(x) = G\cdot\left(\mathrm{i}\partial_\mu - e\,\mathcal{A}_\mu\right)G^{-1}\cdot\psi_G(x) =$$
$$G\cdot G^{-1}\,\mathrm{i}\partial_\mu\psi_G(x) + \mathrm{i}G\cdot\left(\partial_\mu G^{-1}\right)\cdot\psi_G(x) - e\left(G\cdot\mathcal{A}_\mu\cdot G^{-1}\right)\psi_G(x) =$$
$$= \left(\mathrm{i}\partial_\mu - e\left(G\cdot\mathcal{A}_\mu\cdot G^{-1}\right) + \mathrm{i}G\cdot\left(\partial_\mu G^{-1}\right)\right)\cdot\psi_G(x).$$

После сравнения этого результата с исходным выражением

$$\hat{P}_\mu(\mathcal{A}^G)\,\psi_G(x) = \left(\mathrm{i}\partial_\mu - e\,\mathcal{A}^G_\mu\right)\cdot\psi_G(x)$$

находим, что

$$\mathcal{A}^G_\mu(x) = G\cdot\mathcal{A}_\mu(x)\cdot G^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{e}\,G\cdot\partial_\mu G^{-1}. \tag{III.3.47}$$

Итак, калибровочное преобразование элемента неприводимого представления $\psi\in V_{\text{ir}}$, записанное в (III.3.43), приводит и к калибровочному преобразованию векторного калибровочного поля $\mathcal{A}_\mu$ в присоединенном представлении по закону (III.3.47), что обеспечивает групповой закон преобразования для ковариантного оператора импульса при действии на локальное поле $\psi(x)$ согласно (III.3.46). Это значит, что, если исходное действие для локального поля было инвариантно относительно групповых преобразований, то из инвариантности действия следовал закон сохранения ток Нётер. Тогда введение в действие ковариантного оператора импульса с калибровочным полем вместо оператора импульса без поля приводит к тому, что такое действие также будет инвариантно относительно уже локальных калибровочных преобразований. На этом принципе основано успешное описание электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий в Стандартной Модели.

Важно, что теперь масштабный фактор e в ковариантной производной явно входит в действие, а это значит, что его значение может быть измерено экспериментально. Нормировку калибровочного поля задают так, чтобы кинетическая энергия поля имела канонический вид в системе единиц измерения, например, в системе единиц Гаусса или Хевисайда, и тогда значение e становится однозначным и проявляет себя в физических характеристиках калибровочного взаимодействия.

В итоге, множитель e по своему физическому смыслу — это единица измерения групповых зарядов.

Задача 31. В группе поворотов SO(3) перейдите от генераторов поворотов в декартовых координатах вокруг оси s^α на угол ϕ_α к генераторам поворотов в плоскости $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}s^\alpha$ на угол $\omega^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\phi_\alpha$, так что

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = s^\alpha\phi_\alpha.$$

Например, в плоскости (x, y) поворот по направлению от x к y — это поворот вокруг оси z на угол $\phi_z = \omega^{xy}$, и он описывается введением генератора $\mathfrak{s}_{xy}$. Тензор $\omega^{\mu\nu}$, введенный Эли Картаном, учитывает направление поворота, так что $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Другими словами, угол поворота от y к x — это взятый с минусом угол поворота от x к y. Тензор генераторов поворота в плоскости также является антисимметричным $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = -\mathfrak{s}_{\nu\mu}$, а суммирование по двум «немым» индексам приводит к возникновению множителя $\frac{1}{2}$ для произведения $\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$, чтобы свести поворот в плоскости к углу поворота вокруг оси. Получите выражение для коммутатора

$$[\mathfrak{s}_{\mu\nu}, \mathfrak{s}_{\lambda\rho}] = \mathrm{i}\big(\delta_{\mu\lambda}\mathfrak{s}_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\mathfrak{s}_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}\mathfrak{s}_{\mu\rho} + \delta_{\nu\rho}\mathfrak{s}_{\mu\lambda}\big), \tag{III.3.48}$$

где $\delta_{\mu\lambda}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах.

Задача 32. Для алгебры группы поворотов SO(4) в 4-мерном пространстве, в которой тензорные генераторы $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (III.3.48) в области изменения координатных индексов $\mu \in \{\overline{1,4}\}$, введите генераторы

$$\tilde{s}_\alpha = \mathfrak{s}_{4\alpha}, \qquad s_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{s}_{\beta\gamma} \qquad \text{при} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \big\{\overline{1,3}\big\}.$$

Найдите коммутационные соотношения для всех пар генераторов $\tilde{s}_\alpha$ и s_β и линейной заменой перейдите к такому набору генераторов, которые отвечают алгебре $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

§4. Представления $\mathfrak{su}(3)$

Триплет и антитриплет, гиперзаряд и изоспин как генераторы подалгебры Картана, система корней, повышающие и понижающие корневые генераторы, переход от генераторов к матрицам Гелл-Манна, квадратичный оператор Казимира, антикоммутатор матриц Гелл-Манна и кубический оператор Казимира, тождество Фирца, шестиугольная весовая диаграмма неприводимого представления, физический смысл длин сторон, операторы Казимира подалгебр и вырожденность состояний, размерность мультиплета.

4.1 Фундаментальные представления

Алгебра второго ранга с простыми положительными корнями единичной длины имеет пару фундаментальных векторов, каждый из которых согласно определению

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_j,\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)}=\delta_{jm} \tag{III.2.11}$$

имеет проекцию $\frac{1}{2}$ на соответствующий простой положительный корень и ортогонален другому простому положительному корню. Несмотря на то, что простые положительные корни имеют единичную длину, фундаментальные векторы не являются единичными: их проекции на «свои» простые положительные корни равны половине длины своего корня и зафиксированы углы между фундаментальными векторами и простыми положительными корневыми векторами, что задает направления и длины фундаментальных векторов.

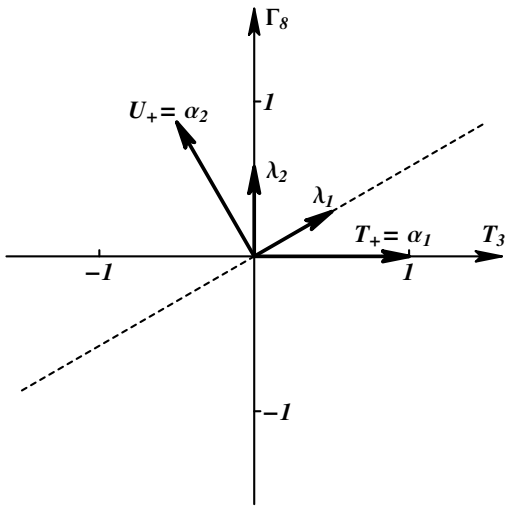


Рис. 3.7: Фундаментальные векторы алгебры $\mathfrak{su}(3)$ на плоскости $\{T_3,\Gamma_8\}$.

На рис. 3.7 на плоскости весов с традиционным физическим выбором осей генераторов подалгебры Картана $\{T_3,\Gamma_8\}$ изображены два простых «положительных» корня и фундаментальные векторы алгебры $\mathfrak{su}(3)$. Их компоненты и длины (см. рис. 3.1 на стр. 136 в главе 3):

$$\boldsymbol{\lambda}_1=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right),\qquad \boldsymbol{\lambda}_2=\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\qquad \boldsymbol{\lambda}_1^2=\boldsymbol{\lambda}_2^2=\tfrac{1}{3}, \tag{III.4.1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)\,,\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\qquad \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{III.4.2}$$

■ Воспользуемся явными значениями координат векторов и заметим, что

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2. \tag{III.4.3}$$

В правой части этой формулы стоит сумма фундаментальных векторов с положительными коэффициентами так, что эта сумма, записанная в виде $p_1\boldsymbol{\lambda}_1+p_2\boldsymbol{\lambda}_2$, задает состояние старшего веса неприводимого представления $\mathbf{T}^{(1,1)}$, которое является присоединенным представлением группы SU(3). И в (III.4.3) мы установили, что

старший вес присоединенного представления равен сумме простых положительных корней группы SU(3), которая задает третий положительный корень этой группы. То, что этот третий положительный корень существует для SU(3), следует из диаграммы Дынкина для этой группы. ■

Операции вейлевских отражений $\hat{\mathrm{w}}_1$ и $\hat{\mathrm{w}}_2$ на весовой диаграмме неприводимого представления задаются зеркальными отражениями вдоль осей корневых пар векторов, выбранных нами простыми.

Структура базиса первого фундаментального представления. Напомним общие положения о неприводимом представлении и состоянии старшего веса. Старший вес неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов $\boldsymbol{\lambda}_m$ с неотрицательными целыми коэффициентами p_m. Коэффициент p_m перед $\boldsymbol{\lambda}_m$ равен числу шагов понижения состояния старшего веса генератором $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}$ для простого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}_m$. Для первого фундаментального представления со страшим весом

$$\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_1 \tag{III.4.4}$$

допускается только один шаг понижения в направлении $\boldsymbol{\alpha}_1$, т. е. под действием $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1}$ или $T_- = \sqrt{2}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1}$, поэтому такая операция в пространстве весов эквивалентна действию на старший весовой вектор оператора отражения Вейля вдоль корневого вектора $\boldsymbol{\alpha}_1$, т. е. $\hat{\mathrm{w}}_1$. В самом деле, по общей формуле

$$\hat{\mathrm{w}}_m \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_j - 2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)}\,\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\lambda}_j - \delta_{jm}\,\boldsymbol{\alpha}_m \tag{III.4.5}$$

найдем, что

$$\hat{\mathrm{w}}_1\,\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1, \qquad \hat{\mathrm{w}}_1\,\boldsymbol{\lambda}_1 \equiv \boldsymbol{\nu}_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right), \tag{III.4.6}$$

что изображено на рис. 3.8.

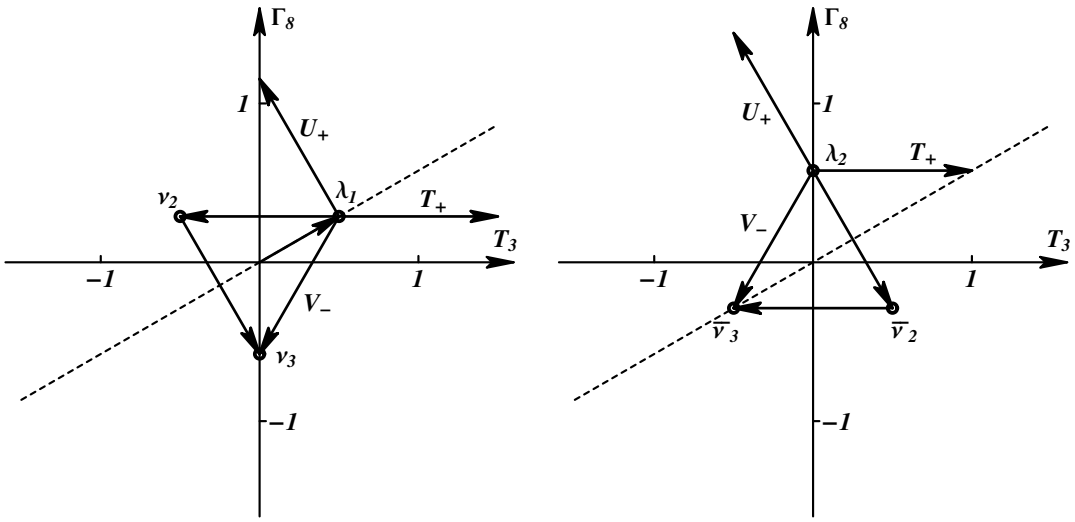


Рис. 3.8: Базисы двух фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(3)$ в виде точек на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$.

Подчеркнем, что операция отражения весов индуцирована операцией отражения базисных состояний с этими же весами, и в данном случае

$$\hat{\mathrm{W}}_1\,|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = |\boldsymbol{\nu}_2\rangle,$$

так что рассуждения с отражением невырожденных весов эквивалентны рассуждениям с отражениями Вейля для базисных состояний неприводимого представления. Мы будем следовать этой логике и далее при построении фундаментальных представлений.

Понижающий оператор второго простого положительного корня $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_2}$ или $U_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_2}$, действуя состояние старшего веса, дает нулевой вектор, так как коэффициент перед вторым фундаментальным вектором в выражении для старшего вектора (III.4.4) равен нулю, а это значит, что и число шагов по направлению против простого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}_2$ равно нулю. Это также можно получить из общей формулы (III.2.22) в случае, когда вес невырожден

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \tilde{\boldsymbol{\nu}})}\,|\tilde{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle = \mathbf{0}, \qquad 2\,\frac{(\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\},$$

откуда после подстановок $\tilde{\boldsymbol{\nu}} \mapsto \boldsymbol{\mu}_S$ и $\boldsymbol{\alpha}_m \mapsto \boldsymbol{\alpha}_2$ получаем

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_2}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\mu}_S)}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2\rangle = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \mathbf{0}, \quad \text{так как} \quad 2\,\frac{(\boldsymbol{\mu}_S,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)} = 2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) = 0.$$

Наконец, вес третьего состояния может быть получен отражением $\boldsymbol{\nu}_2$ относительно второй оси (оператор $\hat{\mathrm{w}}_2$) для неприводимого представления с помощью (III.4.5) и (III.4.6)

$$\hat{\mathrm{w}}_2\,\boldsymbol{\nu}_2 = \hat{\mathrm{w}}_2\hat{\mathrm{w}}_1\,\boldsymbol{\lambda}_1 = \hat{\mathrm{w}}_2\,(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\,\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\nu}_3 = \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{(III.4.7)}$$

который также можно найти, действуя понижающим оператором — корневым генератором $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}$ или $\hat{V}_- = \sqrt{2}\,\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}$ на состояние старшего веса. Согласно (III.2.22)

$$\hat{V}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\mu}_S)}|\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \mathbf{0},$$
$$2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\mu}_S) = 2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\lambda}_1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{V}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\rangle = |\boldsymbol{\nu}_3\rangle.$$

Третий положительный корень, который равен сумме двух простых положительных корней $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, отвечает повышающему оператору – корневому генератору $\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}$ или $\hat{V}_+ = \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}$ и задает третье вейлевское отражение вдоль корня $\boldsymbol{\gamma}$ или вектора $\boldsymbol{V}_-$ на рис. 3.8. Эта линия отражения перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\nu}_2$. Это значит, что и для базисных состояний, и для их весов

$$\hat{\mathrm{w}}_3\,\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\nu}_2, \qquad \hat{\mathrm{W}}_3\,|\boldsymbol{\nu}_2\rangle = |\boldsymbol{\nu}_2\rangle,$$

а

$$\hat{\mathrm{w}}_3\,\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\nu}_3, \qquad \hat{\mathrm{W}}_3\,|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = |\boldsymbol{\nu}_3\rangle.$$

Сведем вместе связь физических и математических обозначений для трех повышающих корневых генераторов и соответствующих им трех «положительных корней» алгебры SU(3):

$$\hat{T}_+ = \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1}, \quad \hat{U}_+ = \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2} \quad \hat{V}_+ = \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2},$$
$$\boldsymbol{T}_+ = \boldsymbol{\alpha}_1, \qquad \boldsymbol{U}_+ = \boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{V}_+ = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\gamma}.$$

Напомним, что действие группы Вейля переводит неприводимое представление в себя. Выше мы показали для первого фундаментального представления, что все отражения группы Вейля связывают невырожденные веса, изображенные на рис. 3.8. Из этого следует, что других состояний в этом фундаментальном представлении нет, и все базисные состояния, которые получаются при действии на состояние старшего веса многократным действием всех понижающих операторов алгебры, уже исчерпаны полученными базисными состояниями с тремя весами $\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$ и $\boldsymbol{\nu}_3$. Эти три состояния принято называть триплетом и обозначать **3**.

Рассуждения от противного подтверждают сделанное утверждение о том, что триплет исчерпывает все состояния первого фундаментального представления: если действие понижающих операторов приводило бы к состояниям с весами вне рамок треугольника, образованного триплетом, то применение к этим состояниям операций вейлевских отражений привело бы к состояниям с весами, старше, чем вес первого фундаментального представления, так как эти веса располагались бы и выше и правее, чем вес $\boldsymbol{\lambda}_1$, а это противоречило бы однозначному определению неприводимого представления. Внутри треугольника состояний $|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle$, $|\boldsymbol{\nu}_2\rangle$, $|\boldsymbol{\nu}_3\rangle$ также не может быть состояний этого представления, так как все веса неприводимого представления получаются действием понижающих операторов на старший вес, и эти веса мы уже перечислили.

Аналогично строится и второе фундаментальное представление со старшим весом $\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_2$ (см. рис. 3.8). Этот старший вес можно однократно понизить лишь в обратном направлении простого положительного корня $\boldsymbol{\alpha}_2$ или вейлевским отражением вдоль этого корня, так как простой положительный корень $\boldsymbol{\alpha}_1$ ортогонален фундаментальному вектору $\boldsymbol{\lambda}_2$. Таким образом находим состояние с весом $\bar{\boldsymbol{\nu}}_2$, на которое можно в свою очередь подействовать оператором отражения $\hat{\mathrm{w}}_1$, отразив весовой вектор $\bar{\boldsymbol{\nu}}_2$ вдоль $\boldsymbol{\alpha}_1$ и перпендикулярно линии ординат, и заполнить тем самым базис фундаментального представления состоянием с весом $\bar{\boldsymbol{\nu}}_3$.

При рассмотрении операций вейлевских отражений мы установили, что группа Вейля не меняет кратность вырождения веса в неприводимом представлении, а так как старший вес является невырожденным, то каждой точке на плоскости весов, полученной при отражении старшего веса, соответствует только одно состояние. В случае фундаментального представления все веса базисных состояний были получены вейлевскими отражениями, а значит, все базисные состояния фундаментального представления невырождены.

В итоге, мы получили все необходимые математические результаты, чтобы полноценно обсуждать физические аспекты в групповых терминах: структуру, свойства и классификацию сильновзаимодействующих частиц.

4.2 Ароматы кварков и сильные взаимодействия: пространство внутренней симметрии

Приведем пример из теории кварковой структуры сильновзаимодействующих частиц – адронов. К адронам относятся барионы, которые составлены из трех кварков (qqq), и мезоны, состоящие из кварка и антикварка ($q\bar{q}$), а также экзотические состояния, которые получаются добавлением в эти связанные состояния кварков дополнительных кварк-антикварковых пар ($q'\bar{q}''$): пентакварки — это состояния ($qqqq'\bar{q}''$), тетракварки — $q\bar{q}q'\bar{q}''$ и т.п. Группа преобразований кварка одного аромата в кварк другого аромата в таких адронах возникает аналогично группе SU(2) изотопических преобразований двухкомпонентной нуклонной волновой функции, как это было рассмотрено нами выше при описании масс барионов и мезонов. Базисные состояния неприводимого представления с заданным изоспином с высокой степенью точности обладают одной и той же массой, которую мы считаем пропорциональной собственному значению квадратичного инварианта Казимира в данном неприводимом представлении. Если теперь к обычным кваркам u и d, из которых состоят нуклоны, добавить нестабильный странный кварк s с зарядом $-\frac{1}{3}$ и массой около сотни МэВ, то можно говорить о приближенной симметрии сильных взаимодействий относительно матричных преобразований трехкомпонентной кварковой волновой функции, когда вместо базисного состояния с определенным ароматом кварка можно взять линейную комбинацию всех трех ароматов кварков, так что при этом масса состояния не изменится, если не изменится число кварков. Число кварков в заданном состоянии определяется как сумма квадратов амплитуд вероятности найти каждое из базисных состояний с определенным ароматом кварка в заданном состоянии, что, как мы установили на примере изотопических преобразований в главе 3, раздел **3.4 Изотопическая инвариантность (спектроскопия)**, **§ 3. Представления** $\mathfrak{su}(2)$, задает вероятность найти в адроне кварк того или иного аромата (см. также **§ 1. Квантовые понятия и обозначения** в Приложении, где описаны основные понятия и обозначения квантовой механики). Это значит, что матричные преобразования трехкомпонентной волновой функции сохраняют норму этой волновой функции. Поэтому 3×3-матрицы преобразований являются унитарными. Исключение ненаблюдаемой общей комплексной фазы трехкомпонентной волновой функции приводит к группе SU(3). Эта инвариантность носит название симметрии кварковых ароматов [flavor (US), flavour (UK)] и поэтому обозначается $\mathrm{SU_f}(3)$.

Поскольку масса странного кварка $m_s \sim 150$ МэВ сравнима с масштабом энергии сильных взаимодействий $\Lambda_{QCD} \sim 300$ МэВ, который определяет радиус действия ядерных сил и энергию связи кварков в адронах, вклад массы странного кварка в энергию связанного состояния, образованного кварками, становится заметным по сравнению с пренебрежимо малым вкладом масс легких u- и d-кварков, массы которых существенно меньше масштаба энергий сильных взаимодействий $m_{u,d} \sim 5$ МэВ $\ll 300$ МэВ. Например, для мезонов, образованных легкими кварком и антикварком и имеющих массу $M \sim 2\Lambda_{QCD}$, поправка за счет массы легких кварков находится на уровне $m_{u,d}/M \sim 5/600$, а различие в массах u- и d-кварков, которое составляет $m_d - m_u \sim 2$ МэВ, приводит к еще меньшим поправкам к массе мезона при замене одного легкого кварка другим. Для барионов, составленных из трех легких кварков с массой связанного состояния $M \sim 3\Lambda_{QCD} \sim 900$ МэВ, различие масс легких кварков становится еще менее значимым. Поэтому полагают, что адроны в рамках симметрии ароматов кварков группируются по своим массам согласно неприводимым представлениям группы симметрии ароматов кварков так, что базисные состояния одного и того же неприводимого представления и есть адроны, которые обладают одной и той же массой, В таком случае говорят, что эти базисные состояния неприводимого представления образуют мультиплет адронов, например, триплет мезонов или дублет барионов по изоспину в случае симметрии $\mathrm{SU_f}(2)$. Изоспиновые мультиплеты адронов могут иметь разные массы, что отвечает разным значениям группового инварианта Казимира по $\mathrm{SU_f}(2)$, который, как полагают, и определяет инвариантное относительно группы симметрии ароматов кварков значение масс базисных состояний мультиплета.

Расширение кваркового дублета легких кварков до триплета за счет добавления странного кварка означает, что массы адронов со странным кварком даже в рамках одного неприводимого представления будут отличаться от масс адронов с легкими кварками в том же мультиплете на величину порядка 150 МэВ, т. е. эффекты нарушения $\mathrm{SU_f}(3)$ существенно заметнее в различии масс адронов одного неприводимого представления, чем в случае изотопической симметрии. Тем не менее, обычно полагают, что базовые состояния мультиплета с точность до 150 МэВ обладают практически одинаковыми массами, т. е. масса базисных состояний одного неприводимого представления — это инвариант, а значит, масса состояний мультиплета — это функция собственных значений операторов Казимира для данного представления.

Такая инвариантность масс состояний мультиплета неприводимого представления группы относительно преобразований $\mathrm{SU_f}(3)$ трактуется как группа симметрии в спектроскопии многокварковых состояний, а именно, симметрия задает состав мультиплета, что явилось в свое время существенным достижением при классификации растущего числа вновь открытых мезонов, барионов, гиперонов, содержащих странные кварки, и позволило систематизировать «зоологию» адронов с помощью введения симметрии кварковых ароматов, а также понять, что отличие масс мультиплетов основано на принципе возбуждения связанных мультикварковых состояний. Равенство масс состояний в мультиплете является

приближенным. Поэтому и сама симметрия кварковых ароматов считается приближенной. Говорят, что она нарушена, но степень нарушения определяется поправками, которые считаются малыми, а именно, полагают, что поправки возникают при рассмотрении масс состояний мультиплета в выражениях, которые разлагаются в ряд по малому параметру $\kappa \sim \Delta M/M$, где M — масса состояний мультиплета, инвариантная относительно действия группы преобразования ароматов кварков, причем численно $M \gtrsim 1$ ГэВ, а $\Delta M \lesssim 100$ МэВ, т. е. $\kappa \lesssim 0.1$.

Пара традиционно используемых квантовых чисел, характеризующих базис фундаментального представления $\mathrm{SU_f}(3)$, как мы уже упоминали выше, — это проекция изоспина T_3 (горизонтальная ось на весовой диаграмме представления) и гиперзаряд Y, который связан с генератором подалгебры Картана[47] $\Gamma_8 = Y\sqrt{3}/2$ (вертикальная ось на весовой диаграмме представления). При этом, если изоспин позволяет различать друг от друга u- и d-кварки, гиперзаряд вводит в рассмотрение новое квантовое число — странность S:

$$Y = B + S, \tag{III.4.8}$$

где B — «барионный» заряд, который для кварков полагают равным $B = \frac{1}{3}$ так, чтобы барион, составленный из трех кварков имел барионный заряд, равный единице, а странность отлична от нуля только для странного кварка

$$\{u, d\} \mapsto S = 0, \qquad s \mapsto S = -1.$$

Поскольку в рамках группы $\mathrm{SU_f}(3)$ гиперзаряд Y с точностью до множителя представляет собой один из выбранных в рамках традиции генераторов подалгебры Картана $Y = 2\Gamma_8/\sqrt{3}$, странность с точностью до сдвига на барионное число также указывает на собственные значения этого же генератора подалгебры Картана, а ее значения за счет выбора множителя подобраны так, чтобы у странного кварка странность принимала целое значение -1.

Перепишем связь (III.4.8) в виде

$$S = \Gamma_8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - B, \tag{III.4.9}$$

а это значит, что странность с точностью до указанного в формуле (III.4.9) масштабного множителя — это оператор подалгебры Картана Γ_8 со смещением на B, которое одинаково для всех базисных состояний представления. Таким оообразом, изменение странности базисного состояния неприводимого представления показывает смещение расположения точки, которая соответствует весу базисного состояния на весовой диаграмме, по вертикальной оси, вдоль которой отложены собственные значения Γ_8, на значение, пропорциональное изменению странности. Для странного кварка

$$S = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = -1, \quad s\text{-кварк},$$

в то время как для u- и d-кварков

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = 0, \quad u\text{- и } d\text{-кварки}.$$

Барионное число в мультиплете неприводимого представления — это просто сумма барионных чисел кварков и антикварков, из которых построено многокварковое состояние. Заметим, что неприводимые представления $\mathfrak{su}(3)$ можно построить в виде тензорных произведений, где множителями являются фундаментальные представления этой алгебры, т. е. в виде произведения волновых функций кварков и антикварков, которые соответствуют двум фундаментальным представлениям группы ароматов легких кварков. Число кварков и антикварков определенного аромата, которое определяет, как говорят, валентный состав многокваркового состояния, фиксировано для заданного неприводимого представления, а значит, фиксировано и барионное число B для этого неприводимого представления группы симметрии. Поэтому изменение гиперзаряда у состояний мультиплета отвечает изменению числа странных кварков в «валентном» составе многокваркового мультиплета. Сам валентный состав базисных состояний определяется набором[48] фундаментальных представлений группы симметрии, тензорные произведения

[47] Изменять масштаб оси Y произвольным образом невозможно, так как это нарушит равенство простых корней корней в $\mathrm{SU_f}(3)$.

[48] Вместо словосочетания «валентный состав» можно употреблять просто слово состав в привычном смысловом наполнении, когда мы считаем протон, например, сложенным из трех кварков определенных ароматов. В современном понимании элементарных частиц, они суть наборы квантовых чисел, никаких других свойств у них нет, и только умножение гиперзаряда на множитель и разбиение его на барионный и странный заряды позволяет нам считать наборы квантовых чисел поштучно, т.е. складывая аддитивные характеристики барионного и странного зарядов кварков–конституентов. Однако наряду с зарядами к квантовым числам системы относятся также и импульсы движения кварков внутри протона, например. Поэтому наряду с «валентными» кварками, которые дают в сумме заряд и изоспин протона необходимо ввести «морские» кварки: морские кварки в сумме обладают нулевым зарядом и нулевым изоспином, но ненулевым распределе-

которых образуют неприводимое представление. Это значит, что у базисных состояний, расположенных по горизонтальной оси на весовой диаграмме[49], вдоль которой откладываются собственные значения проекции изоспина, т. е. у состояний с одним гиперзарядом меняется только проекция изоспина, а переход от состояний на одной горизонтальной линии к состояниям на другой горизонтальной линии, т. е. переход от состояний с одним гиперзарядом к состояниям с другим гиперзарядом должен сопровождаться изменением числа странных кварков. Это следует из того, что по осям ординат и абсцисс откладываются собственные значения гиперзаряда и проекции изоспина – двух генераторов подалгебры Картана.

Электрический заряд так же, как и в случае группы SU(2), выражается через гиперзаряд и изоспин

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3. \tag{III.4.10}$$

С точки зрения и логики изложения, и физики нам важно, что оператор, определяющий заряд, фиксирует некую линейную комбинацию генераторов подалгебры Картана, которая соответствует повороту в плоскости весов от ортогональных осей, отвечающих проекции изоспина и гиперзаряда, к другим ортогональным осям, одной из которых является ось отсчета электрического заряда, что определяет один из возможных вариантов выделения подгруппы SU(2) в SU(3). В самом деле, перепишем связь (III.4.10) в виде

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Gamma_8 + T_3, \tag{III.4.11}$$

что можно представить в виде ортогонального преобразования, т. е. поворота, если ввести угол подобного поворота θ так, чтобы ось проекции T-изоспина T_3 после поворота совпала с проекцией U-изоспина U_3 вдоль вектора $\boldsymbol{U}_+$, а электрический заряд Q откладывался вдоль оси $\tilde{\Gamma}$, которая ортогональна вектору $\boldsymbol{U}_+$ (см рис. 3.2 на стр. 137 и рис. 3.7 на стр. 184). Переход от квантовых чисел, которые задаются генераторами подалгебры Картана $\{\hat{T}_3, \hat{\Gamma}_8\}$, к квантовым числам операторов $\{\hat{U}_3, \tilde{\Gamma}\}$, осуществляется поворотом осей на весовой диаграмме так, что при

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \qquad \operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$$

получим

$$\begin{cases} \hat{U}_3 = +\cos\theta\cdot\hat{T}_3 + \sin\theta\cdot\hat{\Gamma}_8, \\ \tilde{\Gamma} \;\; = -\sin\theta\cdot\hat{T}_3 + \cos\theta\cdot\hat{\Gamma}_8 \equiv -\sin\theta\cdot\hat{Q}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{U}_3 \;\; = -\frac{1}{2}\cdot\hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\hat{\Gamma}_8, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\hat{Q} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\hat{T}_3 + \frac{1}{2}\,\hat{Y}\right). \end{cases} \tag{III.4.12}$$

Тогда

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sin\theta}(-\cos\theta\cdot\hat{\Gamma}_8 + \sin\theta\cdot\hat{T}_3) = -\operatorname{ctg}\theta\cdot\hat{\Gamma}_8 + \hat{T}_3 = \frac{1}{2}\,\hat{Y} + \hat{T}_3.$$

При этом выражение для собственных значений проекции U-изоспина U_3

$$\hat{U}_3 = \cos\theta\cdot\hat{T}_3 + \sin\theta\cdot\hat{\Gamma}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\hat{\Gamma}_8 - \frac{1}{2}\cdot\hat{T}_3 \tag{III.4.13}$$

находится в полном согласии с определением проекции U-изоспина, данным в (III.1.32).

В отличие от группы SU(2), в которой подалгебра Картана включала в себя единственный генератор — наблюдаемую величину проекции изоспина $\hat{T}_3$, а гиперзаряд и электрический заряд вводились как феноменологические величины, которые согласуются с экспериментом, в группе SU(3) гиперзаряд — это второй из генераторов подалгебры Картана в паре с изоспином $\hat{T}_3$, а электрический заряд также входит в пару генераторов подалгебры Картана вместе с проекцией U-изоспина при другом выборе генераторов подалгебры Картана. При этом связь электрического заряда с гиперзарядом и проекцией изоспина является прямым следствием перехода от одной пары генераторов подалгебры Картана к другой паре при повороте в плоскости собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана.

нием по импульсам внутри протона. Отсюда следует, что морские кварки никак не влияют на свойства преобразований состояний мультиплета относительно группы ароматов кварков, а валентные кварки как состояния без учета их импульсов называются конституентами, так как они определяют групповые свойства состояний мультиплетов. Саму модель мультиплетов адронов называют конституентной моделью.

[49] Напомним, что весовой называется диаграмма, на которой в пространстве, размерность которого равна рангу группы, в виде точек с координатами, равными весам базисных состояний неприводимого представления, обозначено расположение этих базисных состояний. Для группы SU(3) с рангом, равным двум, речь идет о плоскости, на которой точками отмечены состояния мультиплета.

Итак, в первом фундаментальном представлении веса базисных состояний на двумерной весовой диаграмме с координатами $\left(T_3, \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) \equiv \left(T_3, \Gamma_8\right)$ в точности соответствуют квантовым числам кварков:

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle &= \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right\} \quad \mapsto \quad T_3 = +\tfrac{1}{2}, \quad Y = +\tfrac{1}{3}; \quad Q = +\tfrac{2}{3}, \quad U_3 = 0, \quad \mapsto \quad u, \\
|\boldsymbol{\nu}_2\rangle &= \left\{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right\} \quad \mapsto \quad T_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad Y = +\tfrac{1}{3}; \quad Q = -\tfrac{1}{3}, \quad U_3 = +\tfrac{1}{2}, \quad \mapsto \quad d, \\
|\boldsymbol{\nu}_3\rangle &= \left\{0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right\} \quad \mapsto \quad T_3 = 0, \quad Y = -\tfrac{2}{3}; \quad Q = -\tfrac{1}{3}, \quad U_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad \mapsto \quad s.
\end{aligned} \tag{III.4.14}$$

У античастиц меняет знак каждый из зарядов: барионное число $B \to -B$, странность $S \to -S$, электрический заряд $Q \to -Q$ и проекция изоспина $T_3 \to -T_3$. Значит, переход от кварков к антикваркам отвечает отражению весов квантовых состояний относительно как оси абсцисс, так и оси ординат. Но при таком полном зеркальном отражении весов на весовой диаграмме, как видно из рис. 3.8, первое фундаментальное представление переходит во второе. Следовательно, базис второго фундаментального представления в точности отвечает антикваркам, в чем можно убедиться прямым сравнением квантовых чисел базисных векторов с их значениями для антикварков.

$$|\bar{\boldsymbol{\nu}}_3\rangle \mapsto \bar{u}, \quad |\bar{\boldsymbol{\nu}}_2\rangle \mapsto \bar{d}, \quad |\boldsymbol{\lambda}_2\rangle \mapsto \bar{s}.$$

4.3 Матрицы Гелл-Манна

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве первого фундаментального представления принято записывать в виде суперпозиции базисных

$$|\psi\rangle = v^{(1)}|u\rangle + v^{(2)}|d\rangle + v^{(3)}|s\rangle, \qquad |\psi\rangle \in V, \tag{III.4.15}$$

так что естественно ввести соответствующий контравариантный столбец v *с верхним индексом* F для обозначения ароматов кварков

$$|\psi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix} = v^{\mathrm{F}}, \qquad \mathrm{F} \in \left\{\overline{1,3}\right\}. \tag{III.4.16}$$

Говорят, что первое фундаментальное представление — это триплет **3** (по размерности базиса пространства неприводимого представления; эту размерность называют также мультиплетностью).

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве второго фундаментального представления записываются в виде суперпозиции базисных

$$|\bar{\psi}\rangle = \bar{v}_{(1)}|\bar{u}\rangle + \bar{v}_{(2)}|\bar{d}\rangle + \bar{v}_{(3)}|\bar{s}\rangle, \qquad |\bar{\psi}\rangle \in \bar{V}, \tag{III.4.17}$$

так что можно ввести соответствующий контравариантный столбец $\bar{v}$ для этого антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$ *с нижним индексом* с чертой $\bar{\mathrm{F}}$ для антикварков[50]

$$|\bar{\psi}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \bar{v}_{(1)} \\ \bar{v}_{(2)} \\ \bar{v}_{(3)} \end{pmatrix} = \bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}}, \qquad \bar{\mathrm{F}} \in \left\{\overline{1,3}\right\}. \tag{III.4.18}$$

Введение индексов позволяет говорить о тензорных обозначениях.

Для того, чтобы показать, как преобразуются при действии элементов группы SU(3) введенные векторы фундаментальных представлений v^{F} и $\bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}}$, необходимо построить матрицы генераторов преобразований в этих представлениях.

Воспользуемся общей формулой[51] (III.2.22) в случае состояния с невырожденным весом

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \tilde{\boldsymbol{\nu}})}|\tilde{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle = \mathbf{0}, \qquad 2\,\frac{(\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\} \tag{III.2.22$'$}$$

[50] Нижний индекс с чертой, как будет показано в этом разделе на стр. 198, эквивалентен нижнему ковариантному индексу без черты.

[51] Для пытливого читателя еще раз подчеркнем, что комплексные фазы коэффициентов в результате действия понижающих генераторов в соотношениях (III.2.22) были подобраны равными нулю, что возможно, так как эти фазы определяются, во-первых, свободой выбора комплексной фазы каждого базисного состояния представления, нормированного на единицу, во-вторых, свободой выбора общей комплексной фазы каждой повышающей или понижающей матрицы-генератора в представлении: эти переопределения фаз состояний и матриц являются независимыми (см. (II.3.19) и обсуждение в сноске к этой формуле). Поэтому в последующих формулах нормировочные множители при действии понижающих генераторов положительны.

для того, чтобы установить значения матричных элементов повышающих и понижающих операторов в фундаментальном представлении.

Для начала согласно (III.2.22′) для базисного состояния первого фундаментального представления

$$|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \mapsto |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1}|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = 0, \quad \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1}|u\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\lambda}_1)}|d\rangle, \qquad 2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)} = 1$$

устанавливаем, что для $\hat{T}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1}$

$$\langle d|\,\hat{T}_-|u\rangle = 1, \tag{III.4.19}$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 3.8):

$$\hat{T}_-|d\rangle = \hat{T}_-|s\rangle = \mathbf{0}.$$

Это значит, что 3×3-матрица $\hat{T}_-$

$$\hat{T}_- = \begin{pmatrix} T_{uu} & T_{ud} & T_{us} \\ T_{du} & T_{dd} & T_{ds} \\ T_{su} & T_{sd} & T_{ss} \end{pmatrix}$$

имеет только один отличный от нуля элемент $\langle d|\,\hat{T}_-|u\rangle$,

$$\hat{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.4.20}$$

Аналогично и согласно (III.2.22′) для

$$|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \mapsto |\boldsymbol{\nu}_2\rangle = |d\rangle, \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2}|\boldsymbol{\nu}_2\rangle = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_2}|d\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\nu}_2)}|s\rangle, \qquad 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)} = 1$$

устанавливаем, что матричный элемент оператора $\hat{U}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_2}$ равен

$$\langle s|\,\hat{U}_-|d\rangle = 1, \tag{III.4.21}$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 3.8):

$$\hat{U}_-|u\rangle = \hat{U}_-|s\rangle = \mathbf{0}.$$

Следовательно, 3×3-матрица $\hat{U}_-$ имеет только один отличный от нуля элемент $\langle s|\,\hat{U}_-|d\rangle$,

$$\hat{U}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.4.22}$$

И, наконец, согласно (III.2.22′) для

$$|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \mapsto |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}|u\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\lambda}_1)}|s\rangle.$$

Учтем, что

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)} = 1,$$

и найдем, что для $\hat{V}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}$

$$\langle s|\,\hat{V}_-|u\rangle = 1, \tag{III.4.23}$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 3.8):

$$\hat{V}_-|d\rangle = \hat{V}_-|s\rangle = \mathbf{0}.$$

В итоге, 3×3-матрица $\hat{V}_-$ имеет только один отличный от нуля элемент $\langle s|\,\hat{V}_-|u\rangle$,

$$\hat{V}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.4.24}$$

Элементы диагональных матриц T_3 и Γ_8 задаются соответствующими координатами весов как собственных значений собственных состояний базиса, в котором мы записываем элементы матриц подалгебры Картана, т. е., соответственно, x- и y-компонентами весов для состояний базиса представления.

Здесь уместно напомнить о том, как устроен стандартный набор генераторов в базисе Картана–Вейля (II.3.51), а также о связи корневых генераторов с эрмитово самосопряженными генераторами (см. формулу (II.3.32) и сноску 68 на стр. 103). По аналогии с метрикой Киллинга определим следовую матрицу в произвольном представлении. Следовой матрицей в произвольном представлении называется след произведения матриц генераторов в этом представлении. В частности, если представление присоединенное, то следовая матрица — это матрица метрики Киллинга (см. раздел **2.2 Метрика Киллинга и критерий Картана** в **§ 2. Представление группы Ли и генераторы** главы 2 на стр. 76). Элемент метрики Киллинга g_{ab} является частным случаем элемента следовой матрицы двух генераторов в представлении R, т. е. элемента тензора второго ранга

$$g^R_{ab} \equiv \operatorname{tr}\left(\Gamma_a \Gamma_b\right)_R.$$

В присоединенном представлении согласно (II.2.19) метрика Киллинга

$$g_{ab} = g^{\mathrm{ad}}_{ab} \equiv \operatorname{tr}\left(\Gamma_a \Gamma_b\right)_{\mathrm{ad}}$$

для набора генераторов, в котором все генераторы получены дифференцированием по параметрам группы и являются эрмитовыми в случае компактной группы Ли, имеет конформно евклидов вид

$$g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab} \qquad \text{где } \Omega^2 = C_A.$$

$C_A = N$ для SU(N), если мы положили длину простых положительных корней группы равной единице (см. описание алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$ в разделах **1.1** $\mathfrak{su}(2)$ и **1.3** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3, **§ 1. Алгебры** $\mathfrak{su}(2)$ **и** $\mathfrak{su}(3)$, соответственно). В то же время для генераторов подалгебры Картана фундаментального представления

$$g^F_{ab} = T_F \delta_{ab},$$

где индекс Дынкина (II.2.47) для группы SU(N) по общим формулам, которые получены **в задаче 25** на стр. 248, оказывается равным

$$T_F = \tfrac{1}{2}.$$

Для первого фундаментального представления определяют эрмитовы матрицы Гелл-Манна[52] λ_a

$$\tfrac{1}{2}\,\lambda_a \equiv \Gamma_a, \tag{III.4.25}$$

которые согласно (III.1.20) в матричных обозначениях равны

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = T_+ + T_-, \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}\,(T_+ - T_-),\\ &\lambda_4 = V_+ + V_-, \quad \lambda_5 = -\mathrm{i}\,(V_+ - V_-),\\ &\lambda_6 = U_+ + U_-, \quad \lambda_7 = -\mathrm{i}\,(U_+ - U_-),\\ &\lambda_3 = 2T_3, \qquad\quad \lambda_8 = 2\Gamma_8. \end{aligned} \tag{III.4.26}$$

Таким образом из (III.4.20), (III.4.22) и (III.4.24) с учетом того, что понижающие и повышающие операторы связаны эрмитовым сопряжением, и

$$\hat{T}_+ = \hat{T}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_+ = \hat{U}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_+ = \hat{V}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.4.27}$$

[52] Подчеркнем, что буквенное обозначение матриц Гелл-Манна является общепринятым. Пусть читателя не смущает, что та же буква λ используется для обозначения фундаментального вектора.

получаем[53]

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}. \tag{III.4.28}$$

Матрицы Гелл-Манна эрмитовы и имеют след, равный нулю, так что любая из эрмитово самосопряженных матриц 3×3 может быть представлена в виде суперпозиции единичной матрицы и восьми матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами. Заметим, что только бесследовые матрицы могут составлять набор генераторов алгебры Ли, так как сумма собственных значений каждого генератора равна нулю. Это значит, что в базисе из собственных векторов выбранного генератора его же матрица будет диагональной и бесследовой. Как и в любом другом базисе пространства состояний представления из-за того, что при унитарном преобразовании базиса след матрицы не меняется. Именно базис генераторов в форме матриц Гелл-Манна широко известен в физических приложениях группы $\mathrm{SU_f}(3)$. Коммутационные соотношения для матриц Гелл-Манна суть следствие их пропорциональности генераторам Γ_a:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2\mathrm{i}\, f_{abc} \lambda_c, \tag{III.4.29}$$

где f_{abc} — антисимметричные по перестановке любой пары индексов структурные константы алгебры $\mathfrak{su}(3)$, введенные в (III.1.22) (см. также обсуждение перед (III.1.22) и сноски на стр. 138, где указано, что общепринятое опускание верхнего индекса структурных констант проводится символом Кронекера $f_{abc} = f_{ab}^{c'} \delta_{c'c}$, что обусловлено конформно евклидовым видом метрики Киллинга у простой компактной группы Ли).

Поскольку групповые координаты вблизи произвольного элемента группы можно ввести переносом координатной сетки в окрестность единицы, дифференциал оператора преобразований $g(\boldsymbol{a})$ выражается через генераторы[54]

$$\mathrm{d}g(\boldsymbol{a}) = -\mathrm{i}(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) = -\tfrac{\mathrm{i}}{2} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}). \tag{III.4.30}$$

При интегрировании это дает вид конечного элемента группы как матрицы для первого фундаментального представления

$$g(\boldsymbol{a}) = \exp\Big\{ -\tfrac{\mathrm{i}}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a} \Big\}. \tag{III.4.31}$$

Так записывается групповое преобразование в экспоненциальной форме (см. обоснование формул (II.4.2)–(II.4.7) на стр. 107).

Свойства матриц g являются общими для любого представления $\mathrm{SU}(3)$: унитарность и унимодулярность,

$$g \cdot g^\dagger = \mathbb{1}, \qquad \det g = 1, \tag{III.4.32}$$

что следует из эрмитовости матриц Гелл-Манна и их бесследовости, соответственно.

Искомый закон преобразования кварковых состояний триплета **3** записывается в следующем виде:

$$v^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{a}) = \big\{ g(\boldsymbol{a}) \big\}^{\mathrm{F}}_{\bullet\, \mathrm{F}'}\, v^{\mathrm{F}'} = \Big\{ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a}} \Big\}^{\mathrm{F}}_{\bullet\, \mathrm{F}'}\, v^{\mathrm{F}'}, \tag{III.4.33}$$

где матрицы Гелл-Манна по построению имеют индексы $\{\lambda_a\}^{\mathrm{F}}_{\bullet\, \mathrm{F}'}$.

Как мы полагали при построении первого фундаментального представления группы $\mathrm{SU}(3)$ в (III.4.15) и (III.4.16), элементы v^{F} принадлежат контравекторному пространству V, которое преобразуется матрицами $g(\boldsymbol{a})$ (III.4.33), а это значит, что согласно общему принципу линейной алгебры ковекторы $\bar{w}_{\mathrm{F}}$

[53] Методом пристального взгляда читатель может увидеть в явном виде матриц $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ обобщение матриц Паули на пространство матриц 3×3.

[54] Заметим, что из определения (III.4.25) следует, что матрицы Гелл-Манна суть удвоенные эрмитовы генераторы алгебры Ли $\mathfrak{su}(3)$ при выбранном масштабе параметров группы. Отсюда и появляется множитель $\frac{1}{2}$ в равенстве (III.4.30).

как элементы сопряженного ковекторного пространства $W = \tilde{V}$ преобразуются обратными матрицами g^{-1}. Инвариант $\bar{w}_{\mathrm{F}} v^{\mathrm{F}}$ принято трактовать как матричное умножение строки $\bar{w}_{\mathrm{F}}$ на столбец v^{F}. В самом деле, строка сопряженного ковекторного пространства $\bar{w}_{\mathrm{F}}$ при групповых преобразованиях $g(\boldsymbol{a})$, когда для контрвектора $v^{\mathrm{F}} \mapsto v^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{a}) = \{g(\boldsymbol{a})\}^{\mathrm{F}}_{\bullet\,\mathrm{F}'} v^{\mathrm{F}'}$, умножается на обратную матрицу элемента группового преобразования, когда $\bar{w}_{\mathrm{F}} \mapsto \bar{w}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{a}) = \bar{w}_{\mathrm{F}'} \{g^{-1}(\boldsymbol{a})\}^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}$. В матричной записи элементов группы SU(3) имеет место равенство $g^{-1} = g^{\dagger}$. Отсюда следует, что эрмитово сопряженные элементы $v^{\dagger}$ принадлежат ковекторному пространству $W \ni \bar{w}$,

$$v^{\mathrm{F}} \;\mapsto\; \bar{w}_{\mathrm{F}} \cong (v^{\dagger})_{\mathrm{F}}, \qquad \bar{w}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{a}) = \bar{w}_{\mathrm{F}'} \big\{g^{-1}(\boldsymbol{a})\big\}^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}, \qquad \bar{w}(\boldsymbol{a}) \cdot v(\boldsymbol{a}) = \bar{w} \cdot v = \bar{w}_{\mathrm{F}}\, v^{\mathrm{F}} = \mathrm{inv}. \tag{III.4.34}$$

Как ковариантное пространство $W \ni \bar{w}$, дуальное контравариантному пространству V первого фундаментального представления v группы SU(3), может быть связано с пространством $\bar{V}$ второго фундаментального представления группы SU(3), введенного в (III.4.17) и (III.4.18)? Для ответа на этот вопрос необходимо установить вид матриц генераторов во втором фундаментальном представлении для того набора групповых координат, который был определен для первого фундаментального представления v, а значит, и для дуального ему ковариантного представления $\bar{w}$. Согласование групповых координат в разных представлениях одной и той же группы необходимо в физических приложениях, в которых инвариантные групповые структуры типа гамильтонианов, задающих энергию системы, строятся как тензорные произведения физических величин, записанных в терминах различных неприводимых представлений группы. Если не рассматривать такие инвариантные структуры, построенные из различных групповых мультиплетов, а ограничиться лишь одним из неприводимых представлений группы Ли, то в каждом изолированном представлении группы допустимо выбирать свои групповые координаты. Кроме того, можно вводить и зависящие от группового элемента фазы состояний неприводимого представления. При этом рассматривают не точные представления группы Ли, а проективные (см. **§ 3. Проективные представления группы Ли** Приложения).

Например, в группе SU(2) фундаментальное представление только одно, так как ранг группы равен единице. Вектор v этого фундаментального двумерного представления полагают контравариантным. Ковектор $\bar{w}$ принадлежит дуальному ковариантному пространству, так что $\bar{w} \cdot v$ задает инвариант. Дуальное к $V \ni v$ ковариантное представление $W \ni \bar{w}$ является эквивалентным представлению V. Эта эквивалентность, как это было показано в разделе **4.1 Спинорная метрика**, **§ 4. Спин $s = 1/2$** главы 1, устанавливается с помощью спинорной метрики $\hat{\epsilon}$ как матрицы размером 2×2:

$$\text{при } {}_{\mathrm{F},\,\mathrm{F}'} \in \{\overline{1,2}\} \quad \bar{w}_{\mathrm{F}} \cong \epsilon_{\mathrm{F}\mathrm{F}'}\, v^{\mathrm{F}'} \;\Rightarrow\; \bar{w}_{\mathrm{F}}\, \epsilon^{\mathrm{F}\mathrm{F}'} \cong v^{\mathrm{F}'}, \qquad \begin{array}{l}\text{в терминах матричного}\\ \text{умножения группы SU(2)}\end{array} \qquad (\bar{w} \cdot \hat{\epsilon}) \cong v. \tag{III.4.35}$$

В случае группы SU(3) подобной эквивалентности нет, но мы установим, что триплетному пространству v с верхними контравариантными индексами оказывается дуальным ковариантное пространство $\bar{v}$ с нижними ковариантными индексами с чертой, введенное в (III.4.17) и (III.4.18) и эквивалентное ковариантному пространству $\bar{w} \cong v^{\dagger}$ с нижними ковариантными индексами без черты. Поэтому групповым инвариантом является величина

$$\bar{v}(\boldsymbol{a}) \cdot v(\boldsymbol{a}) = \bar{v} \cdot v = \bar{v}_{\mathrm{F}}\, v^{\mathrm{F}} = \mathrm{inv}. \tag{III.4.36}$$

Это значит, что антитриплет $\bar{\mathbf{3}}$ второго фундаментального представления в группе SU(3) можно рассматривать как ковариантный или дуально сопряженный триплету $\mathbf{3}$, введенному в качестве первого фундаментального контравариантного представления в группе SU(3).

Задача 33. Повторите схему, которая была использована при выводе матриц Гелл-Манна λ_a: постройте аналогичные матрицы $\bar{\lambda}_a$ для второго фундаментального представления антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$:

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda_a^{*}.$$

Решение. Группа SU(3) содержит в себе подгруппы SU(2) — это группы T, U и V-изоспина, в каждой из которых определены тройки генераторов — генератор подалгебры Картана, один повышающий оператор и эрмитово сопряженный к повышающему понижающий оператор. Эти тройки для каждого из изоспинов —

$$(T_3, T_+, T_-), \quad (U_3, U_+, U_-), \quad (V_3, V_+, V_-).$$

Действие этих операторов на состояния первого фундаментального представления было определено нами при при построении этого представления и согласовано с действием повышающих и понижающих операторов в подгруппах T, U и V-изоспина:

$$T_-|u\rangle = |d\rangle, \quad V_-|u\rangle = |s\rangle, \quad U_-|d\rangle = |s\rangle$$

в точном соответствии с весовой диаграммой на рис. 3.8. Действие этих операторов на состояния антитриплета для состояний, которые называют античастицами, можно получить, зная, что в подгруппе SU(2) для античастиц определен зарядово сопряженный спинор

$$\bar{\psi} = -\hat{\epsilon}\,\psi^*,$$

причем зарядово сопряженный спинор $\bar{\psi}$ при действии группы SU(2) преобразуется так же, как и спинор ψ (см. **§ 4. Спин $s = 1/2$** главы 1):

$$\psi' = g \cdot \psi, \qquad \bar{\psi}' = g \cdot \bar{\psi}, \qquad g \in \mathrm{SU}(2).$$

Поэтому, если рассматривать T-изоспин и

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix},$$

из

$$T_-|u\rangle = |d\rangle$$

в силу идентичности групповых преобразований для спинора и сопряженного спинора следует, что для верхних и нижних компонент сопряженного изоспинора имеет место такое же соотношение

$$T_-\big(-|\bar{d}\rangle\big) = |\bar{u}\rangle \quad \Rightarrow \quad T_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle.$$

Отсюда сразу следует, что для антитриплета

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix},$$

в котором $\bar{s}$ отвечает компоненте с нулевым T-изоспином

$$T_-|\bar{s}\rangle = 0,$$

матрица T_- имеет вид

$$\hat{T}_- = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{T}_+ = \hat{T}_-^\dagger = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, во втором фундаментальном представлении группы SU(3) матрицы

$$\bar{\lambda}_1 = T_+ + T_- = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda_1 = -\lambda_1^*$$

и

$$\bar{\lambda}_2 = -\mathrm{i}(T_+ - T_-) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 = -\lambda_2^*.$$

Аналогично дублет

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}$$

является спинором по V-изоспину, так что зарядовосопряженный спинор в этой подгрупе SU(2) — это

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} -\bar{s} \\ \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Тогда из

$$V_-|u\rangle = |s\rangle$$

в силу идентичности групповых преобразований для спинора и сопряженного спинора следует, что для верхних и нижних компонент сопряженного изоспинора имеет место такое же соотношение

$$V_-\big(-|\bar{s}\rangle\big) = |\bar{u}\rangle \quad \Rightarrow \quad V_-|\bar{s}\rangle = -|\bar{u}\rangle.$$

В подгруппе V-изоспина состояние d является синглетным. Поэтому для антитриплета

$$\hat{V}_- = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_+ = \hat{V}_-^\dagger = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, во втором фундаментальном представлении группы SU(3) матрицы

$$\bar\lambda_4 = V_+ + V_- = -\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = -\lambda_4 = -\lambda_4^*$$

и

$$\bar\lambda_5 = -\mathrm{i}(V_+ - V_-) = \begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix} = \lambda_5 = -\lambda_5^*.$$

Ясно, что и в подгруппе U-изоспина получаются аналогичные соотношения

$$U_-|d\rangle = |s\rangle.$$

В силу идентичности групповых преобразований для спинора и сопряженного спинора следует, что для верхних и нижних компонент сопряженного изоспинора имеет место такое же соотношение

$$U_-\big(-|\bar s\rangle\big) = |\bar d\rangle \quad \Rightarrow \quad U_-|\bar s\rangle = -|\bar d\rangle.$$

В подгруппе U-изоспина состояние u является синглетным. Поэтому для антитриплета

$$\hat U_- = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat U_+ = \hat U_-^\dagger = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Значит, во втором фундаментальном представлении группы SU(3) матрицы

$$\bar\lambda_6 = U_+ + U_- = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = -\lambda_6 = -\lambda_6^*$$

и

$$\bar\lambda_7 = -\mathrm{i}(U_+ - U_-) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} = \lambda_7 = -\lambda_7^*.$$

Для диагональных вещественных матриц $\bar\lambda_3$ и $\bar\lambda_8$ связь $\bar\lambda_a = -\lambda_a^*$ является следствием перехода от частиц в триплете к античастицам в антитриплете, поскольку на диагонали стоят вещественные значения соответствующих зарядов генераторов подалгебры Картана. В итоге, матрицы генераторов второго фундаментального представления группы SU(3) построены.

■ Рассмотрим вопрос о **знаках квадратных корней $\boldsymbol\zeta$** в соотношениях с действием понижающих генераторов на состояние старшего веса в формуле (III.2.22),

$$\Gamma_{-\boldsymbol\alpha_m}|\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a}\rangle = \zeta_m\cdot\sqrt{(\boldsymbol\alpha_m,\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a})}|\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a}-\boldsymbol\alpha_m,a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol\alpha_m}|\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a}\rangle = \mathbf{0}, \qquad 2\,\frac{(\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a},\boldsymbol\alpha_m)}{(\boldsymbol\alpha_m,\boldsymbol\alpha_m)} = \tilde p_{m,a}\in\{0,\mathbb{N}\},$$

когда $\tilde{\boldsymbol\nu}_{m,a}\mapsto\boldsymbol\mu_S$. Разберем случай, когда происходит понижение состояния старшего веса понижающим корневым генератором простого положительного корня $\boldsymbol\alpha_m$ или $\boldsymbol\alpha_{m'}$

$$\Gamma_{-\boldsymbol\alpha_m}|\boldsymbol\mu_S\rangle = \zeta_m\cdot\sqrt{(\boldsymbol\alpha_m,\boldsymbol\mu_S)}|\boldsymbol\mu_S-\boldsymbol\alpha_m\rangle, \qquad \Gamma_{-\boldsymbol\alpha_{m'}}|\boldsymbol\mu_S\rangle = \zeta_{m'}\cdot\sqrt{(\boldsymbol\alpha_{m'},\boldsymbol\mu_S)}|\boldsymbol\mu_S-\boldsymbol\alpha_{m'}\rangle,$$

где для каждого из простых корней введен свой множитель ζ_m или $\zeta_{m'}$ так, чтобы он был бы вещественным за счет произвола в определении фаз состояний и генераторов (по поводу выбора фаз см. Приложение, **§ 3. Проективные представления группы Ли**). Задание знака ограничено единственным требованием: матрицы генераторов в неприводимом представлении обязаны удовлетворять коммутационным соотношениям алгебры генераторов Ли, которые не зависят от представления и являются одними и теми же для всех представлений, причем в базисе Картана–Вейля все коэффициенты $N_{\alpha,\beta}$, которые возникают в результате вычисления коммутатора корневых генераторов являются вещественными, а их знак задается выбором упорядочивания простых положительных корней. Так как разность двух различных простых положительных корней не является корнем, имеет место перестановочность генераторов

$$\Gamma_{\boldsymbol\alpha_{m'}}\cdot\Gamma_{-\boldsymbol\alpha_m} = \Gamma_{-\boldsymbol\alpha_m}\cdot\Gamma_{\boldsymbol\alpha_{m'}} \ \text{ и } \ \Gamma_{\boldsymbol\alpha_m}\cdot\Gamma_{-\boldsymbol\alpha_{m'}} = \Gamma_{-\boldsymbol\alpha_{m'}}\cdot\Gamma_{\boldsymbol\alpha_m}. \tag{III.4.37}$$

Действие повышающего генератора на состояние старшего веса дает нуль. Следовательно,

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} \cdot \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0,$$

и

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0.$$

Это значит, что действие любого другого повышающего генератора дает нуль для состояния, полученного при понижении состояния старшего веса, выбранным понижающим генератором простого положительного корня, т. е.

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_{m'}} |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle = 0 \;\text{ и аналогично }\; \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_{m'}\rangle = 0.$$

Следовательно, для этих пониженных состояний вдоль каждого из корней можно провести процедуру понижения корневым генератором другого простого положительного корня, так что, например,

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}} \cdot \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}} \zeta_m \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\mu}_S)} |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m\rangle =$$
$$= \zeta_m \zeta_{m'} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\mu}_S)} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m)} |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{m'}\rangle. \quad \text{(III.4.38)}$$

Здесь важно отметить, что старший вес — это сумма нескольких фундаментальных векторов с натуральными коэффициентами. Поэтому скалярное произведение простого положительного корня и старшего веса всегда неотрицательно, а скалярное произведение двух простых положительных корней, напомним, всегда неположительно, так что под знаками корней стоят неотрицательные числа.

Тогда с учетом стандартного коммутатора

$$[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}] = N_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}, -\boldsymbol{\alpha}_m} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{m'}}$$

найдем, что

$$[\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}}, \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}] |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = N_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}, -\boldsymbol{\alpha}_m} \Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{m'}} |\boldsymbol{\mu}_S\rangle \quad \Rightarrow$$
$$\zeta_m \zeta_{m'} \Big(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\mu}_S)} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m)} - \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\mu}_S)} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_{m'})} \Big) |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{m'}\rangle =$$
$$= N_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}, -\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \zeta_{mm'} \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\mu}_S)} |\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_{m'}\rangle. \quad \text{(III.4.39)}$$

Если эта формула является содержательной, т. е. ее левая и правая части отличны от нуля, то это приводит к связи знаковых множителей ζ.

Например, пусть старший вес равен фундаментальному вектору с номером m,

$$\boldsymbol{\mu}_S \mapsto \boldsymbol{\lambda}_m.$$

Тогда при $m' \neq m$

$$(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\lambda}_m) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m), \quad (\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\lambda}_m) = 0,$$

откуда

$$\zeta_m \zeta_{m'} \cdot \sqrt{-(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'})} = N_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}, -\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \zeta_{mm'}.$$

Но

$$N_{-\boldsymbol{\alpha}_{m'}, -\boldsymbol{\alpha}_m} = N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}},$$

а

$$N^2_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}} = -(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}).$$

Знак коэффициента $N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}}$ может быть выбран так, чтобы он был положительным, если установлен порядок следования номеров простых положительных корней, и при $m < m'$ коэффициент $N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}} = +\sqrt{-(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'})}$. В этом случае

$$\zeta_m \zeta_{m'} = \zeta_{mm'}. \quad \text{(III.4.40)}$$

Если же $m > m'$, то $N_{\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'}} = -\sqrt{-(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m'})}$, и тогда

$$\zeta_m \zeta_{m'} = -\zeta_{mm'}. \quad \text{(III.4.41)}$$

Кажущегося противоречия между двумя последними формулами не существует в силу отсутствия симметрии перестановки m и m' из-за того, что номер m задает как номер простого положительного корня, так и номер фундаментального вектора у состояния старшего веса, т.е. номер фундаментального представления, в отличие от номера m'. Последний просто указывает на какой-то другой корень при условии существования составного корня, равного сумме простых положительных корней с номерами m и m'. Этого общего правила для двух представлений оказывается достаточно для сопряжения двух фундаментальных представлений SU(3). Такие связи важны для решения физической задачи построения инвариантов из нескольких различных фундаментальных представлений. В этом вопросе мы придерживаемся исторической традиции.

Действие понижающих генераторов на состояние старшего веса без ограничения общности при рассмотрении точных представлений можно выбрать так, чтобы знаковые множители были одними и теми же для разных понижающих генераторов: $\zeta_m = \zeta_{m'} = \zeta_{mm'}$ (см. **§ 3. Проективные представления группы Ли** Приложения, в котором описаны проективные представления и введено условие тривиальности фаз генераторов, когда все фазы принимают одно и то же значение: либо 0, либо π при действии всех корневых генераторов группы на пространстве неприводимого представления). При этом само значение знакового множителя $\zeta = \pm 1$ должно быть согласовано с определенным порядком нумерации простых положительных корней, так как эта нумерация задает и знаки структурных констант в алгебре Ли в терминах базиса Картана–Вейля.

В отношении базисных состояний представления, отличных от состояния старшего веса, выбор знакового множителя при действии понижающего генератора является производным выбранных значений ζ, которые были заданы прежде для состояния старшего веса.

В случае первого и второго фундаментальных представлений группы SU(3) знак множителя ζ необходимо согласовать с уже сделанным выбором порядка нумерации фундаментальных векторов. Старший вес $\boldsymbol{\lambda}_1$ и корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_1$ образуют пару, для которой мы уже установили значение $\zeta = +1$ при действии понижающих корневых генераторов на состояния первого фундаментального представления с состоянием старшего веса $|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle$ (случай (III.4.40)). Отсюда следует, что для пары $\boldsymbol{\lambda}_2$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ множитель ζ должен иметь другой знак (случай (III.4.41)), т.е. $\zeta = -1$ при действии понижающих корневых генераторов на состояния фундаментального представления с состоянием старшего веса $|\boldsymbol{\lambda}_2\rangle$. ■

Вид генераторов преобразований для антикварков

$$\bar{\Gamma}_a \mapsto -\tfrac{1}{2}\,\lambda_a^* \tag{III.4.42}$$

означает, что антикварки фундаментального представления $\bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}}$ преобразуются комплексно сопряженными матрицами

$$g^*(\boldsymbol{a}) = \exp\Big\{\frac{\mathrm{i}}{2}\,\boldsymbol{\lambda}^*\cdot\boldsymbol{a}\Big\}, \qquad \bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{a}) = \big\{g^*(\boldsymbol{a})\big\}^{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}'}_{\bar{\mathrm{F}}}\,\bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}'}. \tag{III.4.43}$$

Последнюю формулу можно переписать, используя транспонированную матрицу,

$$\big\{g^*(\boldsymbol{a})\big\}^{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}'}_{\bar{\mathrm{F}}} = \big\{\{g^*(\boldsymbol{a})\}^{\mathrm{T}}\big\}^{\bar{\mathrm{F}}'}_{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}} \equiv \big\{g^\dagger(\boldsymbol{a})\big\}^{\bar{\mathrm{F}}'}_{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}},$$

так что

$$\bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{a}) = \bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}'}\big\{g^\dagger(\boldsymbol{a})\big\}^{\bar{\mathrm{F}}'}_{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}} = \bar{v}_{\bar{\mathrm{F}}'}\big\{g^{-1}(\boldsymbol{a})\big\}^{\bar{\mathrm{F}}'}_{\bullet\,\bar{\mathrm{F}}}, \tag{III.4.44}$$

что совпадает с законом преобразования ковекторного триплета $\bar{w}$ в (III.4.34). Следовательно, инвариантные состояния, выраженные в терминах кварк-антикварковых состояний, с учетом группового преобразования

$$v \overset{g(\boldsymbol{a})}{\longmapsto} v(\boldsymbol{a}), \qquad \bar{v} \overset{g^\dagger(\boldsymbol{a})}{\longmapsto} \bar{v}(\boldsymbol{a})$$

имеют вид

$$\bar{v}\cdot v = \bar{v}(\boldsymbol{a})\cdot v(\boldsymbol{a}) \equiv \bar{v}_{\mathrm{F}}\,v^{\mathrm{F}} = \mathrm{inv}. \tag{III.4.45}$$

В этих выражениях компоненты v^{F} трактуются как состояния триплета

$$v^{(1)} \equiv |u\rangle, \quad v^{(2)} \equiv |d\rangle, \quad v^{(3)} \equiv |s\rangle,$$

а $\bar{v}_{\mathrm{F}}$ как состояния антитриплета

$$\bar{v}_1 \equiv \langle\bar{u}|, \quad \bar{v}_2 \equiv \langle\bar{d}|, \quad \bar{v}_3 \equiv \langle\bar{s}|.$$

Итак, мы установили законы групповых преобразований для двух фундаментальных представлений SU(3), триплета **3** и антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$. По этим законам из состояний этих представлений можно построить билинейный, т. е. линейный по триплету и линейный по антитриплету инвариант. Подобные билинейные выражения в рамках физической традиции называют композитными полями, а в общем случае композитные поля — это тензорные произведения состояний различных неприводимых представлений группы. В частности, лагранжианы — это инвариантные композитные поля, которые задают инвариантные относительно действия группы физические системы.

• Свойства матриц Гелл-Манна

Поскольку метрика Киллинга пропорциональна евклидовой, а результаты вычисления следа произведения генераторов в разных представлениях пропорциональны друг другу (см. **задачу 20** на стр. 86 в разделе **2.3 Операторы Казимира** о введении инвариантов Казимира в **§ 2. Представление группы Ли и генераторы** главы 2), то

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_a\Gamma_b)_R = T_R\delta_{ab},$$

и в частности, в фундаментальном —

$$\mathrm{tr}\,(\Gamma_a\Gamma_b)_F = T_F\delta_{ab}. \tag{III.4.46}$$

В наших построениях, например,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,(\hat{T}_+\hat{T}_-)_F = \langle u|\,\hat{T}_+\hat{T}_-|u\rangle = \langle u|\,\hat{T}_+|d\rangle\,\langle d|\,\hat{T}_-|u\rangle = 1,\\
&\mathrm{tr}\,(\hat{T}_-\hat{T}_+)_F = \langle d|\,\hat{T}_-\hat{T}_+|d\rangle = \langle d|\,\hat{T}_-|u\rangle\,\langle u|\,\hat{T}_+|d\rangle = 1 \quad \Rightarrow\\
&\mathrm{tr}\,(\Gamma_1\Gamma_1)_F \;= \frac{1}{2^2}\,\mathrm{tr}\,\Big\{(\hat{T}_+ + \hat{T}_-)(\hat{T}_+ + \hat{T}_-)\Big\}_F = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$T_F = \tfrac{1}{2}, \tag{III.4.47}$$

откуда согласно определению индекса Дынкина через след произведения генераторов Γ_a (III.4.46) и пропорциональности генераторов Γ_a матрицам Гелл-Манна λ_a (см. (III.4.25)) в фундаментальном представлении получим

$$\mathrm{tr}\,(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}. \tag{III.4.48}$$

Квадратичный оператор Казимира — инвариант

$$\Gamma_a\Gamma_a = \tfrac{1}{4}\,\lambda_a\lambda_a = C_F\cdot\mathbb{1}, \tag{III.4.49}$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу групповых параметров $a \in \overline{\{1,8\}}$. По построению

$$\tfrac{1}{4}\lambda_a\lambda_a = T_3^2 + \Gamma_8^2 + \tfrac{1}{2}(\hat{T}_+\hat{T}_- + \hat{T}_-\hat{T}_+ + \hat{U}_+\hat{U}_- + \hat{U}_-\hat{U}_+ + \hat{V}_+\hat{V}_- + \hat{V}_-\hat{V}_+).$$

Подействовав оператором Казимира на состояние старшего веса $|u\rangle$ найдем собственное значение. Тогда

$$C_F = \tfrac{4}{3}. \tag{III.4.50}$$

Раскроем произведение матриц Гелл-Манна через коммутатор и антикоммутатор,

$$\lambda_a\lambda_b = \tfrac{1}{2}(\lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_a) + \tfrac{1}{2}(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a) = \mathrm{i}f_{abc}\lambda_c + \tfrac{1}{2}\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a - \tfrac{1}{4}\,\delta_{ab}\,\lambda_c\lambda_c\big) + \tfrac{1}{8}\delta_{ab}\,\lambda_c\lambda_c.$$

В этом выражении мы выделили бесследовый по свертке индексов a и b вклад. С учетом значения квадратичного оператора Казимира (III.4.49) запишем

$$\lambda_a\lambda_b = \tfrac{1}{2}\,C_F\delta_{ab}\mathbb{1} + \mathrm{i}f_{abc}\lambda_c + \tfrac{1}{2}\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a - C_F\delta_{ab}\mathbb{1}\big).$$

Последний вклад

$$u_{ab} = \tfrac{1}{2}\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a - C_F\delta_{ab}\mathbb{1}\big) \quad \text{такой, что } \delta^{ab}u_{ab} = 0,$$

является эрмитовой 3×3-матрицей, у которой след равен нулю,

$$\mathrm{tr}\,\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a - C_F\delta_{ab}\mathbb{1}\big) = 2\delta_{ab} + 2\delta_{ab} - C_F 3\delta_{ab} = 0,$$

а значит, эрмитову бесследовую 3×3-матрицу u_{ab} можно разложить по базису матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами (см. **задачу 34** ниже на стр. 200)

$$u_{ab} = d_{abc}\lambda_c, \qquad \delta^{ab}u_{ab} = \delta^{ab}d_{abc}\lambda_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^{ab}d_{abc} = 0,$$

так что

$$\lambda_a\lambda_b = \tfrac{1}{2}\,C_F\,\delta_{ab}\mathbb{1} + \mathrm{i}\,f_{abc}\lambda_c + d_{abc}\lambda_c. \tag{III.4.51}$$

Коэффициенты d_{abc} можно записать в виде формулы, исходя из тождества

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(u_{ab}\lambda_{c'}) = d_{abc}\mathrm{tr}\,(\lambda_c\lambda_{c'}) \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Big(\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a - C_F\delta_{ab}\mathbb{1}\big)\lambda_{c'}\Big) = d_{abc}\mathrm{tr}\,(\lambda_c\lambda_{c'}) \quad \Rightarrow\\
\Rightarrow \quad &\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Big(\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a\big)\lambda_{c'}\Big) - C_F\delta_{ab}\mathrm{tr}\,\big(\lambda_{c'}\big) = d_{abc}2\,\delta_{cc'} \quad \Rightarrow\\
\Rightarrow \quad &\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Big(\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a\big)\lambda_{c'}\Big) = d_{abc}2\,\delta_{cc'}, \quad \text{так как } \mathrm{tr}\,\big(\lambda_{c'}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Мы учли, что след матриц Гелл-Манна равен нулю. Таким образом

$$d_{abc} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(\{\lambda_a,\lambda_b\}\lambda_c), \qquad \text{где } \{\lambda_a,\lambda_b\} \equiv \lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a. \tag{III.4.52}$$

Проверим, что верно равенство $\delta_{ab}d_{abc} = 0$, как это должно следовать из данного нами определения для бесследового тензора u_{ab}, связанного с d-символами по формуле $u_{ab} = d_{abc}\lambda_c$:

$$\delta_{ab}d_{abc} = \delta_{ab}\tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(\{\lambda_a,\lambda_b\}\lambda_c) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(2\lambda_a\lambda_a\lambda_c) = 2C_F\mathrm{tr}\,(\lambda_c) = 0.$$

При этом символы d_{abc} являются симметричными по всем индексам, так как перестановка индексов b и c в формуле (III.4.52) также приводит к симметричному выражению, если воспользоваться свойством следа и переставить последнюю матрицу в произведении на первое место или первую на последнее:

$$\mathrm{tr}\,(\{\lambda_a,\lambda_b\}\lambda_c) = \mathrm{tr}\,\big(\big(\lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a\big)\lambda_c\big) = \mathrm{tr}\,(\lambda_c\lambda_a\lambda_b + \lambda_a\lambda_c\lambda_b) = \mathrm{tr}\,(\{\lambda_a,\lambda_c\}\lambda_b).$$

Следовательно, симметричность имеет место и при перестановке индексов a и c.

После вычисления всех возможных вариантов следа трех матриц неравные нулю значения d-символа оказываются равными величинам

$$\begin{aligned}
&d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \tfrac{1}{\sqrt{3}},\\
&d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\tfrac{1}{2\sqrt{3}},\\
&d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{337} = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{III.4.53}$$

Из определения этих величин в виде следа произведения трех генераторов, симметризованного по индексам групповых параметров, ясно, что они задают следовую матрицу в фундаментальном представлении, которая является симметричным тензором третьего ранга относительно обратимых преобразований в касательном пространстве групповой единицы. Такие следовые матрицы, вычисленные в различных неприводимых представлениях пропорциональны друг другу, как это было показано нами в **задаче 20** на стр. 86 в разделе **2.3 Операторы Казимира** о введении инвариантов Казимира в **§ 2. Представление группы Ли и генераторы** главы 2. Следовые тензоры ранга k в присоединенном представлении согласно (II.2.39) задают операторы Казимира как полиномы степени k по формуле (II.2.40) на стр. 84. В частности, кубический оператор Казимира определен в общем виде через симметричный тензор ранга 3 в виде следа симметризованного произведения генераторов в присоединенном представлении, но переход к следу в фундаментальном представлении для генераторов сказывается только на числовом множителе пропорциональности следов в разных представлениях и не является существенным в плане инвариантности оператора относительно групповых преобразований. Поэтому введенный нами симметричный бесследовый тензор третьего ранга используют для определения кубического инварианта Казимира в группе SU(3):

$$C_3 = d_{abc}\,\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c.$$

Напомним, что для идентификации произвольного представления нет необходимости каждый раз вычислять квадратичный и кубический операторы Казимира, которые однозначно характеризуют неприводимое представление $\mathfrak{su}(3)$, достаточно указать координаты старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов, т. е. задать старший вес представления.

Задача 34. Докажите тождество Фирца, которое используется в вычислительных задачах с матрицами Гелл-Манна,

$$(\lambda_a)^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}_2}(\lambda_a)^{\mathrm{F}_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_4} = 2\delta^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_4}\delta^{\mathrm{F}_3}_{\mathrm{F}_2} - \tfrac{2}{3}\,\delta^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_2}\delta^{\mathrm{F}_3}_{\mathrm{F}_4}. \tag{III.4.54}$$

Решение. Любую эрмитово самосопряженную матрицу Λ размером 3×3 можно представить в виде суммы единичной матрицы и матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами,

$$\Lambda = F_0\mathbb{1} + F_a\lambda_a, \qquad F_0, F_a \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты разложения находятся при взятии следа произведения матриц,

$$\mathrm{tr}\,\Lambda = 3F_0, \qquad \mathrm{tr}\,(\lambda_b\Lambda) = F_a 2\delta_{ab},$$

а значит,

$$\Lambda = \sum_{B=0}^{8}\Delta_B\lambda_B\,\mathrm{tr}\,(\lambda_B\Lambda), \qquad \text{где } \lambda_0 = \mathbb{1}, \quad \Delta_0 = \tfrac{1}{3}, \quad \Delta_a = \tfrac{1}{2},\ a \in \overline{\{1,8\}}.$$

Это разложение в матричных индексах имеет вид

$$\Lambda^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}_2} = \sum_{B=0}^{8}\Delta_B\big(\lambda_B\big)^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}_2}\big(\lambda_B\big)^{\mathrm{F}_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_4}\Lambda^{\mathrm{F}_4}_{\bullet\,\mathrm{F}_3}$$

и верно, если

$$\sum_{B=0}^{8} \Delta_B \left(\lambda_B\right)^{\mathrm{F}1}_{\bullet\,\mathrm{F}2} \left(\lambda_B\right)^{\mathrm{F}3}_{\bullet\,\mathrm{F}4} = \delta^{\mathrm{F}1}_{\bullet\,\mathrm{F}4}\delta^{\mathrm{F}3}_{\bullet\,\mathrm{F}2}.$$

Раскрывая сумму через единичные матрицы и матрицы Гелл-Манна, получим

$$\frac{1}{3}\,\delta^{\mathrm{F}1}_{\bullet\,\mathrm{F}2}\,\delta^{\mathrm{F}3}_{\bullet\,\mathrm{F}4} + \frac{1}{2}\left(\lambda_a\right)^{\mathrm{F}1}_{\bullet\,\mathrm{F}2}\left(\lambda_a\right)^{\mathrm{F}3}_{\bullet\,\mathrm{F}4} = \delta^{\mathrm{F}1}_{\bullet\,\mathrm{F}4}\delta^{\mathrm{F}3}_{\bullet\,\mathrm{F}2},$$

и тождество Фирца доказано.

Задача 35. Покажите, что в группе SU(n+1) веса базисных состояний первого фундаментального представления задаются векторами $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\mu}_S$, $\boldsymbol{\nu}_{k+1} = \boldsymbol{\nu}_k - \boldsymbol{\alpha}_k$, где $k = \overline{1,n}$, а старшие веса фундаментальных представлений равны

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1,\\
&\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 = 2\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \sum_{m=1}^{k+1} \boldsymbol{\nu}_m = (k+1)\boldsymbol{\lambda}_1 - k\,\boldsymbol{\alpha}_1 - (k-1)\boldsymbol{\alpha}_2 - \ldots - \boldsymbol{\alpha}_k, \quad k = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Используйте значения скалярных произведений корневых векторов группы и определение фундаментальных векторов. Убедитесь, что «гипотетический» фундаментальный вектор $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ тождественно равен нулю.

Задача 36. Докажите, что в группе SU(n+1) состояния

$$|f_k\rangle = |\boldsymbol{\nu}_1\rangle \wedge |\boldsymbol{\nu}_2\rangle \wedge \ldots \wedge |\boldsymbol{\nu}_k\rangle, \quad k = \overline{2,n},$$

с $\boldsymbol{\nu}_k$ из предыдущей задачи являются состояниями старшего веса, т. е. для всех повышающих генераторов $\Gamma_+ = \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$

$$\Gamma_+|f_k\rangle = 0.$$

Поэтому построенные состояния старшего веса $|f_k\rangle$ совпадают с состояниями старшего веса фундаментальных представлений $|\boldsymbol{\lambda}_k\rangle$.

4.4 Представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$

Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{su}(3)$ однозначно задается парой целых неотрицательных чисел — координатами веса старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$

$$\boldsymbol{\mu}_S = p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2, \tag{III.4.55}$$

так что в декартовых координатах на плоскости $\{T_3, \Gamma_8\}$ фундаментальные векторы (III.4.1) дают

$$\boldsymbol{\mu}_S = \left(\tfrac{p_1}{2}, \tfrac{p_1+2p_2}{2\sqrt{3}}\right). \tag{III.4.56}$$

Числа p_1 и p_2 указывают максимальное количество шагов понижения старшего вектора состояния генераторами, отвечающими простым отрицательным корням $-\boldsymbol{\alpha}_1$ и $-\boldsymbol{\alpha}_2$. Крайние точки такого понижения могут быть получены операциями отражения Вейля вдоль всех осей корневых пар алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

Последовательное отражение как старшего веса, так и его зеркальных образов вдоль осей пар корневых векторов приводит к диаграмме для базисных состояний неприводимого представления, изображенных в виде точек, координаты которых равны координатам полученных при таких отражениях весовых векторов, отложенных из начала координат. Для SU(3) эти точки расположены в вершинах шестиугольника. Мы не будем здесь приводить таблицы явных выражений для координат этих точек, а ограничимся рассмотрением примеров на рис. 3.9, где показаны весовые диаграммы *базисных состояний* представлений $\mathtt{T}^{(4,2)}$, $\mathtt{T}^{(3,1)}$ и $\mathtt{T}^{(4,1)}$ на плоскости изоспина и гиперзаряда. Длины сторон шестиугольника равны p_1 и p_2, и если одно из этих чисел равно нулю, шестиугольник вырождается в треугольник.

Вне границ шестиугольника нет точек, отвечающих весам базисных состояний этого же неприводимого представления. Действительно, в противном случае, если существует базисное состояние с весом вне шестиугольника, мы можем воспользоваться теми же операциями отражений Вейля. Одним из образов будет состояние с весом, которое может быть получено из состояния старшего веса, когда на него действуют не только понижающие, но и повышающие генераторы, что невозможно для состояний неприводимого представления с заданным состоянием старшего веса.

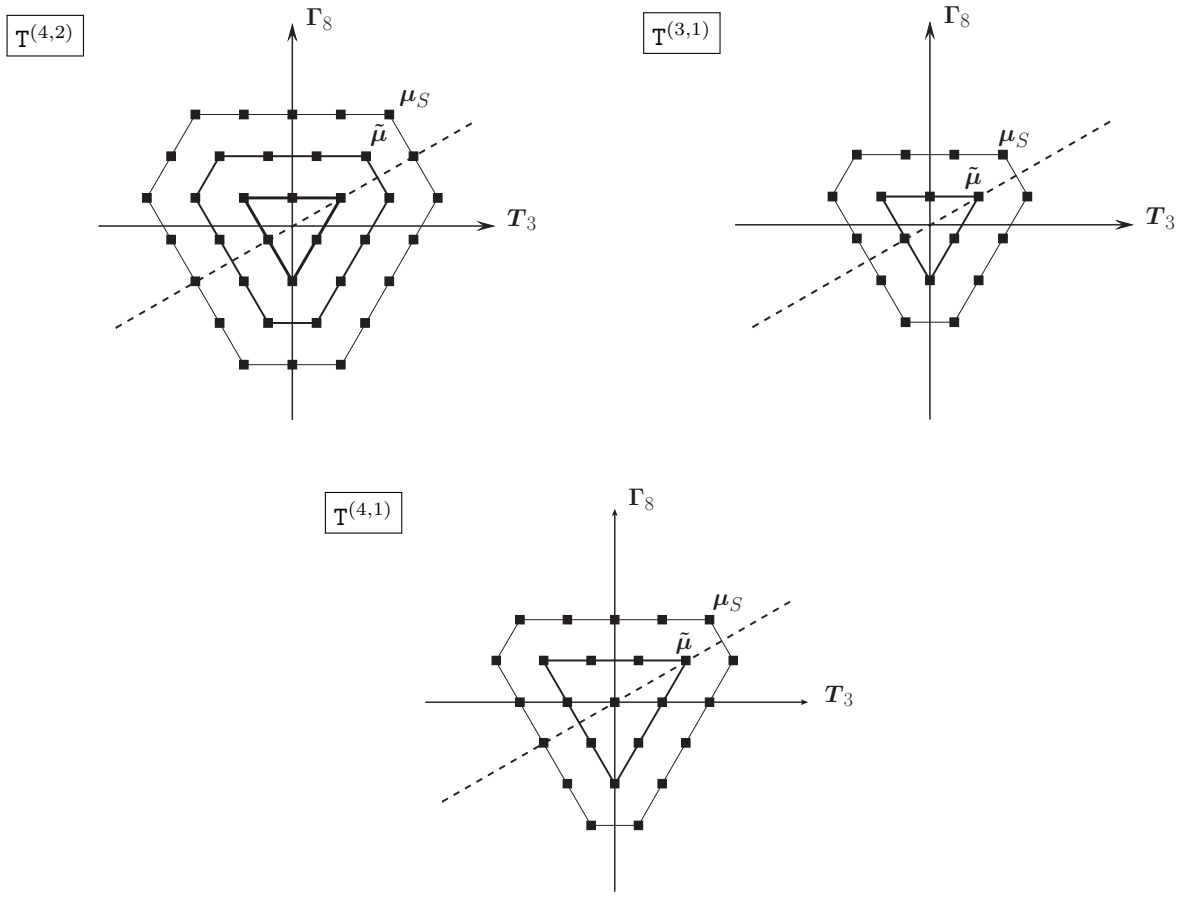


Рис. 3.9: Весовые диаграммы представлении $\mathtt{T}^{(4,2)}$, $\mathtt{T}^{(3,1)}$ и $\mathtt{T}^{(4,1)}$ группы SU(3).

Все точки в вершинах внешнего шестиугольника отвечают невырожденным весам базисных состояний, поскольку они получены вейлевскими отражениями состояния невырожденного старшего веса. Точки на сторонах между вершинами описанного шестиугольника, когда координаты одной из вершин заданы координатами старшего веса неприводимого представления, также соответствуют невырожденным весам базисных состояний, например, на верхней горизонтальной стороне не может быть весов дополнительных состояний, так как в противном случае такие дополнительные состояния можно было бы либо повысить до старшего вектора, что в противоречии с неприводимостью представления привело бы к вырождению старшего веса, либо одно из них после конечного числа шагов повышения не допускало бы дальнейшего повышения в сторону состояния старшего веса и само бы таким образом было старшим вектором состояния, определяющим другое неприводимое представление[55], что противоречит неприводимости исходного представления. Такое же рассуждение справедливо и для второй грани шестиугольника, идущей от старшего веса неприводимого представления. Остальные точки на сторонах рассматриваемого шестиугольника получаются отражением уже описанных точек на сторонах с вершиной в старшем весе. Значит, все точки весов на сторонах внешнего шестиугольника невырождены, что мы обозначаем на диаграмме, соединяя эти точки тонкой сплошной линией на рис. 3.9.

Любой угол шестиугольника на весовой диаграмме, т. е. вес, где линия контура ломается, может рассматриваться как старший вес представления, поскольку в такой точке можно выбрать по одному из каждой корневой пары такие три ближайших по направлению корня, которые при действии на выбранный вес в вершине выпуклой фигуры дают нулевой вектор. Переопределением осей подалгебры Картана все три можно сделать положительными. Отметим также, что весовая диаграмма для любой простой компактной алгебры является выпуклой фигурой, не только в случае группы SU(3), и обладает таким же свойством выбора точки старшего веса.

Физический смысл рассмотрения внешних сторон шестиугольника неприводимого представления можно описать следующим образом:

[55]Напомним, что вне сторон внешнего шестиугольника нет весов рассматриваемого неприводимого представления, и, следовательно, два повышающих генератора, которые могли бы сместить вес на стороне как раз вовне внешнего шестиугольника, дают нулевой вектор пространства представления.

старший вектор состояния неприводимого представления алгебры $\mathfrak{su}(3)$ является и старшим вектором для подалгебр $\mathfrak{su}(2)$, которые задаются T-, U- и V-изоспинами, так как

$$\hat{T}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0, \qquad \hat{U}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0, \qquad \hat{V}_+|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0. \tag{III.4.57}$$

Выбор генераторов подалгебры Картана определяет декартовы координаты старшего весового вектора и его проекции на соответствующие оси. В SU(3) операторов подалгебры Картана два, первый из которых в физических приложениях принято называть T-изоспином. Всего в SU(3) удобно выделять три разных генератора типа изоспина с коммутационными соотношениями генераторов группы SU(2), которые обозначают буквами T, U и V. Выпишем проекции старшего весового вектора на оси всех трех изоспинов (в квадратных скобках мы указываем весовой вектор, собственное значение проекции которого вычисляется)[56]

$$T_3[\boldsymbol{\mu}_S] = \tfrac{1}{2}p_1, \qquad U_3[\boldsymbol{\mu}_S] = \tfrac{1}{2}p_2, \qquad V_3[\boldsymbol{\mu}_S] = T_3[\boldsymbol{\mu}_S] + U_3[\boldsymbol{\mu}_S]. \tag{III.4.58}$$

Проекция старшего вектора состояния на ось каждого изоспина является максимальной, так что, например, собственное значение квадрата T-изоспина[57], как и в группе SU(2),

$$\hat{\boldsymbol{T}}^2 = \tfrac{1}{2}(\hat{T}_+\hat{T}_- + \hat{T}_-\hat{T}_+) + \hat{T}_3^2 = \hat{T}_x^2 + \hat{T}_y^2 + \hat{T}_z^2 \;\mapsto\; T(T+1) \tag{III.4.59}$$

задается этой максимальной проекцией

$$T = T_3^{\max}.$$

Согласно (III.4.58) мы заключаем, что

$$T = T_3^{\max} = T_3[\boldsymbol{\mu}_S] = \tfrac{1}{2}p_1, \qquad U = U_3^{\max} = U_3[\boldsymbol{\mu}_S] = \tfrac{1}{2}p_2, \qquad V = V_3^{\max} = V_3[\boldsymbol{\mu}_S] = \tfrac{1}{2}(p_1+p_2). \tag{III.4.60}$$

Понижение состояния старшего веса неприводимого представления многократным действием понижающего оператора T_- дает состояния с весами, которые расположены на горизонтальной стороне внешнего шестиугольника с вершиной в точке старшего веса. При этом понижающий оператор T_- не изменяет собственное значение квадратичного инварианта Казимира для T-изоспина, а значит, вся эта сторона — это $2T+1$ состояний с T-изоспином, равным значению, которое указано в (III.4.60). На первой диаграмме рис. 3.9 T-изоспин на верхней стороне внешнего шестиугольника равен $T = 2$. На этой стороне $2T+1 = 5$ состояний: состояние старшего веса и ещё 4 базисных состояния, которые получаются последовательным действием понижающего корневого оператора T_-, так как $p_1 = 4$ — число таких шагов в случае представления $\mathtt{T}^{(4,2)}$.

Аналогичное рассуждение справедливо и для другой стороны внешнего шестиугольника, которая имеет вершину с координатами старшего веса, с той лишь разницей, что понижение идет оператором U_-, так что p_2+1 состояние на этой стороне — это $2U+1$ состояние с U-изоспином, равным значению, которое указано в (III.4.60): на рис. 3.9 значение U-изоспина на этой стороне равно 1 для представления $\mathtt{T}^{(4,2)}$.

Ясно, что стороны внешнего шестиугольника с описанными нами направлениями вдоль простых положительных корней также имеют определенные значения T- либо U-изоспина, а стороны вдоль положительного корня V_+ отвечают вполне определенному значению V-изоспина.

В этих рассуждениях видна роль операторов Казимира подгрупп SU(2), которые есть в группе SU(3). С одной стороны, оператор Казимира, определенный в алгебре подгруппы SU(2) и являющийся инвариантом подалгебры SU(2), можно использовать как оператор, который входит в полный набор наблюдаемых, так как оператор Казимира в алгебре подгруппы SU(2) коммутирует и с генераторами подалгебры Картана[58] группы SU(3), и с инвариантами группы SU(3). С другой стороны, собственное

[56] Напомним, что операторы $\hat{U}_3$, $\hat{V}_3$ являются комбинациями выбранных нами генераторов подалгебры Картана, как это было указано в (III.1.32) при рассмотрении алгебры $\mathfrak{su}(3)$.

[57] Как и прежде значение изоспина, равное T, означает, что собственное значение квадратичного оператора Казимира равно $T(T+1)$.

[58] Для T-изоспина нулевое значение коммутаторов $\widehat{\boldsymbol{T}^2}$ с $\hat{T}_3$ и с Γ_8 можно установить, вычислив их в фундаментальном представлении в терминах матриц Гелл-Манна, как это следует из самой схемы построения генераторов подалгебры Картана в этом представлении (см. раздел **4.3 Матрицы Гелл-Манна** главы 3, **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$). Дело в том, что квадраты матриц $\hat{T}_x = \frac{1}{2}\lambda_1$, $\hat{T}_y = \frac{1}{2}\lambda_2$ и $\hat{T}_z = \frac{1}{2}\lambda_3$ — это диагональные матрицы, которые коммутируют с диагональными матрицами подалгебры Картана $\hat{T}_3 = \hat{T}_z$ и $\Gamma_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$. Важно, что значения коммутаторов генераторов не зависят от представления, так как коммутаторы в различных представлениях изоморфно отображаются друг на друга. Для U- и V-изоспина в том же фундаментальном представлении квадраты компонент $\hat{V}_x = \frac{1}{2}\lambda_4$, $\hat{V}_y = \frac{1}{2}\lambda_5$ и $\hat{U}_x = \frac{1}{2}\lambda_6$, $\hat{U}_y = \frac{1}{2}\lambda_7$ опять же являются диагональными матрицами, а z-компоненты U- и V-изоспина составлены из диагональных матриц подалгебры Картана группы SU(3), так что и квадратичные операторы $\widehat{\boldsymbol{U}^2}$ и $\widehat{\boldsymbol{V}^2}$ тоже коммутируют с диагональными

значение оператора Казимира подгруппы может быть разным для разных базисных векторов состояния неприводимого представления группы Ли, что мы уже установили для весов на сторонах внешнего шестиугольника неприводимого представления на весовой диаграмме.

Мы видим, что в набор квантовых чисел базисных квантовых состояний неприводимого представления SU(3) для достижения полноты необходимо включить и инвариант подгруппы SU(2) — значение квадратичного оператора Казимира этой подгруппы. Именно это позволит нам различать между собой состояния через описание квантовыми числами, когда одному и тому же весу отвечают несколько состояний, отличающихся друг от друга собственным значением инварианта Казимира подгруппы SU(2). Несколько базисных состояний с одним весом на весовой диаграмме отличаются собственными значениями операторов Казимира подгруппы SU(2), так что мы получаем полную систему коммутирующих наблюдаемых, составленную из генераторов подалгебры Картана группы SU(3) и квадрата изоспина подгруппы SU(2). Туда же можно включить и операторы Казимира самой алгебры $\mathfrak{su}(3)$. В рамках одного неприводимого представления любое базисное состояние будет собственным для оператора Казимира группы SU(3) с одним и тем же собственным числом, которое является идентификатором представления в целом, а не отдельных состояний базиса в представлении.

Внутри внешнего шестиугольника находятся внутренние шестиугольники. Число всех шестиугольников равно $k \equiv \min p_{1,2}$. В самом деле, как и в случае внешнего шестиугольника, каждый из этих внутренних шестиугольников образован вершинами в результате отражений одного из весов на вершине, который мы назовем весом старшей вершины шестиугольника,

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_l = (p_1 - l)\boldsymbol{\lambda}_1 + (p_2 - l)\boldsymbol{\lambda}_2, \qquad l \in \overline{\{1, k\}}, \tag{III.4.61}$$

и который получается при l-кратном вычитании корневого вектора

$$\boldsymbol{V}_- = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2\sqrt{3}}\right) \tag{III.4.61$'$}$$

из исходного старшего веса представления (III.4.56). При $l = k \equiv \min p_{1,2}$ шестиугольник вырождается в треугольник (в частном случае $p_1 = p_2$ треугольник вырождается в точку).

Вес (III.4.61) совпадает со старшим весом для неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1-l,p_2-l)}$, так что его зеркальные образы действительно образуют внутренний шестиугольник. Однако действие повышающих операторов на состояния с весом (III.4.61) не равно нулю хотя бы для одного из операторов, так как иначе мы имели бы дело со страшим вектором другого неприводимого представления. По построению неприводимого представления все базисные состояния представления получаются действием понижающих операторов на состояние старшего веса. Это значит, что веса этих базисных состояний располагаются точно по вершинам и сторонам описанных шестиугольников, а также внутри k-го внутреннего шестиугольника, который, как мы уже отмечали, после k шагов перехода к внутреннему шестиугольнику вырождается в треугольник, если $p_1 \neq p_2$, или в точку, если $p_1 = p_2$, так как длина стороны треугольника в этом случае равна нулю (для примера предлагаем читателю посмотреть на весовую диаграмму представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$).

Покажем, что кратность вырождения весов базисных состояний на l-том внутреннем шестиугольнике равна $l + 1$.

При $l = 1$ весовой вектор с координатами (III.4.61) для представления $\mathtt{T}^{(4,2)}$ на рис. 3.9 обозначен символом $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$. Для того, чтобы показать, что этому весу отвечают два базисных состояния представления, построим состояния с весом $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$, действуя на старший вектор представления $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ понижающими операторами T_-U_- и U_-T_-. Воспользуемся понятием инварианта подгруппы изоспина и докажем, что

матрицами подалгебры Картана группы SU(3). Для произвольной алгебры простой компактной группы Ли покажем, что доказательство коммутируемости квадратичного оператора Казимира подалгебры $\mathfrak{su}(2)$ следует из перпендикулярности корня $\boldsymbol{\alpha}_0$, определяющего эту подалгебру в терминах корневых генераторов $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ и $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_0}$ вместе с генератором подалгебры Картана Γ_{l_0}, остальным операторам подалгебры Картана Γ_{l_m} при $m \neq 0$. В самом деле, ортонормированный базис на весовой диаграмме задается набором векторов $\{\boldsymbol{l}_m\}$, $m \in \overline{\{1, n\}}$, которые нумеруют генераторы подалгебры Картана Γ_{l_m}. По аналогии с определением осей на весовой диаграмме в группе SU(3), положим, что единичный вектор $\boldsymbol{l}_0$ совпадает с единичным корнем $\boldsymbol{\alpha}_0$. По определению ортономированного базиса $(\boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{l}_m) = \delta_{0m}$, откуда теперь следует, что $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{l}_m) = \delta_{0m}$, т. е. корень подалгебры $\mathfrak{su}(2)$ при описанном выборе оси $\boldsymbol{l}_0$ на весовой диаграмме ортогонален всем $\{\boldsymbol{l}_m\}$ при $m \neq 0$. Обозначим оператор подалгеьры Картана $\Gamma_{l_0} \cong T_3$, повышающий оператор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_0} \cong T_+/\sqrt{2}$ и эрмитово сопряженный ему понижающий оператор $\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_0} \cong T_-/\sqrt{2}$. Составим квадратичный оператор Казимира этой подалгебры $\mathfrak{su}(2)$ в стандартном виде (III.4.59). Он равен сумме квадрата оператора из подалгебры Картана T_3 и квадратичных композиций пары корневых операторов T_+ и T_-. Оба корневых генератора подалгебры коммутируют с остальными операторами подалгебры Картана Γ_{l_m} при $m \neq 0$ в силу вида коммутатора в терминах базиса Картана–Вейля $[\Gamma_{l_m}, \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_0}] = (\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{l}_m)\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ при $m \neq 0$, так как в этом коммутаторе все компоненты корня $\boldsymbol{\alpha}_0$ как проекции на единичные векторы осей на весовой диаграмме, кроме оси вдоль $\boldsymbol{l}_0$, равны нулю в силу сделанного нами выбора оператора подалгебры Картана T_3, образующего вместе с парой корневых операторов рассматриваемую подалгебру $\mathfrak{su}(2)$. Оператор T_3 коммутирует со своим квадратичным оператором Казимира подгруппы SU(2). Следовательно, квадратичный оператор подалгеры $\mathfrak{su}(2)$ коммутирует со всеми генераторами подалгебры Картана рассматриваемой простой компактной группы Ли.

из двух разных состояний можно построить пару базисных состояний, которые являются собственными для проекции T_3 изоспина и квадрата T-изоспина, причём оба обладают одной и той же проекцией изоспина, но разными собственными значениями квадрата изоспина. Итак, применим общую формулу (III.2.22) для нормированных на единицу состояний

$$\Gamma_{-\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_m,\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a})}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}-\boldsymbol{\alpha}_m,a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}|\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a}\rangle = 0, \quad 2\,\frac{(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{m,a},\boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0,\mathbb{N}\},$$

для состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$, используя следующие подстановки: корневой вектор $\boldsymbol{\alpha}_m \mapsto \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{U}_+$, генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m} \mapsto \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2} = \hat{U}_+/\sqrt{2}$ и

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\mu}_S) = (\boldsymbol{\alpha}_2, p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2) = \tfrac{1}{2}\,p_2.$$

Это значит, что состояние

$$\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \equiv |U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle$$

имеет вес $\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2$ и квадрат нормы

$$\langle U_-\boldsymbol{\mu}_S|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle = p_2,$$

так как для нормированного на единицу состояния, которое мы обозначим кет-вектором с индексом $\mathbb{1}$,

$$|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$$

имеет место связь

$$\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{2}\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\mu}_S)}\,|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{p_2}\,|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = |U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Вес состояния $\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ лежит на стороне внешнего шестиугольника на весовой диаграмме, и это состояние не может быть повышено оператором $\hat{T}_+$. Это значит, что проекция T-изоспина как собственное значение оператора T_3 подалгебры Картана на состоянии $|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ равна своему максимальному значению $T_3^{\max}$. В этом случае собственное значение квадрата T-изоспина равно $\widehat{\boldsymbol{T}^2} \mapsto T(T+1)$, а $T = T_3^{\max}$. Найдем это значение T:

$$T = T_3^{\max} = T_3[\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2] = \tfrac{1}{2}(p_1+1).$$

Собственное значение проекции изоспина T_3 определяется весовым вектором, указанным жирным шрифтом в квадратных скобках и равно проекции указанного в квадратных скобках весового вектора на ось собственных значений T_3, т. е. его первой компоненте.

Мы установили, что состояние $|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ обладает определенным значением T-изоспина[59], так что действие на это состояние понижающего оператора $\hat{T}_-$ изменит проекцию изоспина, а именно, уменьшит эту проекцию на единицу, и сохранит неизменным его квадрат $\widehat{\boldsymbol{T}^2} \mapsto T(T+1)$, где $T = T_3^{\max}$. Согласно общим соотношениям для понижающего оператора в алгебре группы SU(2) подстановка в формулу (III.3.16) указанных значений изоспина и его проекции дает

$$\hat{T}_-|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{T(T+1)-T(T-1)}\,|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{2T}\,|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{(p_1+1)}\,|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}},$$

где мы воспользовались введенным чуть выше способом обозначения состояний при действии на них операторов: индекс $\mathbb{1}$ означает, что состояние нормировано на единицу, а символы операторов внутри кет-вектора — результат действия этих операторов на состояние с определенным весом. Это значит, что для состояния $|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ с весом $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$

$$T = \tfrac{1}{2}(p_1+1), \qquad T_3[\tilde{\boldsymbol{\mu}}] = \tfrac{1}{2}(p_1-1).$$

В итоге получим

$$\hat{T}_-\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{p_2}\,T_-|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{(p_1+1)p_2}\,|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}, \tag{III.4.62}$$

где, подчеркнем еще раз, состояние $|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ нормировано на единицу.

По той же схеме установим, что состояние $|T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ имеет вес $\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_1$ и

$$\hat{T}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{2}\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\mu}_S)}\,|T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} = \sqrt{p_1}\,|T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}.$$

[59] Состояние обладает определенным изоспином — это значит, что оно собственное как для квадрата изоспина, так и для одной из его проекций, в данном случае для T_3. Заметим, что собственное состояние оператора T_3 может быть линейной комбинацией собственных состояний оператора Казимира $\widehat{\boldsymbol{T}^2}$ с разными собственными значениями.

Это состояние обладает собственным значением U-изоспина, $\boldsymbol{U}^2 = U(U+1)$,

$$U = U_3^{\max} = U_3[\boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_1] = \tfrac{1}{2}(p_2+1),$$

так как $\hat{U}_+|T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle = 0$. Понижение оператором $\hat{U}_-$ приводит к

$$\hat{U}_-\hat{T}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \sqrt{(p_2+1)p_1}\,|U_-T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}, \tag{III.4.63}$$

причем для этого состояния с весом $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_S - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$

$$U = \tfrac{1}{2}(p_2+1), \qquad U_3[\tilde{\boldsymbol{\mu}}] = \tfrac{1}{2}(p_2-1).$$

Вычислим скалярное произведение состояний, полученных при разном порядке действия понижающих операторов на состояние старшего веса, ${}_{\mathbb{1}}\langle U_-T_-\boldsymbol{\mu}_S|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ и убедимся, что эти нормированные на единицу состояния не совпадают. Учтем, что коммутатор повышающего и понижающего генераторов для двух простых корней равен нулю (см. III.4.37)), и это значит, что $[\hat{U}_+, \hat{T}_-] = 0$. В подалгебре $\mathfrak{su}(2)$ имеет место связь вида (III.1.7), которая для компонент U- и T-изоспина приводит к $\hat{U}_+\hat{U}_- = \hat{U}_-\hat{U}_+ + 2\hat{U}_3$, $\hat{T}_+\hat{T}_- = \hat{T}_-\hat{T}_+ + 2\hat{T}_3$, а действие повышающего оператора на старший вектор состояния дает нуль. Тогда

$$\begin{aligned}{}_{\mathbb{1}}\langle U_-T_-\boldsymbol{\mu}_S|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}} &= \frac{\langle\boldsymbol{\mu}_S|\hat{T}_+\hat{U}_+\hat{T}_-\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle}{\sqrt{p_1p_2(p_1+1)(p_2+1)}} = \frac{\langle\boldsymbol{\mu}_S|\hat{T}_+\hat{T}_-\hat{U}_+\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle}{\sqrt{p_1p_2(p_1+1)(p_2+1)}} = \\ &= \frac{2T_3[\boldsymbol{\mu}_S]\,2U_3[\boldsymbol{\mu}_S]}{\sqrt{p_1p_2(p_1+1)(p_2+1)}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{(p_1+1)(p_2+1)}} < 1. \end{aligned} \tag{III.4.64}$$

Раз модуль скалярного произведения двух нормированных на единицу векторов состояния меньше единицы, значит, эти векторы не могут быть коллинеарны: векторы $|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ и $|U_-T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ линейно независимы и образуют базис своей двумерной линейной оболочки.

Вычислим действие повышающего проекцию T-изоспина оператора на оба состояния

$$\hat{T}_+\big(\hat{T}_-\hat{U}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle\big) = \big(\hat{T}_-\hat{T}_+ + 2\hat{T}_3\big)|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle = (p_1+1)|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle,$$

и

$$\hat{T}_+\big(\hat{U}_-\hat{T}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle\big) = \hat{U}_-\hat{T}_+\hat{T}_-|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = p_1|U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle,$$

где мы воспользовались свойствами старшего вектора состояния $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$. Тогда для суперпозиции состояний

$$|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle \equiv p_1|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle - (p_1+1)|U_-T_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle,$$

которая обладает весом $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ и меткой T', действие повышающего оператора изоспина даст нуль

$$\hat{T}_+|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle = 0.$$

Таким образом значение проекции T_3 для T-изоспина не может быть повышено и является максимальным. Максимальное значение проекции изоспина равно значению изоспина, и, следовательно, состояние $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle$ имеет T-изоспин равный

$$T' = T_3^{\max} = T_3[\tilde{\boldsymbol{\mu}}] = \frac{1}{2}(p_1-1),$$

в отличие от состояния $|T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}$ с тем же весом и, следовательно, с той же проекцией T_3, но с изоспином

$$T = \frac{1}{2}(p_1+1).$$

Поэтому можно ввести обозначение

$$|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T\rangle_{\mathbb{1}} \equiv |T_-U_-\boldsymbol{\mu}_S\rangle_{\mathbb{1}}.$$

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что норма состояния $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle$ отлична от нуля[60],

$$\langle\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle = p_1(p_1+1)(p_1+p_2+1),$$

[60] В построениях мы полагали, что $p_1 \neq 0$. Если это не так, т. е. если внешний шестиугольник вырожден и является треугольником с вершиной вверху и основанием внизу, то в приведенных рассуждениях следует поменять местами T- и U-изоспины. Если же $p_1 = p_2 = 0$, то представление является синглетным и содержит только одно состояние, инвариантное относительно действия группы SU(3).

т. е. можно ввести нормированное на единицу базисное состояние

$$|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle = \sqrt{p_1(p_1+1)(p_1+p_2+1)}\,|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle_{\mathbb{1}}.$$

Итак, мы установили, что старший вес внешнего шестиугольника $\boldsymbol{\mu}_S$ отвечает единственному базисному состоянию неприводимого представления с T-изоспином

$$T[\boldsymbol{\mu}_S] = \frac{1}{2}\,p_1,$$

а вес $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ старшей вершины внутри этого внешнего шестиугольника отвечает двум базисным состояниям неприводимого представления $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T\rangle_{\mathbb{1}}$ и $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle_{\mathbb{1}}$ с T-изоспином

$$T = \frac{1}{2}\,(p_1+1) \quad \text{и} \quad T' = \frac{1}{2}\,(p_1-1).$$

Задача 37. Убедитесь, что состояния $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T\rangle_{\mathbb{1}}$ и $|\tilde{\boldsymbol{\mu}}, T'\rangle_{\mathbb{1}}$ с одним весом, но с разными значениями T-изоспина ортогональны.

Поэтому в общем случае можно утверждать, что степень вырождения увеличивается на единицу при каждом шаге от старшего веса внешнего шестиугольника к весу старшей вершины внутреннего шестиугольника, если $p_1 \neq 0$ или $p_2 \neq 0$. Это происходит за счет появления состояния, T- или U-изоспин которого уменьшается на $\frac{1}{2}$ по сравнению со значением изоспина состояния со старшим весом внешнего шестиугольника. Если же внешний шестиугольник вырожден в треугольник, а значит, $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$, то состояний с дополнительным изоспином больше не возникает: нулевой изоспин не может быть уменьшен на $\frac{1}{2}$. Это значит, что увеличение вырождения останавливается, когда шестиугольник вырождается в треугольник.

При этом на всех сторонах шестиугольника или треугольника степень вырождения веса совпадает со степенью вырождения веса старшей вершины шестиугольника по тем же причинам, что и для внешнего шестиугольника. Большая степень вырождения запрещена тем, что она приводит к появлению старшего веса другого неприводимого представления, а меньшая степень не может возникнуть, так как все состояния на сторонах получаются действием понижающих операторов на состояния старшего вектора для SU(2) подгрупп соответствующего изоспина. Состояния на стороне различаются проекцией изоспина и разными значениями квадрата изоспина. Число разных значений квадрата изоспина совпадает с вырождением веса старшей вершины шестиугольника. В этой же логике внутри внешнего или внутреннего треугольника степень вырождения совпадает со степенью вырождения веса в старшей вершине треугольника.

Итак, вырождение возрастает на единицу при переходе к внутреннему шестиугольнику до тех пор, пока он не становится треугольником. Такая ситуация схематически показана на рис. 3.9 на примере неприводимого представления $\mathtt{T}^{(4,2)}$: первый внутренний шестиугольник с двукратно вырожденными весами показан полужирной линией, а треугольник внутри него с трехкратно вырожденными весами — жирной линией.

Таким образом, вырождение весов базисных состояний определяется их положением на весовой диаграмме:

i) все веса на сторонах внешнего шестиугольника невырождены;

ii) веса, расположенные на сторонах l-того по счету внутреннего шестиугольника со старшей вершиной, которая получается при l-кратном смещении старшего веса на вектор $\boldsymbol{V}_-$ (см. формулы (III.4.61) и (III.4.61′)), имеют кратность вырождения, равную $l+1$;

iii) веса состояний на сторонах треугольника, являющегося k-ым внутренним «вырожденным шестиугольником», и внутри этого треугольника имеют кратность вырождения, равную $k+1$.

После сказанного легко подсчитать количество базисных квантовых состояний для системы, реализующей данное неприводимое представление группы SU(3):

- каждый l-ый шестиугольник на весовой диаграмме имеет по три стороны с «длинами» (числом точек на весовой диаграмме) $p_1 - l$ и $p_2 - l$, и каждый весовой вектор вырожден $l+1$ раз, так что на сторонах этих шестиугольников размещено n_1 базисных состояний,

$$n_1 = 3\sum_{l=0}^{k}(p_1+p_2-2l)(l+1),$$

а при $l = k = \min(p_1, p_2)$ шестиугольник вырождается в треугольник;

- внутри треугольника из предыдущего пункта кратность вырождения весов базисных состояний на весовой диаграмме остается равной $k+1$, а число точек внутри такого треугольника можно сосчитать. Рассмотрим горизонтальную сторону этого треугольника и перейдем ко второму внутреннему горизонтальному ряду состояний и посчитаем количество точек в нем. В этом ряду внутри треугольника расположено $p_1+p_2-2(k+1)$ точек, так как длина стороны шестиугольника, который выродился в треугольник, равна p_1+p_2-2k, и, следовательно, на ней расположено p_1+p_2-2k+1 точек. Действительно, на следующей горизонтальной стороне на 1 точку меньше, но две крайних точки принадлежат сторонам вырожденного шестиугольника, т. е. внутри на горизонтальной стороне расположены $p_1+p_2-2k+1-1-2=p_1+p_2-2(k+1)$ точек весовой диаграммы с кратностью вырождения $k+1$. При переходе с самой длинной горизонтальной стороны внутри треугольника на 1 шаг по вертикали число точек на вертикальной линии внутри треугольника каждый раз уменьшается на единицу. Поэтому общее количество базисных состояний внутри треугольника равно сумме по числу описанных шагов $\tilde{l}$ вплоть до момента, когда число точек внутри треугольника становится равным нулю,

$$n_2=(k+1)\sum_{\tilde{l}=1}^{p_1+p_2-2k-1}(p_1+p_2-2k-1-\tilde{l}).$$

Пользуясь стандартными выражениями[61] для суммы натуральных чисел и их квадратов через комбинаторные коэффициенты $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$,

$$\sum_{l=1}^{k}l=C_{k+1}^2=\frac{1}{2}\,k(k+1),\qquad \sum_{l=1}^{k}l^2=C_{k+1}^2+2C_{k+1}^3=\frac{1}{6}\,k(k+1)(2k+1),$$

находим

$$n_1=\frac{3}{2}\,(p_1+p_2)(k+1)(k+2)-k(k+1)(2k+1)-3k(k+1),$$

и

$$n_2=\frac{1}{2}\,(k+1)(p_1+p_2-2k-1)(p_1+p_2-2k-2).$$

Для того, чтобы упростить выкладки по расчету числа базисных состояний в неприводимом представлении, можно, во-первых, положить для определенности $p_1\geqslant p_2$ и $k=p_2$, и, во-вторых, заметить, что

[61] Для вывода заметим, что сумма k членов геометрической прогрессии с показателем q равна

$$S_k=\sum_{l=0}^{k}q^l=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$

Проведем сначала подстановку $q=1+a$ при условии $q<1$, так что

$$S_k(a)=\frac{1-(1+a)^{k+1}}{1-(1+a)}=-\frac{1}{a}\left(1-(1+a)^{k+1}\right),$$

а потом разложим $(1+a)^{k+1}$ в бином Ньютона:

$$(1+a)^{k+1}=1+\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^l a^l.$$

Тогда

$$S_k(a)=-\frac{1}{a}\left(1-(1+a)^{k+1}\right)=C_{k+1}^1+C_{k+1}^2a+C_{k+1}^3a^2+\ldots$$

В пределе при $a\to-0$, означающем, что $q=1+a\to1-0<1$, найдем, что

$$S_k(0)=C_{k+1}^1=k+1=\sum_{l=0}^{k}q^l\Big|_{q\to1}=\sum_{l=0}^{k}1,$$

и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}S_k(a)\big|_{a\to-0}=C_{k+1}^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}S_k\Big|_{q\to1}=\sum_{l=0}^{k}lq^{l-1}\Big|_{q\to1}=\sum_{l=0}^{k}l,$$

а также

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(1+a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}S_k(a)\big|_{a\to-0}=C_{k+1}^2+2C_{k+1}^3=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}S_k\Big|_{q\to1}=\sum_{l=0}^{k}l^2q^{l-1}\Big|_{q\to1}=\sum_{l=0}^{k}l^2.$$

размерность представления не зависит от перестановки $p_1 \leftrightarrow p_2$, так как это приводит просто к отражению исходного шестиугольника относительно оси абсцисс. Это значит, что все построения для расчета размерности представлений $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$ и $\mathrm{T}^{(p_2,p_1)}$ идентичны. Тогда

$$n_1 \mapsto \frac{1}{2}\,(p_2+1)\{3(p_1+p_2)(p_2+2)-4p_2(p_2+2)\}$$

и

$$n_2 \mapsto \frac{1}{2}\,(p_2+1)(p_1-p_2-1)(p_1-p_2-2).$$

После простого приведения подобных членов число базисных состояний неприводимого представления $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$ группы SU(3) оказывается равным

$$\dim \mathrm{T}^{(p_1,p_2)} = n_1+n_2 = \frac{1}{2}\,(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2). \tag{III.4.65}$$

Примеры неприводимых представлений показаны на рис. 3.10.

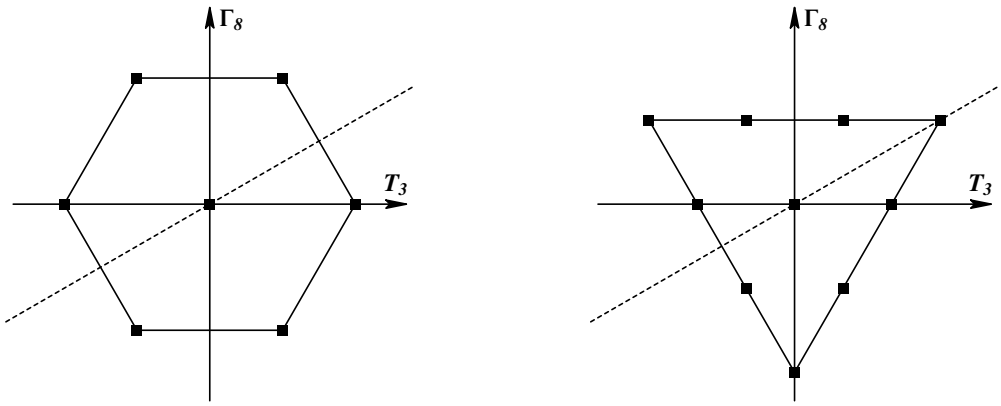


Рис. 3.10: Октетное (присоединенное) $\mathrm{T}^{(1,1)}$ и декуплетное $\mathrm{T}^{(3,0)}$представления группы SU(3).

Присоединенное представление $\mathrm{T}^{(1,1)}$ является симметричным при зеркальном отражении относительно оси абсцисс, как и любое представление $\mathrm{T}^{(p,p)}$, что ясно из геометрических соображений. Оно включает в себя 8 состояний. При этом старший вес присоединенного представления $\mathrm{T}^{(1,1)}$

$$\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2 = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

совпадает с повышающим вектором $\boldsymbol{V}_+$, так что расположение шести точек на весовой диаграмме представления $\mathrm{T}^{(1,1)}$ совпадает с шестью корнями алгебры $\mathfrak{su}(3)$ (см. главу 3, **§ 1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$**, раздел **1.3**$\mathfrak{su}(3)$, рис. 3.1 и 3.3), а двукратно вырожденный вес с координатами $(0,0)$ отвечает двум базисным состояниям с разными собственными значениями оператора Казимира для подалгебры изоспина SU(2). Заметим, что диаграмма весов находится в полном соответствии с общим описанием весов присоединенного представления в разделе **2.4 Веса присоединенного представления** главы 3, **§ 2. Неприводимые представления**:

- два собственных вектора с нулевым весом, и их число равно рангу и числу генераторов подалгебры Картана,
- все остальные веса равны корням, а число таких состояний равно числу корней алгебры.

В декуплетном представлении все десять точек на весовой диаграмме являются невырожденными, поскольку исходный внешний многоугольник уже является треугольником, а значит, кратность вырождения всех точек на такой весовой диаграмме совпадает с кратностью вырождения на периметре треугольника, где она в данном случае равна единице.

Значение квадратичного оператора Казимира в заданном неприводимом представлении $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$ легко вычислить действием выражения

$$C_2 = \hat{T}_3^2+\hat{\Gamma}_8^2+\hat{T}_-\hat{T}_+ + \hat{V}_-\hat{V}_+ + \hat{U}_-\hat{U}_+ + \hat{T}_3+\sqrt{3}\hat{\Gamma}_8, \tag{III.1.43}$$

на состояние старшего веса

$$\boldsymbol{\mu}_S = p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2 = \left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_1+2p_2}{2\sqrt{3}}\right).$$

Учтем, что действие повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль. Тогда в выражении (III.1.43) необходимо учесть только собственные значения генераторов подалгебры Картана для старшего вектора состояний:

$$\hat{T}_3|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p_1}{2}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \qquad \hat{\Gamma}_8|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p_1+2p_2}{2\sqrt{3}}|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Поэтому приведение подобных членов дает собственное значение квадратичного оператора Казимира неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$:

$$C_2 = \frac{1}{3}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2\right) + p_1 + p_2. \tag{III.4.66}$$

§5.. Симметрия массовых мультиплетов адронов и ароматы кварков: квантовые пространства

Классификация адронов по симметрии ароматов кварков, октеты и декуплеты, нейтральные компоненты и их кварковый состав, изоспин как оператор из полного набора наблюдаемых, необходимость введения цвета кварков.

Согласно общей интерпретации симметрии в физике соответствие между теоретико-групповыми понятиями и физической терминологией опирается на отождествление базиса неприводимого представления группы с квантовыми состояниями. А физические величины из полного набора наблюдаемых, которые характеризуют эти квантовые состояния, равны собственным значениям генераторов подалгебры Картана группы и инвариантов Казимира подгрупп.

В частности, в кварковой модели адронов $\mathrm{SU_f}(3)$ октет представлен в виде наблюдаемых состояний псевдоскалярных мезонов[62], составленных из кварк-антикварковых пар $(q\bar{q})$ (см. пункт • **Составная модель мезонных состояний с нулевыми весами** на стр. 212 в этом параграфе), или барионов (qqq) (см. пункт • **Составная модель барионов и квантовое пространство цвета** на стр. 215 в этом параграфе) со спином $\frac{1}{2}$ (см. рис. 3.11), а декуплет отвечает барионам со спином $\frac{3}{2}$ (см. рис. 3.12).

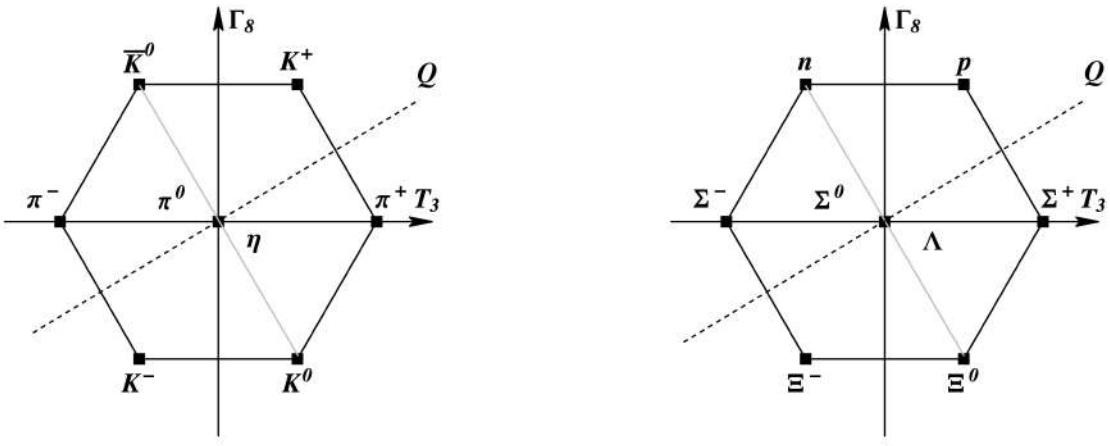


Рис. 3.11: Представление $\mathtt{T}^{(1,1)}$: адронные состояния псевдоскалярных мезонов и барионов со спином $\frac{1}{2}$ в модели $\mathrm{SU_f}(3)$–симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков.

На весовой диаграмме неприводимого представления с координатами проекции изоспина по горизонтальной оси и гиперзаряда по вертикальной оси на одной горизонтальной линии находятся состояния

[62] Основные состояния мезонов образованы кварком и антикварком с суммарным спином, равным нулю, и с орбитальным моментом относительного движения кварка и антикварка, также равным нулю, так что полный момент количества движения кварк-антикварквой пары равен нулю, что отвечает мезонному скалярному полю этой составной системы. В релятивистской теории кварки и антикварки являются квантами спинорного поля, а в теории группы Пуанкаре доказывается, что действие зеркальной инверсии на спинорные поля кварка и антикварка отличается знаком, так что в основном состоянии кварк-антикварковой пары зеркальная инверсия пространства приводит к смене знака мезонного поля, что и соответствует понятию псевдоскаляра.

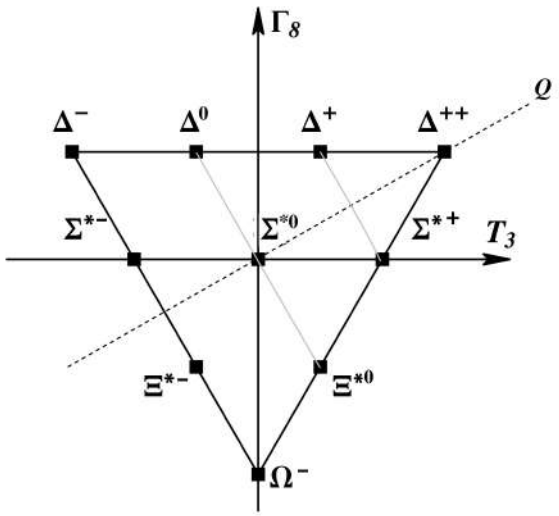


Рис. 3.12: Представление $\mathtt{T}^{(3,0)}$: адронные состояния барионов со спином $\frac{3}{2}$ в модели $\mathrm{SU_f}(3)$–симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков.

с одинаковым числом странных кварков и одинаковым гиперзарядом. Эти состояния образуют изоспиновый мультиплет[63], причем при сдвиге на весовой диаграмме вправо один из d-кварков в адроне заменяется на u-кварк (действие оператора повышения проекции изоспина). Каждый же шаг вниз по вертикали на весовой диаграмме увеличивает на единицу число странных кварков в адроне. Из этих соображений сразу можно однозначно определить кварковый состав большинства из рассматриваемых адронов, указанный в табл. 1.

Таблица 1: Кварковый состав октета псевдоскалярных мезонов и барионов (спин $\frac{1}{2}$) и декуплета барионов (спин $\frac{3}{2}$).

состояние	$\bar{K}^0$	K^+	π^-	π^+	K^-	K^0
состав	$(d\bar{s})$	$(u\bar{s})$	$(d\bar{u})$	$(u\bar{d})$	$(s\bar{u})$	$(s\bar{d})$
состояние	n	p	Σ^-	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0
состав	(ddu)	(uud)	(dds)	(uus)	(ssd)	(ssu)
состояние	Δ^-	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}	Σ^{*0}	Ω^-
состав	(ddd)	(ddu)	(duu)	(uuu)	(sdu)	(sss)

Исключение из этого простого правила составляют нейтральные частицы в октетах, весовой вектор которых имеет двукратное вырождение (см. раздел **4.4 Представления** $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ главы 3, **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$), т. е. весу внутри внешнего шестиугольника на рис. 3.11 отвечают два различных квантовых состояния. В этом случае следует принять во внимание тот факт, что для двух состояний с координатами $(0,0)$, т. е. с нулевой проекцией изоспина $T_3 = 0$ и с нулевым гиперзарядом $\Gamma_8 = 0$ одно из состояний может быть ассоциировано с нейтральной компонентой изоспинового триплета ($T = 1$, $T_3 = 0$), а другое — с состоянием изосинглета ($T = 0$).

Например, пи-мезоны $\pi^\pm$ с изоспином $T = 1$ и проекциями $T_3 = \pm 1$ составляют изотриплет вместе с нейтральным пионом π^0 с $T_3 = 0$, а η-мезон — изосинглет с нулевыми собственными значениями наблюдаемых $\widehat{\boldsymbol{T}^2}$ и $\hat{T}_3$.

[63]Напомним, что изоспином мы называем максимальное значение проекции $(T_3)_{\max} = T$ в неприводимом представлении группы изоспина, а собственное значение квадратичного оператора Казимира группы изоспина в этом представлении равно $\boldsymbol{T}^2 = T(T+1)$.

• Составная модель мезонных состояний с нулевыми весами

Для точного описания кваркового состава нейтральных мезонных состояний присоединенного представления рассмотрим свойства билинейной формы, составленной из состояния в компонентной форме фундаментального представления группы SU(3) v^{F} с контравариантным индексом F и состояния сопряженного представления $\bar{v}$, которое преобразуется как ковариантный объект $\bar{v}_{\mathrm{F}}$ и описывает антикварки:

$$v = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \qquad \bar{v} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) \cong \bar{w},$$

см. (III.4.15), (III.4.16), (III.4.34) и описание преобразований состояний двух фундаментальных представлений в компонентной форме на стр. 194. В этой записи *мы обозначаем символами кварков амплитуды перед нормированными базисными состояниями в триплете кварков* $(u|u\rangle \mapsto u$ и т.п.), а *антикварков — с обозначениями базисных состояний в антитриплете*. Из триплета **3** и антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$ можно построить билинейную форму, т. е. рассмотреть тензорное произведение $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$. В этом тензорном произведении необходимо выделить неприводимые представления, а значит, разложить это тензорное произведение в прямую сумму пространств неприводимых представлений.

Один член такой суммы нам уже известен — это инвариант $\bar{v} \cdot v = \bar{v} \cdot \mathbb{1} \cdot v$, где в последнем равенстве мы специально выделили единичную матрицу. Это значит, что одна из девяти независимых компонент тензорного произведения $\bar{v} \otimes v$ двух трехкомпонентных фундаментальных представлений в пространстве состояний тензорного произведения триплета и антитриплета группы SU(3) отвечает синглету группы SU(3), т. е. скаляру или инварианту, который не зависит от значения групповых параметров. Покажем теперь, что остальные восемь базисных состояний в тензорном произведении отвечают октету группы SU(3). Для этого воспользуемся матричной записью тензорного произведения в индексах: $\bar{v} \otimes v \cong \bar{v}_{\mathrm{F}} v^{\mathrm{F}'}$, и заметим, что при матричном умножении можно свернуть эти индексы с матрицами, которые также обладают такими индексами, например, с $\mathbb{1}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}'}$, что приводит к синглету, у которого нет групповых индексов $\bar{v}_{\mathrm{F}} v^{\mathrm{F}'} \mathbb{1}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}'}$, указывающих на то, как композитное поле $\bar{v} \cdot \mathbb{1} \cdot v$ может преобразовываться при действии группы на все его составляющие: триплет, антитриплет и единичную матрицу. Вместо единичной матрицы в билинейной форме рассмотрим матрицы Гелл-Манна λ_a, несущие индекс групповых параметров a наряду с матричными индексами триплета и антитриплета: $(\lambda_a)^{\mathrm{F}}_{\bullet\,\mathrm{F}'}$.

Триплет v преобразуется матрицей g (III.4.31), а антитриплет $\bar{v}$ — матрицей $g^\dagger = g^{-1}$:

$$v \;\mapsto\; g \cdot v, \qquad \bar{v} \;\mapsto\; \bar{v} \cdot g^\dagger.$$

Тогда преобразование билинейной формы

$$V_a = \bar{v}\, \lambda_a v \quad \mapsto \quad V'_a = \bar{v}\, g^\dagger \lambda_a g\, v,$$

при бесконечно малых параметрах $\mathfrak{u}^b \to 0$, когда

$$g \approx \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2} \lambda_{b'} \mathfrak{u}^{b'}, \qquad g^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{2} \lambda_b \mathfrak{u}^b,$$

сводится к

$$V'_a \approx \bar{v} \left(\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{2} \lambda_b \mathfrak{u}^b \right) \lambda_a \left(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2} \lambda_{b'} \mathfrak{u}^{b'} \right) v \approx$$

$$\approx \bar{v}\, \lambda_a v + \frac{\mathrm{i}}{2}\, \mathfrak{u}^b \bar{v}\, [\lambda_b, \lambda_a] v = V_a + \frac{\mathrm{i}}{2}\, \mathfrak{u}^b\, 2\mathrm{i} f^c_{ba}\, \bar{v}\, \lambda_c v = V_a + f^c_{ab} V_c \mathfrak{u}^b,$$

где мы использовали известное выражение для коммутатора матриц Гелл-Манна (III.4.29) и антисимметрию структурных констант $f^c_{ba} = -f^c_{ab}$. С помощью процедуры опускания и поднимания тензорных индексов запишем изменение ковектора V_a

$$\delta V_a \equiv V'_a - V_a = f^c_{ab} V_c \mathfrak{u}^b = f_{abc'} g^{c'c} V_c \mathfrak{u}^b = f_{abc'} V^{c'} \mathfrak{u}^b = f_{bca} \mathfrak{u}^b V^c,$$

где мы воспользовались полной антисимметричностью структурных констант f_{abc} относительно перестановки любой пары индексов и переместили индекс a на 2 позиции вправо. Тогда для изменения контрвектора

$$\delta V^a = g^{aa'} \delta V_{a'} = f^a_{bc} \mathfrak{u}^b V^c = [\mathfrak{u}, \boldsymbol{V}]^a = (\pounds_{\mathfrak{u}} \boldsymbol{V})^a = \big\{ \mathrm{ad}\, \mathfrak{u}\, (\boldsymbol{V}) \big\}^a, \tag{III.5.1}$$

т. е. мы получили закон группового преобразования векторов присоединенного представления в касательном пространстве согласно (II.1.26) и разделу **2.1 Присоединенное представление** главы 2, **§ 2. Представление группы Ли и генераторы**, а последнее равенство записано по определению присоединенного представления как касательного пространства групповых координат в точке групповой единицы согласно сноске 29 на стр. 73. Это значит, что восемь компонент ковектора $V_a = \bar{v}\,\lambda_a v$ преобразуются как состояния присоединенного представления.

Суть составной модели для описания состояний неприводимого представления групы — это рассмотрение тензорных произведений фундаментальных представлений группы, в которых состояние в мультиплете неприводимого представления выражается в виде линейной комбинации произведений нескольких состояний фундаментальных мультиплетов. В рассмотренном случае синглета и октета присоединенного представления группы SU(3) эти композитные поля выражались в виде определенных полиномов компонент кваркового триплета на антикварковый антитриплет. Поскольку закон преобразования компонент октета V_a, т.е. базисных состояний присоединенного представления, получен из фундаментальных представлений кварков и антикварков, можно найти собственные значения наблюдаемых величин для базисных состояний октета при действии генераторов из подалгебры Картана, обобщенных на тензорное произведение представлений (см. обсуждение формул (III.2.16) и (III.2.17)).

Для иллюстрации этих положений и прозрачности формул рассмотрим сначала точно такую же конструкцию в группе SU(2),

$$\boldsymbol{V} \equiv \bar{\mathcal{Q}}\, 2\hat{\boldsymbol{T}}\mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{V} \equiv \bar{\mathcal{Q}}\,\hat{\boldsymbol{T}}\mathcal{Q},$$

где вместо триплета фундаментального представления v группы SU(3) мы подставили изодублет кварков $\mathcal{Q}$, а вместо $\bar{v}$ — сопряженный изодублет антикварков $\bar{\mathcal{Q}}$,

$$v \;\mapsto\; \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \qquad \bar{v} \;\mapsto\; \bar{\mathcal{Q}} = (\bar{u}, \bar{d}), \tag{III.5.2}$$

а генераторы $\lambda_a = 2\Gamma_a$ мы заменили на генераторы изоспина $2\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ группы $\mathrm{SU_f}(2)$, т. е. на сигма-матрицы Паули.

Теперь рассмотрим компоненты триплета $\boldsymbol{V}$. Составим линейные комбинации

$$\tfrac{1}{2}V_\pm \equiv \bar{\mathcal{Q}}\,(\hat{T}_x \pm \mathrm{i}\hat{T}_y)Q,$$

и с учетом явного вида матриц $\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ в терминах матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$

$$\hat{T}_+ = \hat{T}_x + \mathrm{i}\hat{T}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T}_- = \hat{T}_x - \mathrm{i}\hat{T}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

найдем

$$\tfrac{1}{2}V_+ = \bar{u}d, \qquad \tfrac{1}{2}V_- = \bar{d}u.$$

Значит, эти комбинации соответствуют заряженным π-мезонам:

$$\pi^+ \mapsto \tfrac{1}{2}V_-, \qquad \pi^- \mapsto \tfrac{1}{2}V_+.$$

Отождествление компонент билинейной формы с мезонами основано на равенстве зарядов и проекций изоспина компонент билинейной формы и этих мезонов.

Для нейтральной компоненты с изоспином T_3 по группе SU(2) введем

$$\pi^0 \mapsto \sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,V_z = \sqrt{2}\cdot\bar{\mathcal{Q}}\,T_3\mathcal{Q} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u},\bar{d})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\bar{u}u - \bar{d}d), \tag{III.5.3}$$

где в суперпозицию кварковых состояний нами был введен нормировочный множитель, который обеспечивает то, что в мезоне находится одна кварк-антикварковая пара: с вероятностью[64] $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ пара $\bar{u}u$ и с той же вероятностью пара $\bar{d}d$. (Порядок записи кварк-антикваркового состава обычно приводится в упрощенном виде, а именно, в записи указывается только наименование частиц в адроне, так что мы следуем сложившейся традиции чтения, например, $(\bar{d}\,u) = \pi^+$ читается как «мезон π^+ — антикварк $\bar{d}$, кварк u» или «d-bar u». На английском античастицы принято записывать в конец фразы, чтобы было ясно, к какому символу относится «bar»: $u\bar{d}$ — это «u d-bar», «u-кварк d-антикварк».)

[64] Вероятность — квадрат модуля амплитуды, т. е. коэффициента в суперпозиции, если состояние имеет единичную норму (сумма вероятностей равна единице).

Согласно (III.2.16) и (III.2.17) собственное значение заряда $\hat{Q}$ базисного состояния в тензорном произведении задается суммой зарядов кварков и антикварков, т. е. суммой зарядов состояний в тензорных множителях этого произведения. Например,

$$\hat{Q}\cdot\big(|\bar{u}\rangle\otimes|u\rangle\big)=\big(\hat{Q}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\hat{Q}\big)\big(|\bar{u}\rangle\otimes|u\rangle\big)=Q_{\bar{u}}\big(|\bar{u}\rangle\otimes|u\rangle\big)+Q_u\big(|\bar{u}\rangle\otimes|u\rangle\big)\equiv\big(Q_{\bar{u}}+Q_u\big)(\bar{u}u).$$

Тогда

$$\hat{Q}\,\pi^0=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big(Q_{\bar{u}}+Q_u\big)(\bar{u}u)-\big(Q_{\bar{d}}+Q_d\big)(\bar{d}d)\Big\}=0\cdot\pi^0,$$

и аналогично для проекции изоспина

$$\hat{T}_3\,\pi^0=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big(T_3[\bar{u}]+T_3[u]\big)(\bar{u}u)-\big(T_3[\bar{d}]+T_3[d]\big)(\bar{d}d)\Big\}=0\cdot\pi^0,$$

так как

$$T_3[u]=\tfrac{1}{2},\quad T_3[\bar{u}]=-\tfrac{1}{2},\quad T_3[d]=-\tfrac{1}{2},\quad T_3[\bar{d}]=\tfrac{1}{2}.$$

Значит, прямым вычислением мы убедились, что состояние π^0 действительно имеет нулевой заряд и нулевую проекцию изоспина. Вместе с тем по построению π^0 дополняет базис состояний $\pi^\pm$ до триплета группы SU(2).

Для вычисления квадрата изоспина $\widehat{\boldsymbol{T}^2}$, который является квадратичным оператором Казимира группы SU(2), необходимо, во-первых, использовать его выражение через повышающие и понижающие генераторы (III.3.15)

$$\widehat{\boldsymbol{T}^2}=\hat{T}_3^2+\hat{T}_3+\hat{T}_-\hat{T}_+,\tag{III.5.4}$$

и, во-вторых, учесть, что для фундаментального представления

$$\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}$$

действие повышающего и понижающего корневых операторов дает

$$\hat{T}_+u=0,\quad \hat{T}_+d=u,\quad \hat{T}_-u=d,\quad \hat{T}_-d=0,\tag{III.5.5}$$

так как повышающие и понижающие изоспин матрицы алгебры $\mathfrak{su}(2)$ имеют явный вид (III.3.11):

$$\hat{T}_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \hat{T}_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что для представления сопряженного спинора $\mathcal{Q}_c$, который получается с помощью спинорной метрики как представление, эквивалентное единственному фундаментальному представлению в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ (см. изложение вопроса о введении сопряженного спинора в разделе **4.1 Спинорная метрика**, **§4. Спин $s=1/2$** главы 1, обсуждение формулы (III.4.35), сноску 46 на стр. 180 и [1]),

$$\mathcal{Q}_c\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}Q^*=\begin{pmatrix}\bar{d}\\-\bar{u}\end{pmatrix}$$

сразу видно, что имеют место выражения для действия повышающего и понижающего операторов на состояния сопряженного спинора

$$\hat{T}_+\bar{u}=-\bar{d},\quad \hat{T}_+\bar{d}=0,\quad \hat{T}_-\bar{u}=0,\quad \hat{T}_-\bar{d}=-\bar{u}.\tag{III.5.6}$$

Тогда, используя (III.5.4)–(III.5.6), найдем, что $\hat{T}_3(u\bar{u})=(\hat{T}_3u)\bar{u}+u(\hat{T}_3\bar{u})=+\frac{1}{2}(u\bar{u})-\frac{1}{2}(u\bar{u})=0$ и

$$\widehat{\boldsymbol{T}^2}(u\bar{u})=(\hat{T}_3^2+\hat{T}_3+\hat{T}_-\hat{T}_+)(u\bar{u})=(\hat{T}_3\cdot0+0+\hat{T}_-\hat{T}_+)(u\bar{u})=-\hat{T}_-(u\bar{d})=-d\bar{d}+u\bar{u}$$

и

$$\widehat{\boldsymbol{T}^2}(d\bar{d})=(\hat{T}_3^2+\hat{T}_3+\hat{T}_-\hat{T}_+)(d\bar{d})=(\hat{T}_3\cdot0+0+\hat{T}_-\hat{T}_+)(d\bar{d})=\hat{T}_-(u\bar{d})=d\bar{d}-u\bar{u}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\widehat{\boldsymbol{T}^2}\pi^0=2\,\pi^0=T(T+1)\pi^0,$$

и π^0 — это состояние с изоспином $T=1$ и $T_3=0$.

Итак, нейтральная компонента присоединенного представления SU(2) построена как матричное умножение фундаментального и сопряженного ему представлений с диагональной матрицей генератора из подалгебры Картана группы SU(2).

В группе SU(3) такое состояние π^0 можно получить с помощью матриц Гелл-Манна и спиноров фундаментального представления v^{F} и сопряженного к нему $\bar{v}_{\mathrm{F}}$, а также диагональной матрицы λ_3 из подалгебры Картана:

$$\pi^0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{v}_{\mathrm{F}'}\,(\lambda_3)^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}\,v^{\mathrm{F}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{v}\,\lambda_3 v = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(u\bar{u} - d\bar{d}). \tag{III.5.7}$$

Другое нейтральное состояние — изоскаляр — получается при использовании в матричном произведении другой диагональной матрицы из подалгебры Картана, а именно, λ_8:

$$\eta \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{v}_{\mathrm{F}'}\,(\lambda_8)^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}\,v^{\mathrm{F}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{v}\,\lambda_8 v = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}). \tag{III.5.8}$$

Предлагаем читателю самостоятельно в уме вычислить проекцию и квадрат изоспина для состояния η: $T_3 = 0$, $\widehat{\boldsymbol{T}^2} = 0$. Все выкладки уже проделаны при выводе значения квадрата изоспина для π^0.

• Составная модель барионов и квантовое пространство цвета

Мультиплеты барионов требуют отдельного обсуждения. Это связано с тем, что барионы построены из кварков, среди которых могут встречаться и кварки одного аромата, так что необходимо внимательно отнестись к задаче с тождественными частицами (см. **§ 5. Тождественные частицы** главы 1). Кварки несут полуцелый спин $\frac{1}{2}$, т. е. являются фермионами. В этой связи обращает на себя внимание декуплет барионов со спином $\frac{3}{2}$ (см. таблицу 1 на стр. 211), в котором барионы Δ^{++}, Δ^{-} и Ω^{-} составлены из идентичных кварков (uuu), (ddd) и (sss). Спиновое состояние тождественных кварков (спиновая волновая функция) в этих гиперонах является симметричным относительно перестановок спиновых квантовых чисел любой пары тождественных частиц[65].

Эти барионы являются связанными состояниями с минимальной энергией системы трех кварков, так что орбитальные моменты относительного движения кварков тождественно равны нулю. В этом случае состояние кварков в общем координатном пространстве (координатная волновая функция) симметрично относительно перестановок координат кварков. В итоге, состояния в координатном пространстве и спиновом магнитном пространстве (пространственные и спиновые волновые функции тождественных кварков) этих барионов являются симметричными по перестановкам либо координат кварков как квантовых чисел состояния координатного пространства, либо спиновых квантовых чисел кварков, соответственно. Это значит, что интегральное квантовое состояние, построенное как произведение спиновой волновой функции на координатную волновую функцию при заданной спиновой, при перестановке квантовых чисел тождественных кварков переходит само в себя. А это вступает в противоречие с принципом запрета Паули (см. **§ 5.]Тождественные частицы** главы 1) для фермионов, которыми являются кварки, обладающие полуцелым спином. Согласно принципу запрета Паули вероятность обнаружить два тождественных фермиона в состоянии с тождественными во всех пространствах квантовыми числами равна нулю. Это достигается за счет статистики Ферми–Дирака для амплитуды вероятности: перестановка всех квантовых чисел (во всех пространствах, где фермионы существуют) тождественных фермионов меняет знак амплитуды вероятности квантового состояния. Это значит, что, если все квантовые числа двух тождественных фермионов совпадают, то амплитуда до перестановки квантовых чисел буквально совпадает с амплитудой после перестановки. Но по статистике Ферми–Дирака одна амплитуда равна другой со знаком минус, что возможно, только если сама амплитуда равна нулю.

Вместе с тем, согласно статистике Ферми–Дирака интегральные волновые функции (квантовые состояния) фермионов меняют знак при перестановке квантовых чисел двух тождественных фермионов, если переставлять все квантовые числа из полного набора наблюдаемых. Из этого следует, что полный набор наблюдаемых (и их квантовых чисел во всех пространствах) у кварков не может быть ограничен их координатами и квантовыми числами спинового пространства, так как существование декуплета барионов со спином $\frac{3}{2}$ в основном состоянии — это экспериментальный факт.

---

[65] При максимальном значении проекции спина на выделенную ось спиновое квантовое состояние гиперона Ω^{-} записывается в виде тензорного произведения спиновых состояний кварков, составляющих адрон

$$|\Omega^{-}\rangle_{\mathrm{spin}} = \sum_{\mathrm{sym}(k_1,k_2,k_3)} |\uparrow, s(k_1)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_2)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_3)\rangle,$$

где стрелка $\uparrow$ — это символ спинового квантового состояния кварка с проекцией спина, равной $+\frac{1}{2}$, $s(k)$ указывает на квантовое состояние странного кварка с номером k, причем берется симметричная сумма по перестановкам номеров кварков $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$, которая делится на число слагаемых (см. определение в сноске на стр. 83). В этой записи явно видно, что перестановки номеров странных кварков (k_1, k_2, k_3) в тензорном произведении никак не меняют спиновое состояние гиперона.

Более того, именно открытие Ω-гиперона как раз и послужило убедительным доказательством в пользу гипотезы о $\mathrm{SU_f}(3)$-симметрии кварковых ароматов в сильных взаимодействиях, предложенной Гелл-Манном. Противоречие же с принципом запрета Паули может быть устранено, если расширить полный набор наблюдаемых для кварков таким образом, чтобы интегральное состояние в форме тензорного произведения состояний кварков в отдельных пространствах было дополнено еще одним пространством, а квантовые числа — дополнительным квантовым числом состояния в этом пространстве так, чтобы оно стало антисимметричным по перестановкам всех квантовых чисел тождественных кварков.

Это дополнительное квантовое число было введено Боголюбовым, Струминским и Тавхелидзе, а также независимо от них Намбу, Ханом и Гринбергом и впоследствии названо «цветом» (color).

Поскольку экспериментально установлено, что состояние Ω-гиперона невырождено, т. е. существует только один, единственный сорт таких гиперонов, то необходимо для описания интегрального состояния s–кварка ввести дополнительное трехмерное пространство цвета с базисом из трех состояний, каждое из которых — состояние с определенным цветом. Цвет помечают индексом, который принимает три значения. По перестановкам индексов цветов состояние в общем пространстве цвета трех кварков (цветовая волновая функция) в барионе $\Omega^- = (sss)$ должно быть полностью антисимметрично.

$$|\Omega\rangle_{\mathrm{color}} \mapsto |\mathrm{color}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\epsilon_{c_1c_2c_3}\,s^{c_1}_{[1]}s^{c_2}_{[2]}s^{c_3}_{[3]}, \tag{III.5.9}$$

где $\epsilon_{c_1c_2c_3}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, а c_1, c_2, c_3 — цветовые индексы, пробегающие от 1 до 3, которые принято также называть синим, красным и желтым (в формуле (III.5.9) индексы в квадратных скобках обозначают другие переменные, от которых зависит состояние кварка: проекция спина и координаты). Увеличение числа цветов привело бы к вырождению, т. е. к появлению дополнительных состояний с тем же составом ароматов кварков, а именно, состояний, которые не наблюдаются экспериментально. Другими словами, *адронные состояния* (мезоны и барионы), включая указанную нами цветовую волновую функцию Ω-гиперона, *должны быть синглетами* как составные объекты из кварка и антикварка в случае мезонов, или трех кварков в случае барионов, так что цветовые кварковые состояния могут быть факторизованными или зацепленными, но не могут иметь цветовых индексов, отличных от «немых».

Это свойство можно сформулировать более точно, если ввести групповые преобразования цветовых состояний кварков. Синглетность адронов станет эквивалентна мультиплетности неприводимых представлений соответствующей группы, а именно, эквивалентна мультиплетности, равной единице. Для этого запишем обратимое преобразование цветовой волновой функции кварка в виде

$$s^{c'_1} = U^{c'_1}_{\bullet c_1}\,s^{c_1}, \tag{III.5.10}$$

и выразим цветовое состояние бариона как

$$|\mathrm{color}\rangle' = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\epsilon_{c'_1c'_2c'_3}\,s^{c'_1}s^{c'_2}s^{c'_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\epsilon_{c'_1c'_2c'_3}\,U^{c'_1}_{\bullet c_1}U^{c'_2}_{\bullet c_2}U^{c'_3}_{\bullet c_3}\,s^{c_1}s^{c_2}s^{c_3}. \tag{III.5.11}$$

Учтем, что

$$\epsilon_{c'_1c'_2c'_3}\,U^{c'_1}_{\bullet c_1}U^{c'_2}_{\bullet c_2}U^{c'_3}_{\bullet c_3} = \det U\cdot\epsilon_{c_1c_3c_3}.$$

■ Напомним, что эту формулу легко доказать (см.раздел **2.2 Тензор Леви-Чивиты** в **§ 2. Формулы тензорного анализа** Приложения), замечая, что тензор в левой части равенства является антисимметричным по перестановке каждой пары индексов c_1, c_2 и c_3, так как перестановка пары этих индексов у матриц U в рассматриваемом выражении сводится к перестановке «немых» штрихованных индексов у этих же матриц и перестановке этих же штрихованных индексов у тензора Леви-Чивиты, что приводит к смене знака всего выражения. Значит, рассматриваемый тензор полностью антисимметричен по перестановке каждой пары из индексов c_1, c_2, c_3 и, следовательно, он пропорционален тензору Леви-Чивиты, поскольку индексы пробегают только три значения. Коэффициент пропорциональности однозначно устанавливается, если положить $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, так что слева мы получим определение детерминанта матрицы U, а справа единицу $\epsilon_{123} = 1$, умноженную на искомый коэффициент. ■

Тогда

$$|\mathrm{color}\rangle' = \det U\,|\mathrm{color}\rangle,$$

а это значит, что нормировка и ненаблюдаемая глобальная фаза остаются неизменными при

$$\det U = 1. \tag{III.5.12}$$

Итак, обратимые преобразования цветовых состояний кварков (III.5.10) должны быть унимодулярными (III.5.12). Потребуем также, чтобы при преобразовании (III.5.10) сохранялась нормировка кварковых состояний в пространстве цвета, что означает унитарность матрицы U в (III.5.10).

Для антикварков преобразование удобнее записать в виде (см. законы групповых преобразований для фундаментальных представлений группы SU(3), которые мы описали при выводе (III.4.33)–(III.4.45))

$$\bar{s}_{c_1'} = \bar{s}_{c_1} (U^\dagger)^{c_1}_{\bullet c_1'}, \tag{III.5.13}$$

так что мезонное цветовое состояние типа[66] $\bar{s}_{c_1} s^{c_1}$ будет инвариантно относительно преобразований, если

$$U^\dagger U = \mathbb{1}. \tag{III.5.14}$$

В итоге, обратимые преобразования цвета кварков образуют группу $\mathrm{SU}_c(3)$, а адронные состояния реализуют синглетные[67] представления этой группы. Этот вывод находится в согласии с экспериментальными фактами.

Обратим теперь внимание на интегральное по всем пространствам состояние дикварка, составленного из кварков одного аромата, например, (uu) в барионе, который находится в основном состоянии, т. е. в состоянии с минимальной энергией. Интегральное состояние кварков в дикварке, если оно незацепленное, — это тензорное произведение состояний двух кварков в магнитном спиновом пространстве, в цветовом пространстве и в координатном (в привычной для учебников по квантовой механике терминологии называемого произведением спиновой волновой функции на цветовую и на координатную). По-другому, именно такое незацепленное произведение состояний в трех пространствах принято называть дикварком. Такое произведение должно быть антисимметрично относительно перестановки квантовых чисел тождественных кварков, которые подчиняются статистике Ферми–Дирака. В барионе, где относительный момент количества движения двух тождественных кварков равен нулю, состояние тождественных кварков-фермионов в трехмерном координатном пространстве симметрично относительно перестановки координат кварков. В то же время, так как барион — это синглет по цвету, чье состояние в пространстве цвета строится с помощью полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты, свернутого по всем трем индексам с цветовыми состояниями всех трех кварков, входящих в барион, мы приходим к выводу о том, что тензорное произведение цветовых состояний двух одинаковых кварков в дикварке (uu) в барионе всегда антисимметрично по перестановке квантового числа в пространстве цвета двух тождественных кварков. В итоге, тензорное произведение координатного и цветового состояний дикварка в барионе обладает антисимметрией по перестановке квантовых чисел кварков в этих квантовых пространствах, поскольку перестановка квантовых чисел тождественных кварков в этом произведении состояний двух пространств приводит к произведению множителей $+1$ и -1, соответствующих симметрии координатного и цветового состояний. Остается включить в рассмотрение симметрию состояния в магнитном спиновом пространстве: согласно статистике Ферми–Дирака состояние в спиновом пространстве такого дикварка может быть только симметрично по перестановке спиновых квантовых чисел кварков. Это имеет место, когда сумма проекций спина принимает максимально возможное значение, равное единице. Максимально возможное значение суммарной проекции равно суммарному спину s в мультиплете по суммарному спину, т. е. $s = 1$. Квадрат суммарного спина $\widehat{\boldsymbol{s}^2} = s(s+1)$ равен двум. В курсах квантовой механики при суммировании спинов двух частиц спина $\frac{1}{2}$ показывают, состояние в пространстве магнитного спина при всех допустимых значениях суммы проекций спинов для двух кварков действительно симметрично относительно перестановки спиновых квантовых чисел двух частиц только в случае суммарного спина, равного единице, независимо от того, чему равна проекция суммарного спина на выделенную ось. (При суммарном спине, равном нулю, спиновая состояние антисимметрично по перестановке спиновых квантовых чисел двух тождественных частиц, обладающих спином $\frac{1}{2}$.)[68] Это значит, что дикварк (uu) в барионе, находящемся в основном состоянии, может иметь только суммарный спин, равный единице, а значение суммарного спина, равное нулю, запрещено из-за принципа запрета Паули для тождественных фермионов.

Что касается изоспина дикварка (uu), то он вычисляется суммированием собственных значений проекций изоспина кварков и равен единице: у каждого u-кварка в паре проекция изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$, так что сумма проекций $T_3 = 1$.

Явный вид состояний, собственных по изоспину в пространстве ароматов и являющихся зацепленными на пространстве тензорного произведения состояний трех кварков в пространстве ароматов, на весовой диаграмме в представлении $\mathtt{T}^{(1,1)}$ для барионов со спином $\frac{1}{2}$ отличается от случая мезонов с суммарным спином, равным нулю, несмотря на то, что эти представления изоморфны по группе ароматов $\mathrm{SU_f}(3)$. В самом деле, для мезонов с нулевым спином достаточно было указать на то, что кварк

[66] Например, $\pi^+ \mapsto |\mathrm{color}\rangle = u^{c_1} \bar{d}_{c_1}$. В этом выражении подразумевается сумма по повторяющемуся индексу c_1.

[67] В синглетном представлении есть только один базисный вектор состояния, который при групповых преобразованиях переходит сам в себя, а значит, реализуется только тождественное преобразование, и все элементы абстрактной группы отображаются в оператор, равный единице. Такое представление не является точным: у точного представления соответствие элементов группы и матриц преобразований в векторном пространстве представления является взаимнооднозначным.

[68] Суммирование спинов двух частиц мы проводим в главе 4, **§ 1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов**, в разделе **1.1]Сложение моментов вращения**.

и антикварк имеют противоположно направленные спины. Сумма проекций равна нулю, а смена проекций спина кварка и антикварка на противоположные, т .е. перестановка квантовых чисел в спиновом пространстве, должна сопровождаться и сменой знака амплитуды вероятности для такого состояния кварка и антикварка. Например, для спинового состояния u- кварка и $\bar{u}$-антикварка

$$|\mathrm{spin}(u\bar{u})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_u\downarrow_{\bar{u}}\rangle - |\downarrow_u\uparrow_{\bar{u}}\rangle\right),$$

как это устанавливается при рассмотрении разложения тензорных произведений фундаментальных представлений группы SU(2) в сумму неприводимых представлений, или в рамках общепринятых понятий курсов квантовой механики при рассмотрении сложения моментов количества движения двух подсистем. Рассмотрение состояния в пространстве цвета кварка и антикварка в таких мезонах тоже было элементарным: цвета кварка и антикварка в сумме давали нуль в синглетном по цвету состоянии, т. е. бесцветное состояние. Для барионов в основном состоянии приходится учитывать как тождественность кварков, так и наличие цвета у кварков, что мы видели на примере дикварка (uu).

После этих замечаний можно более внимательно рассмотреть октет барионов со спином $\frac{1}{2}$ на рис. 3.11. На верхней линии расположены состояния (uud) и (ddu) с проекцией суммарного изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$, соответственно, и со странностью, равной нулю (в составе нет странных кварков). Это — изодублет: протон и нейтрон. На нижней линии расположены гипероны со странностью $S = -2$ (два странных кварка в составе) — $\Xi^0 = (uss)$ и $\Xi^- = (dss)$ с проекцией изоспина $T_3 = +\frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$, соответсвенно, и это — изодублет со странностью -2. На центральной линии расположен изотриплет со странностью[69] $S = -1$; состав странных гиперонов с проекциями суммарного изоспина $T_3 = +1$ и $T_3 = -1$ определяется однозначно: $\Sigma^+ = (uus)$ и $\Sigma^- = (dds)$. Центральная точка диаграммы весов октета барионов со спином $\frac{1}{2}$ с кварковым составом (uds), где собственные значения гиперзаряда, проекции T, U и V-изоспинов и электрического заряда равны нулю, вырождена с кратностью два, поэтому там выделены 2 квантовых состояния: Σ^0 с изоспином $T = 1$, $T_3 = 0$ и изоскаляр Λ с $T = 0$ (см. рис. 3.11).

Подобные вопросы удобнее обсуждать подробно после рассмотрения тензорных произведений неприводимых представлений и в группе симметрии ароматов, и в группе поворотов (координатное и спиновое пространства), и в цветовой группе (см. **§ 2. Магнитные моменты системы трех кварков** главы 4). Инструментом для построения разложения тензорного произведения неприводимых представлений в сумму неприводимых представлений являются схемы Юнга.

§ 6. Тензорный метод и схемы Юнга

Симметрия и антисимметрия тензоров неприводимых представлений и схемы Юнга, разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений. Задачи: фундаментальные представления группы SU(5) и квантовые числа базисных состояний, квадратичный оператор Казимира и индекс Дынкина для определяющего фундаментального представления группы SU(N).

Тензорный метод описания неприводимого представления простой компактной группы будем строить по аналогии с тем, как это делается для группы поворотов SO(3) в **§ 2. Генераторы спина как матрицы** главы 1.

• Стандартный вид неприводимого представления: изоморфизм базиса и компонент

Неприводимое представление группы — это $\mathcal{D}$-мерное векторное пространство состояний, которое мы рассмотрим с ортонормированным *стандартным* базисом состояний

$$|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle, \qquad k \in \left\{\overline{1,\mathcal{D}}\right\}, \qquad \langle\boldsymbol{\mu}^{(k')}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \delta^{k'k}.$$

Стандартный базис состояний неприводимого представления образован из общих собственных векторов для генераторов подалгебры Картана и, в случае вырожденности весовых векторов, для операторов Казимира подгрупп рассматриваемой простой компактной группы Ли. От стандартного базиса в векторном пространстве неприводимого представления, вообще говоря, можно перейти к другому $\mathcal{D}$-мерному базису с помощью обратимого линейного преобразования.

Определим *стандартный вид компонент вектора представления* $\mathcal{T}$ как произведение бра-вектора $\langle\mathcal{T}|$ на базисное кет-состояние $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ стандартного базиса пространства неприводимого представления

$$\langle\mathcal{T}|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle \equiv \mathcal{T}^{(k)} \tag{III.6.1}$$

[69] Напомним, что с точки зрения алгебраических структур странность есть не что иное, как гиперзаряд со смещением.

аналогично тому, как определялись компоненты T_α тензора первого ранга T как линейной функции на базисных состояниях $\mathfrak{e}_\alpha$: $T_\alpha = T(\mathfrak{e}_\alpha) = \langle T|\mathfrak{e}_\alpha\rangle$ (см. **§2. Генераторы спина как матрицы** главы 1). Однако базис пространства, на котором задается тензор T, может быть образован и в виде линейных комбинаций тензорных произведений базисных векторов определяющего пространства, представляющего собой аналог пространства фундаментального представления группы. Например, базис определяющего трехмерного евклидова пространства $\mathfrak{e}_\alpha$ задает и базис тензорного произведения $\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{e}_\beta \equiv \boldsymbol{E}_{\alpha\beta}$ девятимерного пространства, так что компоненты $\langle \mathcal{T}|\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{e}_\beta\rangle = \mathcal{T}(\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{e}_\beta) = \mathcal{T}_{\alpha\beta}$ — это уже стандартный вид компонент девятимерного вектора $\mathcal{T}$, записанных в базисе тензорного типа, а не в стандартном базисе. При этом в стандартном базисе компоненты задают тензор первого ранга по отношению к этому девятимерному базису, а в тензорном базисе компоненты задают тензор второго ранга. Если в пространстве состояний действует группа преобразований, то необходимо также специально решить задачу о наличии инвариантных подпространств.

Рассмотрим вопрос о базисе состояний более подробно на частном примере. В группе поворотов выбор декартова базиса пространства $\{\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z\}$, который не является стандартным базисом группы поворотов (см. главу 1), означает, что компоненты вектора $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|\mathfrak{e}_k\rangle = \mathcal{A}_k$ при $k = \{x, y, z\}$ описывают линейные поляризации вектора $\mathcal{A}_k$. Выбор базиса собственных векторов проекции спина векторного поля на ось z

$$|{+1}\rangle,\ |0\rangle,\ |{-1}\rangle$$

определяет стандартный базис в группе поворотов и задает стандартное представление вектора с соответствующими собственными значениями проекции спина:

$$\mathcal{A}_+ = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|{+1}\rangle, \qquad \mathcal{A}_- = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|{-1}\rangle, \qquad \mathcal{A}_0 = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}|0\rangle.$$

При групповых преобразованиях базиса, которые в неприводимом представлении имеют матричный вид

$$G_X|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle = \big(\hat{G}_X\big)^k_{\bullet k'}|\boldsymbol{\mu}^{(k')}\rangle, \tag{III.6.2}$$

можно определить их действие на компоненты вектора неприводимого представления в стандартном виде $\mathcal{T}^{(k)}$ формулой

$$\langle \mathcal{T}|\big(G_X|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle\big) \equiv \hat{G}_X\, \mathcal{T}^{(k)} \tag{III.6.3}$$

и найти, что

$$\hat{G}_X\, \mathcal{T}^{(k)} = \big(\hat{G}_X\big)^k_{\bullet k'}\, \mathcal{T}^{(k')}. \tag{III.6.4}$$

Соотношения (III.6.2) и (III.6.4) устанавливают *изоморфизм стандартного базиса неприводимого представления и стандартных компонент вектора представления* этого базиса[70].

Итак, мы установили, что закон преобразования стандартных компонент вектора неприводимого представления идентичен закону преобразования стандартного базиса этого неприводимого представления, а физический смысл этих компонент определяется тем, как выбран этот базис. Другими словами, имеет место изоморфизм между стандартным базисом неприводимого представления и набором значений стандартных компонент любого вектора неприводимого представления. Следовательно, все свойства базиса можно отождествить со свойствами компонент стандартного вектора неприводимого представления. В частности, действие генераторов группы Ли на компоненты стандартного вектора неприводимого представления изоморфно действию этих генераторов на соответствующие базисные состояния этого представления. Действие генератора подалгебры Картана на состояние стандартного базиса дает собственное значение этого генератора на этом базисном состоянии, т. е. квантовое число этого состояния, что согласно изоморфизму эквивалентно действию этого же генератора на стандартную компоненту вектора представления. Получается, что стандартной компоненте вектора представления соответствуют квантовые числа элемента базиса, определяющего стандартную компоненту. Аналогичное утверждение справедливо и д Для операторов Казимира любое состояние мультиплета является собственным с одним и тем же собственным значением. Поэтому действие оператора Казимира на стандартные компоненты вектора состояния неприводимого представления дает это собственное значение.

Стандартным вектором мы будем называть многокомпонентный объект размерностью равный размерности представления $\mathcal{D}$ с законом преобразования унитарной матрицей по формуле (III.6.4). Любые линейные комбинации двух стандартных векторов представления $\mathcal{T}_{[1]}$ и $\mathcal{T}_{[2]}$ также являются стандартным вектором

$$\langle \mathcal{T}_{[12]}| = c_{[1]}\langle \mathcal{T}_{[1]}| + c_{[2]}\langle \mathcal{T}_{[2]}| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}^{(k)}_{[12]} = c_{[1]}\mathcal{T}^{(k)}_{[1]} + c_{[2]}\mathcal{T}^{(k)}_{[2]}. \tag{III.6.5}$$

[70] Заметим, что как произвольное обратимое преобразование базиса, так и действие группового элемента на элементы базиса описывается одинаковой формулой, хотя они имеют разную понятийную природу. Обратимое преобразование базиса имеет более общий характер, чем действие элемента группы.

Так как стандартные векторы представления обладают заданными формулой (III.6.4) свойствами относительно групповых преобразований, а компоненты стандартных векторов при рассмотрении всевозможных суперпозиций принимают разные значения, имеет смысл ввести класс эквивалентности стандартных векторов, которому принадлежат все суперпозиции стандартных векторов неприводимого представления. Тогда можно говорить о том, что пространство неприводимого представления эквивалентно классу стандартных векторов этого представления, так как этому классу согласно изоморфизму принадлежат все возможные суперпозиции базисных состояний неприводимого представления[71].

Это утверждение можно также проиллюстрировать, записав

$$\mathcal{T}^{(k')}_{[12]} = \langle \mathcal{T}_{[12]} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \big(\mathcal{T}^{(k')}_{[12]}\big)^* = \langle \mathcal{T}_{[12]} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle^* = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k')} | \mathcal{T}_{[12]} \rangle,$$

где последнее скалярное произведение является коэффициентом разложения произвольного элемента пространства неприводимого представления по базису этого представления. Поэтому класс стандартных векторов представления изоморфен неприводимому представлению, а комплексно сопряженные коэффициенты разложения элемента неприводимого представления по базису равны компонентам стандартного вектора представления.

Употребляя в дальнейшем термин «произвольный стандартный вектор неприводимого представления», мы будем иметь в виду класс эквивалентности стандартного вектора, опуская слово «класс эквивалентности» Например, в группе поворотов можно сказать, что компоненты произвольного вектора $\mathcal{A}_\alpha$ описывают неприводимое представление спина $s = 1$, а действие генераторов группы поворотов на компоненты этого вектора совпадает с действием этих генераторов на базисные состояния спина $s = 1$ (см. (III.6.2) и (III.6.4)).

Но так же, как и в группе поворотов, в которой базис неприводимого представления со спином $s > 1$ можно составить в виде суммы тензорных произведений базисов неприводимого представления спина $s = 1$ и получить тензорное представление компонент пространства стандартного вектора представления, базис неприводимого представления простой компактной группы можно построить, исходя из суммы тензорных произведений состояний фундаментальных представлений группы, и получить тензорный вид стандартного вектора неприводимого представления группы в таком базисе тензорного типа.

Прежде чем приступить к рассмотрению тензорного базиса состояний неприводимых представлений группы SU(3), приведем пример неприводимого представления спина $s = 2$ в группе поворотов SO(3) согласно общему рассмотрению, проведенному в главе 1, где был построен переход от стандартного базиса к нестандартному (декартову): тензорный базис этого представления размерностью $2s + 1 = 5$ имеет вид[72]

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\gamma \cdot \tfrac{2}{3}\, \delta_{\alpha\beta}, \tag{III.6.6}$$

где в последнем слагаемом введен инвариантный относительно преобразований группы поворотов тензор, равный евклидовой метрике в декартовых координатах, которая не меняется при изометриях, включая повороты. В стандартом представлении

$$\langle \mathcal{T} | \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} \rangle = \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - T_{\gamma\gamma} \cdot \tfrac{2}{3}\, \delta_{\alpha\beta}, \qquad T_{\alpha\beta} = \langle \mathcal{T} | \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \rangle. \tag{III.6.7}$$

Тензорный базис (III.6.6) действительно содержит 5 независимых компонент, а стандартный вектор представления со спином $s = 2$ является симметричным бесследовым тензором второго ранга $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$. Произвольный тензор такого вида описывает класс, который изоморфен неприводимому представлению, а компоненты этого тензора изоморфны элементам неприводимого представления.

В частности, в качестве стандартного кет-вектора $\langle \mathcal{T}|$ неприводимого представления со спином $s = 2$ можно взять тензорное произведение $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| \otimes \langle \boldsymbol{\mathcal{B}}|$ двух стандартных кет-векторов $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\langle \boldsymbol{\mathcal{B}}|$ со спином $s = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}| \;\rightarrowtail\; \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| \otimes \langle \boldsymbol{\mathcal{B}}| \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \langle \mathcal{T} | \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} \rangle \;\rightarrowtail\; \big(\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}| \otimes \langle \boldsymbol{\mathcal{B}}|\big)\big(|\mathbf{e}_\alpha\rangle \otimes |\mathbf{e}_\beta\rangle + |\mathbf{e}_\beta\rangle \otimes |\mathbf{e}_\alpha\rangle - |\mathbf{e}_\gamma\rangle \otimes |\mathbf{e}_\gamma\rangle \cdot \tfrac{2}{3}\, \delta_{\alpha\beta}\big) = \\ = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{B}_\beta + \mathcal{A}_\beta \mathcal{B}_\alpha - \tfrac{2}{3}\, \delta_{\alpha\beta}\, (\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Резюмируя, подчеркнем, что свойства базиса неприводимого представления изоморфны свойствам стандартного вектора представления, а компоненты стандартного вектора представления численно равны комплексно сопряженным коэффициентам разложения элемента неприводимого представления по

[71] Вообще говоря, каждый набор из $\mathcal{D}$ комплексных чисел попадает в класс эквивалентности стандартного вектора $\mathcal{D}$-мерного неприводимого представления. Именно для такой ситуации и вводится понятие класса эквивалентности стандартного вектора представления.

[72] Симметризованный базис $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\beta\alpha}$ имеет только 5 линейно независимых состояний, так как вследствие равного нулю следа $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\gamma\gamma} = 0$, к примеру, вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{zz} = -\boldsymbol{\mathcal{E}}_{xx} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{yy}$, т. е. $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{zz}$ линейно зависим от $-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{xx}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{yy}$ и не может считаться базисным.

базису представления. Поэтому рассуждения о базисе неприводимого представления эквивалентны рассуждениям о стандартном векторе представления и его компонентах. При этом тензорная запись базиса представления определяет тензорный вид стандартного вектора этого представления.

6.1 Тензорный базис неприводимого представления группы SU(3)

Рассмотрим частный случай старшего веса неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ в группе SU(3)

$$\boldsymbol{\mu}_S = p\,\boldsymbol{\lambda}_1. \tag{III.6.8}$$

Состояние $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ можно построить, кратно умножая состояния первого фундаментального представления, которые мы пометим соответствующим номером k как

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_k, \qquad k \in \overline{\{1,p\}}.$$

Этот номер указывает на состояния разных фундаментальных представлений в составной модели, которые отличаются квантовыми числами, относящимися не к собственным значениям групповых генераторов подалгебры Картана и операторов Казимира в полном наборе наблюдаемых (в кварковой модели введение номера фундаментального состояния соответствует описанию идентичных по групповым характеристикам u-кварков фундаментального представления, например, в разных точках пространства и с разными направлениями спина кварков),

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \underbrace{|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_p}_{p}\ , \tag{III.6.9}$$

где мы молча подразумеваем симметризацию тензорного произведения по перестановкам состояний, как мы это описали в (III.2.13) на стр. 151 в главе 3, **§ 2. Неприводимые представления**. Антисимметричные вклады в данном выражении для состояния старшего веса просто тождественно равны нулю.

• Действие генераторов на тензорное произведение

Мы определили действие тензорного генератора на тензорном произведении так, что оно симметрично относительно перестановки компонент, действующих на каждый фундаментальный множитель (см.(III.2.15)). Например, согласно ((III.2.17)

$$\Gamma_l^{\otimes}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle \equiv \big\{(\Gamma_l \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_l)\big\}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle = \big\{(\boldsymbol{\lambda}_m)_l + (\boldsymbol{\lambda}_{m'})_l\big\}|\boldsymbol{\lambda}_m\rangle \otimes |\boldsymbol{\lambda}_{m'}\rangle.$$

Собственные значения тензорных генераторов подалгебры Картана на состоянии (III.6.9), т. е. собственные значения для части наблюдаемых в полном наборе, определяющем квантовые числа базисных состояний, согласно (III.2.17), где было определено действие тензорного генератора на тензорное произведение в виде суммы действия генератора каждого фундаментального представления на каждый из множителей в тензорном произведении, равны компонентам весового вектора (III.6.8) у заданного состояния старшего веса $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$ (III.6.9) в согласии с компонентами фундаментального вектора $\boldsymbol{\lambda}_1$ в (III.4.1):

$$\hat{T}_3|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p}{2}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle, \qquad \hat{\Gamma}_8|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = \frac{p}{2\sqrt{3}}\,|\boldsymbol{\mu}_S\rangle.$$

Определим переход от дираковских обозначений для базисных состояний первого фундаментального представления (см. рис. 3.8 в **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3)

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle \cong |u\rangle, \quad |\boldsymbol{\nu}_2\rangle \cong |d\rangle, \quad |\boldsymbol{\nu}_3\rangle \cong |s\rangle \quad \text{на примере кварковой модели}$$

к стандартным базисным векторам триплета **3**:

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle \equiv \mathfrak{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\nu}_2\rangle \equiv \mathfrak{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\nu}_3\rangle \equiv \mathfrak{e}_3 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{III.6.10}$$

которые задают стандартные контравариантные векторы — элементы первого фундаментального представления

$$\boldsymbol{v} = v^{\mathrm{F}}\mathfrak{e}_{\mathrm{F}} \tag{III.6.11}$$

со стандартными компонентами v^{F}, которые мы пронумеровали верхним индексом F.

Для описания групповых преобразований в векторном пространстве триплетного представления достаточно сначала задать преобразования от одного базисного состояния к другому, так что в силу линейности групповых преобразований в представлении любое групповое преобразование описывается как суперпозиция преобразований базисных векторов. Но переход от одного базисного вектора к другому вследствие группового преобразования можно эквивалентно рассматривать как переход от одной компоненты вектора к другой. Скажем,

$$\mathfrak{e}_1 \overset{g_{21}}{\longmapsto} \mathfrak{e}_2 \quad \cong \quad v^{(1)} \overset{g_{21}}{\longmapsto} v^{(2)}$$

и т.п. Поскольку в векторном пространстве триплета групповые преобразования базисного состояния старшего веса приводят к суперпозициям базисных векторов, т. е. к контравариантному вектору (III.6.11), можно говорить, что вследствие суперпозиции групповых преобразований исходная компонента триплета $v^{(1)}$, отвечающая базисному состоянию старшего веса, переходит во все компоненты вектора v^{F}. Это так в силу неприводимости представления. Обобщим эти рассуждения для триплета на другие неприводимые представления большей размерности.

Тензоры так же, как и векторы, можно записать в виде разложения по базису тензорного пространства. Например, для контравариантных тензоров второго ранга

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}\mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}.$$

Рассмотрим базис $\mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}$ неприводимого представления $\mathtt{T}^{(2,0)}$. Для построения этого базиса выберем сначала состояние старшего веса

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2$$

и перейдем от дираковских к тензорным обозначениям:

$$|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2 \mapsto \mathfrak{e}_{11} = \mathfrak{e}_1 \otimes \mathfrak{e}_1.$$

Этот базисный вектор задает в неприводимом представлении элемент вида

$$\mathcal{T}^{(11)}\mathfrak{e}_{11} = \mathcal{T}^{(11)}\mathfrak{e}_1 \otimes \mathfrak{e}_1,$$

причем эту стандартную компоненту тензора можно представить в виде произведения стандартных компонент векторов из составляющих данное представление двух фундаментальных триплетных представлений так, что

$$\mathcal{T}^{(11)} \simeq v^{(1)}_{[1]}v^{(1)}_{[2]}.$$

Изоморфное соответствие при переходе от дираковских обозначений к компонентам тензора обозначим следующим образом:

$$v^{(1)}|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_k \mapsto v^{(1)}_{[k]}.$$

В $v^{\mathrm{F}}_{[k]}$ при $\mathrm{F} = 1$ — это первая стандартная компонента вектора $\boldsymbol{v}_{[k]}$, который описывает *состояние* триплета первого фундаментального представления k-го пространства в тензорном произведении. Одновременно мы ввели стандартный вектор представления для триплета $\mathtt{T}^{(1,0)}$

$$\langle v|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_k = v^{(1)}_{[k]},$$

и для $\mathtt{T}^{(2,0)}$

$$\langle\mathcal{T}|\mathfrak{e}_{11}\rangle = \langle\mathcal{T}|\big(|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2\big) = \mathcal{T}^{(11)},$$

что в случае $\langle\mathcal{T}| = \langle v| \otimes \langle v|$ дает

$$\big(\langle v| \otimes \langle v|\big)\big(|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{\lambda}_1\rangle_2\big) = v^{(1)}_{[1]}v^{(1)}_{[2]}.$$

В таких компонентных обозначениях связь (III.6.9) между тензорным произведением состояний старшего веса триплетного фундаментального представления и состоянием старшего веса представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ можно записать в тензорном виде

$$\langle\mathcal{T}^S|\boldsymbol{\mu}_S\rangle \mapsto \mathcal{T}^{1\ldots1} \simeq v^{(1)}_{[1]}\cdots v^{(1)}_{[p]} \quad \text{или} \quad \mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p} \simeq v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\cdots v^{\mathrm{F}_p}_{[p]} \qquad \text{при } \mathrm{F}_1 = \ldots = \mathrm{F}_p = 1. \tag{III.6.12}$$

В этой записи компонента тензора $\mathcal{T}^{1\ldots1}$ не равна единице, как это имеет место для базисного состояния $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$. При групповых преобразованиях в (III.6.12) исходная компонента каждого фундаментального

триплета $v^{(1)}$, отвечающая базисному состоянию старшего веса, переходит во все компоненты этого фундаментального вектора v^{F}. В результате компонента тензора $\mathcal{T}^{1\ldots1}$ порождает все другие компоненты $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p}$. Получающийся таким образом тензор реализует неприводимое представление. Каждому нормированному элементу пространства неприводимого представления соответствует набор пропорциональных друг другу тензоров, который мы будем называть классом: все тензоры одного класса пропорциональны друг другу и по построению обладают одними и теми же свойствами при групповых преобразованиях. Читатель может освежить свои знания по теме о компонентах триплета, обратившись к описанию формул (III.4.15)–(III.4.17) при рассмотрении кварковой модели.

Итак, состояние старшего веса неприводимого представления задает класс эквивалентности тензоров. Для состояния старшего веса первого фундаментального представления элемент этого класса эквивалентности — любой вектор v^{F} триплетного представления. Для неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ необходимо описать произвольный элемент класса эквивалентности для состояния старшего веса, построенного из состояний старшего веса первого фундаментального представления.

Подчеркнем, что формулировка в (III.6.12) показывает, что старший вектор неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ по построению в покомпонентной тензорной записи симметричен относительно перестановок порядка индексов, которые нумеруют компоненты векторов фундаментальных представлений, входящих в тензорное произведение (эти индексы указаны в квадратных скобках). Важно также отметить, что веса всех базисных состояний представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ расположены на сторонах треугольника весовой диаграммы и внутри треугольника, а значит, все веса невырождены: каждому весу отвечает единственное состояние неприводимого представления.

Все базисные состояния неприводимого представления группы и их суперпозиции в общем случае получаются многократным действием понижающих генераторов на старший вектор состояния. В случае первого, т. е. триплетного фундаментального представления, это значит, что все состояния этого неприводимого представления отвечают суперпозициям базисных состояний, т. е. различным компонентам вектора v^{F}, для которых индекс, нумерующий компоненты, может принимать любые значения от единицы до трех, в то время как сам вектор $\boldsymbol{v}$ символизирует собой все возможные суперпозиции базисных состояний триплетного фундаментального представления.

• Тензоры как элементы неприводимого представления

Действие тензорного понижающего оператора, определенного на пространстве тензорного произведения нескольких первых фундаментальных представлений, как мы уже указали выше при его введении на стр. 152 в формуле (III.2.15), определяется как сумма действия соответствующего оператора фундаментального представления на каждый из фундаментальных сомножителей в тензорном произведении, т. е. это действие определяется как операция, симметричная по отношению к порядку записи компонент в тензорном произведении состояний фундаментальных представлений. Следовательно, действие тензорных понижающих операторов не изменяет симметричности тензорного произведения относительно перестановок множителей в этом тензорном произведении. Пусть старший вектор состояния задан в виде симметричного тензорного произведения нескольких элементов одного из фундаментальных представлений. Тогда все базисные состояния неприводимого представления с этим старшим вектором состояния, записанные в форме сумм тензорных мономов из элементов базиса фундаментального представления, симметричны относительно перестановок порядка индексов, нумерующих компоненты стандартных векторов состояния фундаментального представления, составляющих тензорное произведение, на котором мы строим неприводимое представление рассматриваемой алгебры $\mathfrak{su}(3)$ с заданным состоянием старшего веса.

Например, понижающий корневой генератор $\hat{T}_-$ преобразует состояние старшего веса $\boldsymbol{\mu}_S \equiv \mathbf{e}_1$ триплета $\mathtt{T}^{(1,0)}$, пространство которого принято считать контравариантным, таким образом:

$$\hat{T}_-\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Поэтому тензорный корневой генератор при действии на состояние старшего веса представления $\mathtt{T}^{(2,0)}$ дает

$$\hat{T}_-^{\otimes}\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_{12} \equiv \mathbf{e}_{21}.$$

Отсюда следует, что компоненты тензора на таком базисном векторе являются симметричными по перестановке порядка контравариантных индексов

$$\mathcal{T}^{12} = \mathcal{T}^{21}.$$

Подчеркнем, что при переходе от дираковских обозначений к тензорным базис состояний, который получается из состояния старшего веса

$$\underbrace{\mathbf{e}_{1\ldots1}}_{p} \;\equiv\; \underbrace{\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_1}_{p},$$

при действии тензорных понижающих операторов, симметризаованных в сумме операторов согласно свойству аддитивности определения действия генератора на тензорном произведении в ((III.2.17), также является симметричным по перестановке своих индексов

$$\mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p}, \quad \text{например,} \quad \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2} \equiv \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1} \otimes \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_2} + \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_2} \otimes \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_1} \equiv \mathfrak{e}_{\mathrm{F}_2\mathrm{F}_1}.$$

Следовательно, симметричным относительно перестановки своих компонент является и тензор, компоненты которого определяют коэффициенты разложения элемента неприводимого представления по такому симметричному базису

$$\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p}, \quad \text{например,} \quad \mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2} = \mathcal{T}^{\mathrm{F}_2\mathrm{F}_1}.$$

Это значит, что все суперпозиции состояний неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ в тензорной записи эквивалентны симметричным контравариантным тензорам ранга p, т. е. класс симметричных контравариантных отличных от нуля тензоров $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p}$ — это класс эквивалентности относительно действия группы для состояния старшего веса, построенного как произведение p состояний старшего веса первого фундаментального представления. Компонента такого симметричного тензора при действии групповых преобразований изоморфна элементу базиса неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$, а также указывает на физические свойства элемента базиса неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$, заданных в форме квантовых чисел и идентифицирующих элемент базиса.

Подчеркнем, что симметричное произведение состояний старшего веса нескольких триплетных фундаментальных представлений как элемент базиса пространства представления в тензорной записи задает ненулевую компоненту симметричного контравариантного тензора со всеми индексами, равными номеру базисного состояния старшего веса в триплете. Состояние в пространстве симметризованного тензорного произведения триплетных фундаментальных представлений описывается симметричным по перестановкам всех контравариантных индексов тензором ранга p, т. е. тензором, который описывает неприводимое представление типа $\mathtt{T}^{(p,0)}$.

В явном виде при $p = 2$, например, понижающие операторы в представлении со старшим вектором состояния (III.6.9) набраны из понижающих операторов фундаментального представления и выражаются через матрицы Гелл-Манна на каждой из фундаментальных компонент тензорного произведения, которые мы пометили номером в квадратных скобках так же, как контрвекторы фундаментальных представлений $\mathtt{T}^{(1,0)}$ (см. связь генераторов и матриц Гелл-Манна в (III.4.26)),

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_- \mapsto \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \tfrac{1}{2}\Big(\big\{\lambda_1^{[1]} - \mathrm{i}\lambda_2^{[1]}\big\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \big\{\lambda_1^{[2]} - \mathrm{i}\lambda_2^{[2]}\big\}\Big),\\
&\hat{V}_- \mapsto \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}} = \tfrac{1}{2}\Big(\big\{\lambda_4^{[1]} - \mathrm{i}\lambda_5^{[1]}\big\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \big\{\lambda_4^{[2]} - \mathrm{i}\lambda_5^{[2]}\big\}\Big), \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\\
&\hat{U}_- \mapsto \sqrt{2}\,\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_2} = \tfrac{1}{2}\Big(\big\{\lambda_6^{[1]} - \mathrm{i}\lambda_7^{[1]}\big\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \big\{\lambda_6^{[2]} - \mathrm{i}\lambda_7^{[2]}\big\}\Big).
\end{aligned} \tag{III.6.13}$$

На самом деле в этой записи номера в квадратных скобках можно считать избыточными, так как порядок действия единичных матриц и матриц Гелл-Манна указан в явном виде тензорного произведения этих матриц. Они становятся необходимыми только при переходе к традиционной компонентной записи тензорных произведений типа формулы (III.6.12), в которой формальный порядок записи компонент векторов состояний фундаментальных представлений может быть произвольным[73].

Тензорные корневые операторы симметричны относительно перестановок фундаментальных представлений, пронумерованных и упорядоченных цифрами в квадратных скобках. Поэтому и тензор, описывающий состояние, полученное действием тензорного понижающего корневого оператора из состояния старшего веса, будет симметричным относительно перестановок индексов компонент векторов состояний фундаментальных представлений. Следовательно, любое состояние исследуемого неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ соответствует симметричному по перестановкам индексов тензору

$$\mathcal{T}^{\{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p\}}, \quad \text{в частности,} \quad \mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p} \simeq v_{[1]}^{\{\mathrm{F}_1} \cdots v_{[p]}^{\mathrm{F}_p\}}, \tag{III.6.14}$$

где *фигурные скобки означают симметризацию по перестановкам индексов*, например, при $p = 2$

$$\mathcal{T}^{\{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\}} = \frac{1}{2!}(\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2} + \mathcal{T}^{\mathrm{F}_2\mathrm{F}_1}).$$

[73] Для комфортного восприятия написанного приведем пример из привычного читателю тензорного произведения двух пространств функций действительного аргумента, элемент которого мы называем бинарной функцией. Можно написать в упорядоченной форме $\sin_{[1]} \otimes \ln_{[2]} + \mathrm{tg}_{\,[1]} \otimes \exp_{[2]}$, а можно в форме $(\sin x)\cdot(\ln y) + (\mathrm{tg}\, x)\cdot(\exp y)$. В последней форме записи упорядочение присутствует в скрытой форме, так как аргумент первого пространства мы обозначаем как x, а второго — как y. Если рассматривать тензорное произведение покомпонентно, то оно сводится к умножению компонент.

Итак, неприводимое представление $\mathsf{T}^{(p,0)}$ с заданным состоянием старшего веса специального вида (III.6.8) по построению описывается симметричным контравариантным тензором ранга p.

Совершенно аналогично неприводимое представление $\mathsf{T}^{(0,p)}$ с заданным состоянием старшего веса вида

$$\boldsymbol{\mu}_S = p\,\boldsymbol{\lambda}_2 \tag{III.6.15}$$

описывается симметричным ковариантным тензором ранга p

$$\mathcal{T}_{\{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_p\}} \simeq \bar{v}^{[1]}_{\{\mathrm{F}'_1}\cdots\bar{v}^{[p]}_{\mathrm{F}'_p\}}, \tag{III.6.16}$$

построенным из ковекторов второго фундаментального представления $\bar{\mathbf{3}}$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_2$, причем и для нижних индексов в (III.6.16) *фигурные скобки означают симметризацию по перестановкам индексов*. По каждому из верхних индексов тензоры (III.6.14) преобразуются так же, как входящие в тензорное произведение контрвекторы фундаментального представления, т. е. 3×3-матрицами представления группы g (умножение слева), а тензоры (III.6.16) по каждому из нижних — 3×3-матрицами представления группы $g^\dagger$ (умножение справа).

Приведенное нами тензорное описание неприводимых представлений можно изображать в виде графических схем, однозначно соответствующих типу неприводимого представления. Эти схемы в силу своей наглядности и строгих правил соответствия тензорам традиционно используют для описания неприводимых представлений и разложения тензорных произведений неприводимых представлений в сумму по инвариантным подпространствам, т. е. в прямую сумму неприводимых представлений.

Для этих целей необходимо определить элементы, из которых составляют схемы, и обосновать соответствие этих элементов простейшим неприводимым представлениям, которых в группе SU(3) три: синглет, триплет и антитриплет.

Итак, поскольку матрицы преобразований унимодулярны ($\det g = 1$), особую роль при рассмотрении представлений группы играет тензор Леви-Чивиты (см. краткую сводку сведений о тензорном анализе в Приложении, **§ 2. Формулы тензорного анализа**). А именно, величина

$$\bar{e} \equiv \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} v^{\mathrm{F}_2}_{[2]} v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}, \tag{III.6.17}$$

которую принято называть синглетом, является инвариантом. При групповых преобразованиях тензор Леви-Чивиты остается инвариантным, так как он преобразуется как ковариантный тензор третьего ранга с помощью обратной матрицы по каждому своему индексу:

$$\epsilon'_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3} = \epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}'_2\mathrm{F}'_3}(g^{-1})^{\mathrm{F}'_1}_{\bullet\,\mathrm{F}_1}(g^{-1})^{\mathrm{F}'_2}_{\bullet\,\mathrm{F}_2}(g^{-1})^{\mathrm{F}'_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_3} = \det g^{-1}\cdot\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}. \tag{III.6.18}$$

Это значит, что синглет $\bar{e}$ отвечает антисимметризованному произведению трех триплетов.

Величина же

$$\bar{w}_{\mathrm{F}_3} \equiv \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} v^{\mathrm{F}_2}_{[2]} \tag{III.6.19}$$

представляет из себя векторное произведение двух векторов триплетного представления и при действии группы преобразуется по сопряженному фундаментальному представлению антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$. Покажем это в явном виде. Действительно, так как групповые преобразования дают[74]

$$\bar{w}'_{\mathrm{F}_3} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}\, g^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}'_1} g^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}'_1}_{[1]}\, v^{\mathrm{F}'_2}_{[2]} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}''_3}\, g^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}'_1} g^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}'_2} g^{\mathrm{F}''_3}_{\bullet\,\mathrm{F}'_3} (g^\dagger)^{\mathrm{F}'_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_3} v^{\mathrm{F}'_1}_{[1]}\, v^{\mathrm{F}'_2}_{[2]},$$

где мы использовали унитарность $g^{\mathrm{F}''_3}_{\bullet\,\mathrm{F}'_3}(g^\dagger)^{\mathrm{F}'_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_3} = \delta^{\mathrm{F}''_3}_{\mathrm{F}_3}$, то с учетом

$$\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}''_3}\, g^{\mathrm{F}_1}_{\bullet\,\mathrm{F}'_1} g^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}'_2} g^{\mathrm{F}''_3}_{\bullet\,\mathrm{F}'_3} = \det g\cdot\epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}'_2\mathrm{F}'_3}$$

находим, что ковариантный вектор $\bar{w}'_{\mathrm{F}_3}$ преобразуется по закону преобразования антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$

$$\bar{w}'_{\mathrm{F}_3} = \bar{w}_{\mathrm{F}'_3}\,(g^\dagger)^{\mathrm{F}'_3}_{\bullet\,\mathrm{F}_3}. \tag{III.6.20}$$

Мы показали: ковектор антитриплета по своим трансформационным свойствам относительно действия группы эквивалентным образом может быть представлен как векторное произведение двух контвекторов. Это значит, что антитриплет может быть описан антисимметризованным произведением двух триплетов.

[74] Если вместо контрвекторов v^{F} использовать два ковектора $\bar{v}_{\mathrm{F}}$ и их свертку с $\epsilon^{\mathrm{F}\mathrm{F}'\mathrm{F}''}$, то мы, естественно, придем к контрвектору фундаментального представления **3**.

В итоге, мы можем говорить о трех элементах, на которых можно строить схемы неприводимых представлений: триплет, антисимметризованное произведение двух триплетов и антисимметизованное произведение трех триплетов. Эти элементы соответствуют триплету, антитриплету и синглету группы SU(3).

Для знакомых с дифференциальными формами и операцией дуальности по Ходжу[75] можно определить 1-форму

$$\bar{\boldsymbol{v}} \equiv \bar{v}_{\mathrm{F}} \mathfrak{h}^{\mathrm{F}},$$

где базис антитриплетного фундаментального представления задается в полной аналогии с базисом триплетного фундаментального представления (см. рис. 3.8 в **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3) с помощью эрмитова сопряжения

$$\mathfrak{h}^{\mathrm{F}} = \big(\mathfrak{e}_{\mathrm{F}}\big)^{\dagger} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^{(1)} = \big(1,0,0\big), \quad \mathfrak{h}^{(2)} = \big(0,1,0\big), \quad \mathfrak{h}^{(3)} = \big(0,0,1\big),$$

а на примере кварковой модели

$$|\bar{\boldsymbol{\nu}}_3\rangle \cong \bar{u}, \quad |\bar{\boldsymbol{\nu}}_2\rangle \cong \bar{d}, \quad |\bar{\boldsymbol{\lambda}}_2\rangle \cong \bar{s}.$$

Обратите внимание на то, в какой последовательности пронумерованы базисные состояния:

$$\bar{u} \mapsto \mathfrak{h}^{(1)}, \quad \bar{d} \mapsto \mathfrak{h}^{(2)}, \quad \bar{s} \mapsto \mathfrak{h}^{(3)}. \tag{III.6.21}$$

Такая нумерация возникает естественным образом вследствие определения ковектора (III.6.19) и закона его преобразования (III.6.20). Например, компонента

$$\bar{w}_3 = \epsilon_{312}\, v^{(1)}_{[1]} v^{(2)}_{[2]} + \epsilon_{321}\, v^{(2)}_{[1]} v^{(1)}_{[2]} = v^{(1)}_{[1]} v^{(2)}_{[2]} - v^{(2)}_{[1]} v^{(1)}_{[2]}$$

обладает такими же электрическим зарядом и проекцией изоспина в тензорном произведении[76], как первый член в сумме $\epsilon_{312} v^{(1)}_{[1]} v^{(2)}_{[2]}$. Квантовые числа в тензорном произведении равны сумме квантовых чисел множителей, т. е. электрический заряд компоненты $\bar{w}_3$ равен сумме электрических зарядов u- и d-кварков, которые отвечают компонентам триплета $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$, $Q = Q_u + Q_d = +2/3 - 1/3 = +1/3$, а проекция изоспина $T_3 = T_3[u] + T_3[d] = 1/2 - 1/2 = 0$, которые равны заряду и проекции изоспина базисного состояния $\bar{s}$ в антитриплете, что и означает, что третья компонента ковектора $\bar{w}_{\mathrm{F}}$ описывает состояние старшего веса второго фундаментального представления.

Задача 38. Сравните квантовые числа (собственные значения проекции изоспина и электрический заряд) у базисных состояний антитриплетов, которые отвечают компонентам ковектора $\bar{v}_{\mathrm{F}}$ в (III.4.17) и ковектора $\bar{w}_{\mathrm{F}} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}$ в (III.6.19).

Задача 39. Ввиду отождествления компонент антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$ с компонентами $\bar{w}_{\mathrm{F}_3} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}$ постройте действие понижающих генераторов на компоненты $\bar{w}_{\mathrm{F}_3}$ и покажите, что

$$\langle \bar{d}|\big(\hat{U}_-|\bar{s}\rangle\big) = -1, \quad \langle \bar{u}|\big(\hat{V}_-|\bar{s}\rangle\big) = -1, \quad \langle \bar{u}|\big(\hat{T}_-|\bar{d}\rangle\big) = -1.$$

Докажите, что для второго фундаментального представления SU(3) лямбда-матрицы $\bar{\lambda}_a$ выражаются через матрицы Гелл-Манна

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda^*_a.$$

Решение. Для рассмотрения действия операторов на состояния принято переходить от компонент триплета v^{F} к собственно состояниям согласно соотношению, используя символическое исчисление. При символическом исчислении используют указатель на объект вместо объекта

$$v \mapsto \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}, \qquad v^{(1)} \mapsto |u\rangle \cong u, \quad v^{(2)} \mapsto |d\rangle \cong d, \quad v^{(3)} \mapsto |s\rangle \cong s. \tag{III.6.22}$$

Тогда $(v^{\mathrm{F}})^{\dagger}$ — это трехкомпонентная строка из соответствующих бра-векторов. Поэтому

$$(v^{\mathrm{F}_1})^{\dagger} v^{\mathrm{F}_2} = \delta^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2},$$

[75] Если в метрическом N-мерном пространстве задана k-форма с компонентами $\omega_{\mu_1\ldots\mu_k}$, то дуальная по Ходжу $(N-k)$-форма $*\omega$ имеет компоненты $*\omega_{\mu_{k+1}\ldots\mu_N} = \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_k\mu_{k+1}\ldots\mu_N}\omega^{\mu_1\ldots\mu_k}$, где верхние контравариантные компоненты получены из нижних ковариантных операцией поднимания индекса обратной метрикой: $\omega^{\mu_1\ldots\mu_k} = g^{\mu_1\mu'_1}\ldots g^{\mu_k\mu'_k}\omega_{\mu'_1\ldots\mu'_k}$.

[76] Обратите внимание, что второе слагаемое $\epsilon_{321} v^{(2)}_{[1]} v^{(1)}_{[2]}$ в сумме имеет те же квантовые числа и также является собственным для генераторов подалгебры Картана, действующих на тензорное произведение.

что следует понимать как запись произведений тройки бра-векторов на тройку кет-векторов с учетом ортонормированности базиса триплета. Например, $(v^{(1)})^\dagger v^{(2)} = \langle u|d\rangle = 0$. У символа $v^{\mathrm{F}}_{[k]}$ индекс k в квадратных скобках указывает на квантовые числа в других пространствах, дополняющих состояние до интегрального. Запишем определение антитриплета с учетом нормировки состояния на единицу

$$\bar w_{\mathrm{F}_3} \equiv \tfrac{1}{\sqrt2}\,\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} \wedge v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}, \qquad v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} \wedge v^{\mathrm{F}_2}_{[2]} \equiv \tfrac12\big(v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} v^{\mathrm{F}_2}_{[2]} - v^{\mathrm{F}_2}_{[1]} v^{\mathrm{F}_1}_{[2]}\big). \tag{III.6.23}$$

В правой части второй формулы опущен значок тензорного произведения, а в левой символ $\wedge$ его фактически замещает, добавляя антисимметризацию компонент тензорного произведения. Когда мы вычисляем произведение бра- и кет-векторов на тензорном произведении пространств, компоненты которого мы обозначили номерами [1] и [2], необходимо перемножать состояния бра- и кет- с одинаковыми номерами. Перемножение бра- и кет- с разными номерами, т.е. из разных пространств состояний не имеет смысла. Например, если $\mathrm{F}_3 = 1$, то

$$\begin{aligned}\bar w_1^\dagger \bar w_1 &= \big(\tfrac{1}{\sqrt2}\,\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2 1}\, v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} \wedge v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}\big)^\dagger \big(\tfrac{1}{\sqrt2}\,\epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}'_2 1}\, v^{\mathrm{F}'_1}_{[1]} \wedge v^{\mathrm{F}'_2}_{[2]}\big) = \\ &= \big(\tfrac{1}{\sqrt2}\big)^2 \big(v^{(2)}_{[1]} v^{(3)}_{[2]} - v^{(3)}_{[1]} v^{(2)}_{[2]}\big)^\dagger \big(v^{(2)}_{[1]} v^{(3)}_{[2]} - v^{(3)}_{[1]} v^{(2)}_{[2]}\big) = \\ &= \tfrac12\Big(\big(v^{(2)}_{[1]}\big)^\dagger v^{(2)}_{[1]} \cdot \big(v^{(3)}_{[2]}\big)^\dagger v^{(3)}_{[2]} + \big(v^{(3)}_{[1]}\big)^\dagger v^{(3)}_{[1]} \cdot \big(v^{(2)}_{[2]}\big)^\dagger v^{(2)}_{[2]}\Big) = 1.\end{aligned}$$

В явном виде для компонент $\bar w$ мы получаем следующие выражения, для которых по определению вводим обозначения как для элементов базиса антитриплета:

$$\begin{aligned}\bar w_1 &= \sqrt2\,\epsilon_{123}\, v^{(2)}_{[1]} \wedge v^{(3)}_{[2]} = \sqrt2\,\epsilon_{123}\, d_{[1]} \wedge s_{[2]} = \sqrt2\, d_{[1]} \wedge s_{[2]} \equiv |\bar u\rangle, \\ \bar w_2 &= \sqrt2\,\epsilon_{231}\, v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(1)}_{[2]} = \sqrt2\,\epsilon_{231}\, s_{[1]} \wedge u_{[2]} = \sqrt2\, s_{[1]} \wedge u_{[2]} \equiv |\bar d\rangle, \\ \bar w_3 &= \sqrt2\,\epsilon_{312}\, v^{(1)}_{[1]} \wedge v^{(2)}_{[2]} = \sqrt2\,\epsilon_{312}\, u_{[1]} \wedge d_{[2]} = \sqrt2\, u_{[1]} \wedge d_{[2]} \equiv |\bar s\rangle.\end{aligned} \tag{III.6.24}$$

Заметим, что так определенная компонента антитриплета при действии на нее тензорных операторов подалгебры Картана даст собственные числа компонент триплета, обозначенных той же буквой (u,d, или s), но с обратным знаком. Рекомендуем читателю также убедиться в ортонормированности этих элементов базиса антитриплета. Используем соотношения, установленные в первом фундаментальном представлении (см. раздел **4.3 Матрицы Гелл-Манна** в **§4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3) для понижающих генераторов, когда результаты их действие отличны от нуля:

$$\hat T_-|u\rangle = |d\rangle, \quad \hat V_-|u\rangle = |s\rangle, \quad \hat U_-|d\rangle = |s\rangle.$$

Тогда в результате действия на состояния антитриплета понижающим оператором $\hat T_-$ найдем

$$\begin{aligned}\hat T_-|\bar u\rangle &= \hat T_- \bar w_1 = \sqrt2\,\hat T_-\, d_{[1]} \wedge s_{[2]} = 0_{[1]} \wedge s_{[2]} + d_{[1]} \wedge 0_{[2]} = 0, \\ \hat T_-|\bar d\rangle &= \hat T_- \bar w_2 = \sqrt2\,\hat T_-\, s_{[1]} \wedge u_{[2]} = 0_{[1]} \wedge u_{[2]} + \sqrt2\, s_{[1]} \wedge d_{[2]} = \\ &= \sqrt2\, v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(2)}_{[2]} = -\sqrt2\, v^{(2)}_{[1]} \wedge v^{(3)}_{[2]} = -\sqrt2\, d_{[1]} \wedge s_{[2]} = -|\bar u\rangle, \\ \hat T_-|\bar s\rangle &= \hat T_- \bar w_3 = \sqrt2\,\hat T_-\, u_{[1]} \wedge d_{[2]} = \sqrt2\, d_{[1]} \wedge d_{[2]} + u_{[1]} \wedge 0_{[2]} = 0.\end{aligned}$$

Аналогично для понижающего оператора $\hat U_-$ отличный от нуля результат имеет вид

$$\begin{aligned}\hat U_-|\bar s\rangle &= \hat U_- \bar w_3 = \sqrt2\,\hat U_-\, u_{[1]} \wedge d_{[2]} = 0_{[1]} \wedge d_{[2]} + \sqrt2\, u_{[1]} \wedge s_{[2]} = \\ &= \sqrt2\, v^{(1)}_{[1]} \wedge v^{(3)}_{[2]} = -\sqrt2\, v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(1)}_{[2]} = -\sqrt2\, v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(1)}_{[2]} = -|\bar d\rangle,\end{aligned} \tag{III.6.25}$$

и для $\hat V_-$

$$\begin{aligned}\hat V_-|\bar s\rangle &= \hat V_- \bar w_3 = \sqrt2\,\hat V_-\, u_{[1]} \wedge d_{[2]} = \sqrt2\, s_{[1]} \wedge d_{[2]} + u_{[1]} \wedge 0_{[2]} = \\ &= \sqrt2\, v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(2)}_{[2]} = -\sqrt2\, v^{(2)}_{[1]} \wedge v^{(3)}_{[2]} = -\sqrt2\,\epsilon_{123} v^{(2)}_{[1]} \wedge v^{(3)}_{[2]} = -|\bar u\rangle.\end{aligned} \tag{III.6.26}$$

Тогда матрицы понижающих операторов в антитриплетном представлении имеют вид

$$\hat T_- = -\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \hat U_- = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \hat V_- = -\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

что при подстановке в определение генераторов антитриплетного представления $\bar\Gamma_a = \bar\lambda_a/2$

$$\begin{aligned}\bar\lambda_1 &= T_+ + T_-, \quad \bar\lambda_2 = -\mathrm{i}\,(T_+ - T_-), \\ \bar\lambda_4 &= V_+ + V_-, \quad \bar\lambda_5 = -\mathrm{i}\,(V_+ - V_-), \\ \bar\lambda_6 &= U_+ + U_-, \quad \bar\lambda_7 = -\mathrm{i}\,(U_+ - U_-),\end{aligned}$$

приводит к

$$\bar\lambda_1 = -\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = -\lambda_1 = -\lambda_1^*, \quad \bar\lambda_2 = \begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = +\lambda_2 = -\lambda_2^*,$$

$$\bar\lambda_4 = -\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = -\lambda_4 = -\lambda_4^*, \quad \bar\lambda_5 = \begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix} = +\lambda_5 = -\lambda_5^*,$$

$$\bar\lambda_6 = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = -\lambda_6 = -\lambda_6^*, \quad \bar\lambda_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} = +\lambda_7 = -\lambda_7^*.$$

Матрицы подалгебры Картана по построению второго и первого фундаментальных представлений связаны соотношениями $\bar\lambda_3 = -\lambda_3$ и $\bar\lambda_8 = -\lambda_8$, согласно которым их явный вид —

$$\bar\lambda_3 = -\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = -\lambda_3^*, \quad \bar\lambda_8 = -\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} = -\lambda_8^*.$$

Сравним преобразования ковектора $\bar v_{\mathrm{F}}$ и 1-формы $\bar w_{\mathrm{F}}$, построенной из контрвекторов триплета. Компоненты ковектора задаются через компоненты триплета $\mathbf{3}$ контрвектора v с помощью комплексного сопряжения так, что $\bar v_{\mathrm{F}} = (v^{\mathrm{F}})^*$. Можно построить внешнее произведение двух антитриплетов — 2-форму w

$$w_{\mathrm{F_2F_3}} \equiv \tfrac{1}{2}\Big(\big\{\bar v_{[2]}\big\}_{\mathrm{F_2}}\big\{\bar v_{[3]}\big\}_{\mathrm{F_3}} - \big\{\bar v_{[2]}\big\}_{\mathrm{F_3}}\big\{\bar v_{[3]}\big\}_{\mathrm{F_2}}\Big) \quad \Rightarrow \quad w \equiv \bar v_{[2]} \wedge \bar v_{[3]}$$

или дуальную по Ходжу к этой 2-форме 1-форму $*w$

$$(*w)_{\mathrm{F_1}} = \epsilon_{\mathrm{F_1F_2F_3}}\bar v_{[2]}^{\mathrm{F_2}}\bar v_{[3]}^{\mathrm{F_3}}.$$

Комплексное сопряжение $(*w)^* = \bar w$ приводит к выражению

$$\bar w_{\mathrm{F_1}} = \epsilon_{\mathrm{F_1F_2F_3}} v_{[2]}^{\mathrm{F_2}} v_{[3]}^{\mathrm{F_3}},$$

которая по своим групповым свойствам согласно (III.6.19) и (III.6.20 эквивалентна ковектору антитриплета $\bar{\mathbf{3}}$. Построим также 3-форму

$$\bar\sigma \equiv \bar v_{[1]} \wedge \bar v_{[2]} \wedge \bar v_{[3]},$$

которая по Ходжу преобразуется в выражение

$$*\bar\sigma = \epsilon_{\mathrm{F_1F_2F_3}}\bar v_{[1]}^{\mathrm{F_1}}\bar v_{[2]}^{\mathrm{F_2}}\bar v_{[3]}^{\mathrm{F_3}},$$

что после комплексного сопряжения эквивалентно синглету

$$\sigma \equiv (*\bar\sigma)^* = \epsilon_{\mathrm{F_1F_2F_3}} v_{[1]}^{\mathrm{F_1}} v_{[2]}^{\mathrm{F_2}} v_{[3]}^{\mathrm{F_3}}.$$

Это позволяет нам получить описание триплета, антитриплета и синглета в терминах 1-формы, 2-формы и 3-формы, соответственно.

Обратим также внимание на следующий факт: в рассмотренных выражениях антисимметричность по перестановкам пар контравариантных индексов сорта F в тензорных произведениях триплетов эквивалентна антисимметричности по перестановкам пар номеров триплетов, указанных в квадратных скобках.

• Элементы схем Юнга

Введем графические обозначения для простейших элементов схем Юнга:

- первое фундаментальное представление, триплет, обозначают квадратом, символизирующим контравариантный вектор $\boldsymbol{v}$ (один индекс),

$$\square \quad \leftrightarrow \quad \mathtt{T}^{(1,0)} \equiv \mathbf{3},$$

- второе, антитриплетное фундаментальное представление изображают в виде пары квадратов, расположенных в виде столбца, что символизирует антисимметричность по перестановкам квадратов в столбце, так как контравариантный антисимметричный тензор, построенный в виде тензорного произведения из двух триплетов первого фундаментального представления эквивалентен, как мы выяснили, ковариантному вектору — элементу второго фундаментального представления–антитриплета $\bar{\boldsymbol{w}}$,

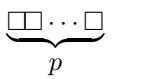
$$\leftrightarrow \quad \mathtt{T}^{(0,1)} \equiv \bar{\mathbf{3}},$$

- инвариант, построенный операцией антисимметризации трех первых фундаментальных представлений, синглет — столбец из трех квадратов, символизирующий контравариантный тензор третьего ранга, который инвариантен относительно действия группы,



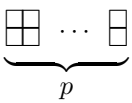
$$\leftrightarrow \quad \mathtt{T}^{(0,0)} \equiv \mathbf{1}.$$

В рамках такого подхода естественно изобразить симметричный контравариантный тензор неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ в виде строки длиной в p квадратов



$$\leftrightarrow \quad \mathtt{T}^{(p,0)}.$$

Ковариантный тензор неприводимого представления $\mathtt{T}^{(0,p)}$ изображается в виде пары строк длиной в p квадратов, и при этом имеет место симметризация индексов в каждой строке (ковариантный тензор ранга p симметричен относительно перестановки любой пары своих индексов) и антисимметризация в каждом столбце (антитриплетный столбец записан как антисимметричное произведение двух триплетов)



$$\leftrightarrow \quad \mathtt{T}^{(0,p)}.$$

Особо отметим, что на схеме Юнга для представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ симметризация по клеткам в строке, которую мы трактовали как симметрию контравариантного тензора по перестановке любой пары индексов этого тензора, совпадает с симметризацией по номерам триплетов, которые составляют тензор, т. е. симметризацию по номерам, указанным в квадратных скобках. Для представления $\mathtt{T}^{(0,p)}$ симметричность тензора по ковариантным индексам означает симметризация по номерам составляющих тензор триплетов в строках и антисимметризация по номерам триплетов столбцах. Так в представлении $\mathtt{T}^{(0,2)}$



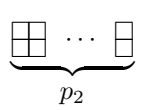
проводится симметризация по перестановкам номеров составляющих компоненты тензора триплетов в строках: $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, — и антисимметризация по перестановкам номеров триплетов в столбцах: $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$.

Подчеркнем, что в методе рассмотрения представлений $\mathtt{T}^{(0,p)}$ и $\mathtt{T}^{(p,0)}$ с помощью схем Юнга очевидно, что эти представления являются сопряженными друг другу в следующем смысле: если взять схему Юнга, изображающую инвариант, равный произведению p синглетов, в виде трех строк с одной и той же длиной p, и разбить этот инвариант горизонтальной линией на одиночную строку длиной p и двойную строку длиной p, то выше горизонтальной линии получится схема Юнга представления $\mathtt{T}^{(p,0)}$ — симметричный контравариантный тензор ранга p, а ниже горизонтальной линии — схема Юнга для $\mathtt{T}^{(0,p)}$, т. е. симметричный ковариантный тензор ранга p, соответственно. Это согласуется с тем, что объединение этих двух схем в одну означает свертку симметричного контравариантного тензора ранга p с ковариантным симметричным тензором ранга p по каждому из индексов, в результате чего получается скаляр. Если провести рассечение такой p-кратной синглетной схемы Юнга ломаной линией, которая разбивает эту схему инварианта на две схемы Юнга, то эти схемы также будут ковариантно сопряжены друг другу, т. е. свертка тензоров смешанного контравариантного и ковариантного типа друг с другом даст скаляр.

Перейдем теперь к вопросу об описании неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ со старшим весом состояния

$$\boldsymbol{\mu}_S = p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2.$$

Построим симметризованное произведение p_1 фундаментальных представлений триплетов и симметризованное произведение p_2 сопряженных фундаментальных представлений антитриплетов



$$\mapsto \quad \mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}} = \prod_{k=1}^{p_1} v^{\{\mathrm{F}_k\}}_{[k]} \prod_{m=1}^{p_2} \bar{v}^{[m]}_{\{\mathrm{F}'_m\}}. \qquad \text{(III.6.27)}$$

Этот тензор содержит компоненту $\mathcal{T}^{1\ldots1}_{3\ldots3}$, которая в согласии с нумерацией базисных состояний в триплете (верхний индекс) и антитриплете (нижний индекс) описывает состояние старшего веса представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$, а именно, эта компонента тензора построена как произведение p_1 компонент контрвекторов с индексом 1 и p_2 компонент ковекторов с индексом 3. Однако сам тензор лежит в пространстве тензорного произведения триплетного и антитриплетного трехмерных пространств, так что наряду в компонентами старшего веса неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ пространство тензорного произведения может содержать и неприводимые представления с меньшими значениями p_1 и p_2 у их старших весов. Для того, чтобы тензор содержал только одно неприводимое представление $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$, в этом произведении не должны содержатся неприводимые представления, старшие веса которых отвечают старшим вершинам внутренних шестиугольников, как мы это выяснили в предыдущем разделе. Для этого на значения всех $3^{(p_1+p_2)}$ компонент тензора необходимо наложить дополнительные условия.

В самом деле, отметим сначала, что, стартовав со старшего вектора в каждом из фундаментальных триплетов и антитриплетов, действием понижающих генераторов и их композиций можно получить все множество состояний у этих триплетов и антитриплетов, произведение которых и даст записанный выше тензор, симметризованный по контравариантным и ковариантным индексам, так как действие тензорных понижающих операторов по построению симметризовано по перестановкам компонентных множителей тензорного произведения. Однако симметризованный по верхним и нижним индексам тензор того же ранга можно построить и из произведения символа Кронекера на компоненты векторов триплетов и ковекторов антитриплетов, например,

$$(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}} = \delta^{\{\mathrm{F}_1}_{\{\mathrm{F}'_1} \prod_{k=2}^{p_1} v^{\mathrm{F}_k\}}_{[k]} \prod_{m=2}^{p_2} \bar{v}^{[m]}_{\mathrm{F}'_m\}}. \qquad \text{(III.6.28)}$$

Если векторы и ковекторы отвечают в этой записи состояниям старшего веса в первом и втором фундаментальных представлениях, то действие понижающих генераторов и их суперпозиций на этот тензор будут отвечать построению симметричного тензора для представления $\mathtt{T}^{(p_1-1,p_2-1)}$, а дельта-символ Кронекера — это инвариантный тензор второго ранга смешанного типа, т. е. инвариантный тензор с одним верхним и одним нижним индексом. Инвариантность означает, что символ Кронекера реализует синглетное представление группы, т. е. представления с единственным базисным элементом. Дело в том, что символ Кронекера — это инвариантный тензор (см. **§ 2. Формулы тензорного анализа** в Приложении этой книги, где приведена сводка формул тензорного анализа), т. е. тензор, который переходит сам в себя при обратимых унитарных либо ортогональных преобразованиях, а значит, и при групповых преобразованиях. Таким образом символ Кронекера, т. е. единичная матрица размером 3×3 задает единственный базисный элемент в пространстве представления, которое является синглетным. В это представление входят матрицы 3×3, пропорциональные единичной. Синглетное неприводимое представление обозначается $\mathtt{T}^{(0,0)}$, а старший вес представления

$$\boldsymbol{\mu}_S = p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{0}, \text{ так как } p_1 = p_2 = 0.$$

Символ Кронекера является состоянием старшего веса в этом представлении, причем все собственные значения генераторов подалгебры Картана равны нулю. Добавим к сказанному, что и символ Леви-Чивиты инвариантен при унимодулярных линейных преобразованиях, к которым относятся и преобразования специальной унитарной группы. Поэтому и N-мерный символ Леви-Чивиты является базисным элементом синглетного представления группы SU(N).

Покажем, что, не всякий симметризованный тензор $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}}$ ранга p_1+p_2 является элементом неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$, а только тот, что при свертке любой пары из верхнего и нижнего индексов дает тензор ранга p_1+p_2-2, тождественно равный нулю. Если подобная свертка отлична от нуля, то симметризованный тензор ранга p_1+p_2-2 содержит в себе как минимум неприводимое представление $\mathtt{T}^{(p_1-1,p_2-1)}$, а также и представления более низших рангов, если и повторные свертки отличны от нуля.

Важно подчеркнуть, что свертка симметричного тензора $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}}$ ранга p_1+p_2 по паре верхнего и нижнего индексов дает симметричный тензор ранга p_1+p_2-2, причем групповые преобразования переводят компоненты этого симметричного тензора ранга p_1+p_2-2 в компоненты этого же тензора, т. е.

симметричный тензор ранга p_1+p_2-2 как понятие — это векторное пространство, инвариантное относительно групповых преобразований, множества, элементами которого являются такие тензоры. Итак, векторное пространство симметричного тензора $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}}$ ранга p_1+p_2 содержит в себе инвариантное подпространство симметричного тензора ранга p_1+p_2-2, а это значит, что векторное пространство симметричного тензора $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}}$ ранга p_1+p_2 является приводимым за исключением случая, когда инвариантное подпространство является тривиальным, т.е. содержит в себе только нулевой элемент. Таким образом, векторное пространство симметричного тензора $\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}}$ ранга p_1+p_2 является неприводимым, только если след по любой паре верхнего и нижнего индексов тождественно равен нулю.

Задача 40. Пользуясь дираковскими обозначениями, постройте в явном виде базис присоединенного представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$ как результат действия различных операторных композиций всех трех понижающих операторов T_-, U_- и V_- группы SU(3) на состояние старшего веса, записывая базисные состояния в виде тензорного произведения состояний триплета на состояния антитриплета. Определите максимальное количество операторов в такой композиции, которая еще не приводит к векторному нулю пространства представления. Переведите запись полученных действием понижающих операторов состояний из дираковской формы в тензорную и убедитесь, что след каждого такого тензора равен нулю.

■

Решение **задачи 40** в явном виде иллюстрирует доказательство утверждения, что любой симметричный бесследовый тензор с p_1 верхними индексами и с p_2 нижними представляет элемент векторного пространства неприводимого представления группы SU(3). Действительно, согласно результатам этой задачи состояние старшего веса в дираковских обозначениях в форме тензорного произведения p_1 фундаментальных триплетов и p_2 фундаментальных антитриплетов не требует симметризации ввиду того, что оно уже симметрично по первым p_1 компонентам и отдельно по вторым p_2 компонентам. Тензорные понижающие операторы симметричны по построению на таком тензорном произведении состояний триплетов и антитриплетов и состоят из суммы p_1+p_2 элементов, в каждом из которых понижающий оператор триплетного или антитриплетного представления стоит только на одной позиции в (p_1+p_2)-компонентной тензорной записи оператора, действующего на пространстве рассматриваемого тензорного произведения. Остальные позиции заполнены единичными операторами. Таким образом в полиноме второго порядка композиции, например, $T_-^{\otimes}V_-^{\otimes}$ можно выделить такой член:

$$(T_-\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes T_-\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1})(V_-\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes V_-\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1})=$$
$$=(T_-\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes T_-)(V_-\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes V_-)\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}.$$

Такой оператор изменит состояние только первого триплета и первого антитриплета (если мы для удобства записи будем записывать тензорное произведение в таком порядке: $\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}\otimes\ldots$), состояния остальных триплетов и антитриплетов останутся состояниями первого или второго старшего вектора. Действие таких композиций даст нам все возможные состояния, а значит, и все возможные сочетания значений двух первых, одной контравариантной и одной ковариантной компонент тензора неприводимого представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$, если при действии понижающих операторов меняются только состояния первого триплета и первого антитриплета. Если при действии остальных частей разложения тензорного понижающего оператора происходит изменение состояний остальных фундаментальных представлений, то это не может изменить результат вычисления следа тензора по первой контр- и ковариантной компонентам. Разве что в других фундаментальных компонентах тензорного произведения не будет получен векторный ноль. Но нас такой случай не беспокоит, так как наряду с таким членом всегда будет фрагмент полинома понижающих операторов, который действует на остальные фундаментальные представления единичным оператором, т . е. оставляет состояние соответствующего фундаментального представления в состоянии старшего вектора, что позволяет утверждать, что соответствующая компонента тензора $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ не равна нулю. Выделенная нами и записанная явно часть полинома понижающих операторов будет фактически композицией двух тензорных понижающих операторов на присоединенном представлении, построенном на паре триплет–антитриплет, тензорно умноженной на $(p_1-1)(p_2-1)$ единичных операторов. Так как при переводе записи получаемых состояний в тензорную форму у нас уже есть симметризация получаемого тензора по верхним и нижним индексам по построению, нам достаточно свернуть получаемый тензор по первым верхнему и первому нижнему индексам и убедиться ,что свертка равна нулю. Возвращаясь к **задаче 40** для того, чтобы убедиться в бесследовости тензора представления $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$, нам достаточно убедиться в бесследовости тензора, представляющего состояние присоединенного представления как одного из неприводимых, так как тензор, представляющий состояния, полученные изменением состояний только первого триплета и первого антитриплета имеет структуру $\mathtt{T}^{(1,1)}\cdot\mathtt{T}^{(p_1-1,p_2-1)}$, т. е. является произведением тензора присоединенного представления и тензора представления $\mathtt{T}^{(p_1-1,p_2-1)}$ для старшего вектора. Свертка тензора представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$, как читатель может убедиться, проделав вычисления в рамках **задачи 40**, даст нуль, что эквивалентно нулевой свертке симметризованного тензора $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ по любой паре индексов. ■

Для иллюстрации положения о том, что симметризация смешанного тензора отдельно по верхним и отдельно по нижним индексам не означает, что тензор, полученный как тензорное произведение (см.

§ 2. Формулы тензорного анализа в Приложении этой книги), описывает пространство неприводимого представления, рассмотрим два примера. Первый пример — тензорное произведение триплета на антитриплет:

$$(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1} = v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar{v}^{[2]}_{\mathrm{F}'_1}.$$

У тензора есть один верхний и один нижний индекс так что симметризовать просто нечего. След этого тензора — инвариант, т. е. синглет

$$(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_1} = v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar{v}^{[2]}_{\mathrm{F}_1} = \mathrm{inv}.$$

Рассматриваемый тензор $(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1}$ содержит состояние старшего веса $(\mathcal{T})^1_3$ для неприводимого представления $\mathsf{T}^{(1,1)}$, если эта компонента не равна нулю, но отличный от нуля след тензора— это неприводимое представление меньшего ранга, а именно, $\mathsf{T}^{(0,0)}$. Синглетное представление $\mathsf{T}^{(0,0)}$ может быть реализовано как матрицами, пропорциональными единичной, так и комплексными числами, причем матрица будет изоморфна числу, равному следу матрицы, деленному на длину строки $\mathfrak{D}$ в квадратной матрице, в данном случае равной $\mathfrak{D} = 3$.

Построим из двух триплетов $v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}$ и $v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}$ антитриплет, составленный в виде антисимметризованного произведения двух триплетов

$$\bar{w}_{\mathrm{F}'_1} = \epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}.$$

Тензор

$$\bar{w}_{\mathrm{F}'_1}v^{\mathrm{F}_1}_{[1]} = v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar{w}_{\mathrm{F}'_1} = v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}$$

в терминах элементарных схем Юнга лежит в пространстве тензорного произведения антитриплета на триплет,

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \mapsto \begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array} \otimes \square\,.$$

Подчеркнем, что в этом тензорном произведении сомножители принадлежат неизоморфным векторным пространствам. Когда на таком тензорном произведении задается инвариантная билилинейная функция с аргументами разной природы, один аргумент лежит в пространстве антитриплета, а второй — в пространстве триплета, то такие два аргумента разного вида не могут быть переставлены между собой. В случае же, когда сомножители лежат в изоморфных векторных пространствах неприводимого представления группы, порядок сомножителей в тензорном произведении становится существенным. Например, в качестве элементов схем Юнга используется клетка, обозначающая триплетное фундаментальное представление, и эта клетка является элементом конструирования всех остальных неприводимых представлений группы SU(3) методом построения тензорных произведений триплетных фундаментальных представлений. Поэтому необходимо явно указать в схемах Юнга порядок следования тензорных сомножителей, отвечающих первому фундаментальному представлению. Этот вопрос, как мы видели, решается введением специального правила, которое гласит, что по тензорным сомножителям, указанным в строке схемы Юнга, имеет место симметрия по их перестановкам в тензорном произведении, а по тензорным сомножителям, указанным в столбце, имеет место антисимметрия по их перестановкам в тензорном произведении.

След построенного нами выше тензора $\bar{w}_{\mathrm{F}'_1}v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}$ (суммирование по индексам $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}'_1$) дает синглет

$$\mathcal{T}_0 \equiv v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar{w}_{\mathrm{F}_1} = v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}.$$

Построим в качестве примера тензор, симметричный по номерам триплетов [1] и [2][77],

$$(\mathcal{T}_8)^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1} \equiv v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]} + v^{\mathrm{F}_1}_{[2]}\epsilon_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]}.$$

След (суммирование по индексам $_{\mathrm{F}_1=\mathrm{F}'_1}$) равен нулю:

$$(\mathcal{T}_8)^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_1} \equiv v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]} + v^{\mathrm{F}_1}_{[2]}\epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]} = \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}v^{\mathrm{F}_2}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]} + \epsilon_{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3}v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}v^{\mathrm{F}_1}_{[2]}v^{\mathrm{F}_3}_{[3]} = 0.$$

Следовательно, ковариантный тензор $(\mathcal{T}_8)^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1}$ с нулевым следом как бесследовая матрица размером 3×3 содержит в себе максимум 8 независимых комплексных компонент. Компонента этого тензора $(\mathcal{T}_8)^1_3$ соответствует состоянию старшего веса в представлении $\mathsf{T}^{(1,1)}$, которое является восьмимерным. Это

[77] Покажите, что согласно правилу соответствия схемы Юнга и тензорного произведения триплетных фундаментальных представлений $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$.

означает, что групповые преобразования тензора $(\mathcal{T}_8)^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1}$ — это преобразования в восьмимерном пространстве представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$, которые сохраняют след тензора, являющегося элементом пространства представления.

Обобщим это утверждение о нулевом следе: смешанный тензор, описывающий состояния неприводимого представления, должен иметь равный нулю след по любой паре ковариантного и контравариантного индексов. Описанная процедура построения тензора $(\mathcal{T}_8)^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1}$ повторяет уже известные нам правила симметрии схемы Юнга в строках и антисимметрии в столбцах относительно номеров триплетов в тензорном произведении, что позволяет нам записать схему Юнга представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$ в виде:

симметризация по горизонтали и антисимметризация по вертикали $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ или просто $\begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline \\\cline{1-1}\end{array}$.

Второй пример — симметризованный тензор с двумя контравариантными и двумя ковариантными индексами, построенный из триплета, антитриплета и символа Кронекера в виде

$$(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}'_2} = \frac{1}{4}\left\{\delta^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_1} v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2} + \delta^{\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_1} v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2} + \delta^{\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_1} + \delta^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_1}\right\}.$$

Свертка по первой паре верхний индекс – нижний индекс дает

$$\delta^{\mathrm{F}'_1}_{\mathrm{F}_1}(\mathcal{T})^{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}'_2} = \frac{1}{4}\left\{3\, v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2} + v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2} + \delta^{\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}_1} + v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2}\right\} =$$
$$= \frac{5}{4}\left\{v^{\mathrm{F}_2}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}'_2} - \frac{1}{3}\,\delta^{\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}_1}\right\} + \frac{2}{3}\,\delta^{\mathrm{F}_2}_{\mathrm{F}'_2} v^{\mathrm{F}_1}_{[1]}\bar v^{[2]}_{\mathrm{F}_1},$$

где первое слагаемое — это бесследовый тензор второго ранга, который отвечает октетному представлению $\mathtt{T}^{(1,1)}$, а второй составлен из инвариантного тензора Кронекера с инвариантным множителем — скаляром $(\bar v\cdot v)$. В этом примере мы видим, что след симметризованного тензора может включать в себя вклады не одного неприводимого представления, а нескольких неприводимых представлений меньшего ранга.

Поэтому для неприводимости симметризованного тензора необходимо и, как мы покажем позже, достаточно положить, что свертка симметризованного тензора, отвечающего неприводимому представлению группы SU(3), по любой паре индексов обращается в нуль:

$$\delta^{\mathrm{F}'_m}_{\mathrm{F}_k}\,\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_{p_1}}_{\mathrm{F}'_1\ldots\mathrm{F}'_{p_2}} = 0, \qquad \forall\, k,m. \tag{III.6.29}$$

Это правило легко понять на первом из приведенных нами примеров тензора представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$: $\mathcal{T}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}'}$. Свертка его индексов приводит к инварианту $\mathcal{T}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}}$, т. е. к синглету, если он отличен от нуля, и тогда этот инвариант – синглет – составляет одну из приводимых компонент тензора: при групповых преобразованиях синглет выражался бы только через себя самого, т. е. он описывает одномерное представление, которое принято называть инвариантным подпространством. Если же след тензора равен нулю, то с помощью матриц Гелл-Манна этот тензор можно представить в виде

$$\mathcal{T}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}'} = B_a\,(\lambda_a)^{\mathrm{F}}_{\bullet\,\mathrm{F}'}, \quad \text{(обратите внимание на суммирование по немому индексу } a\in\{\overline{1,8}\}),$$

где коэффициенты B_a легко определить, умножая равенство на $(\lambda_b)^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}$. Тогда, поскольку

$$(\lambda_b)^{\mathrm{F}'}_{\bullet\,\mathrm{F}}(\lambda_a)^{\mathrm{F}}_{\bullet\,\mathrm{F}'} = \mathrm{tr}\,(\lambda_b\lambda_a) = 2\delta_{ab},$$

находим

$$B_a = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_2}(\lambda_a)^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}_1}.$$

Заметим, что в такое разложение, вообще говоря, надо было бы добавить единичную матрицу $\lambda_0\equiv\mathbb{1}$ как девятый элемент базиса квадратных матриц размером 3×3. Но технически он будет здесь отсутствовать, так как след композиции тензора с единичной матрицей равен следу самого тензора, который по построению равен нулю: поскольку $\mathrm{tr}\,(\lambda_0\lambda_0) = 3$ и $\mathrm{tr}\,(\lambda_0\lambda_a) = 0$, то

$$B_0 = \tfrac{1}{3}\,\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_2}(\lambda_0)^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}_1} = \tfrac{1}{3}\,\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_2}(\mathbb{1})^{\mathrm{F}_2}_{\bullet\,\mathrm{F}_1} = \tfrac{1}{3}\,\mathcal{T}^{\mathrm{F}_1}_{\mathrm{F}_1} = 0.$$

Так как единичная матрица преобразуется как синглетное представление или инвариант, а она в разложении отсутствует, то оставшиеся 8 компонент, пропорциональные матрицам Гелл-Манна, преобразуются как восьмимерный вектор представления $\mathtt{T}^{(1,1)}$. Поскольку мы разложили произвольную матрицу с нулевым следом по матрицам Гелл-Манна, то представление $\mathtt{T}^{(1,1)}$ совпадает с присоединенным, в котором по построению базисом являются генераторы группы.

• Независимые компоненты симметричного тензора: мультиплетность

Условие бесследовости тензора является необходимым для неприводимости. Покажем, что оно является и достаточным путем подсчета числа независимых параметров в тензоре, т.е. размерности тензорного пространства или мультиплетности.

Вычислим количество независимых компонент у симметризованного тензора (III.6.27) с нулевым следом по каждой из пар индексов (III.6.29) и убедимся, что размерность этого тензора совпадает с размерностью неприводимого представления $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$, которая приведена в формуле (III.4.65).

У элемента симметричного тензора ранга p, значения индексов которого меняются в пределах от 1 до 3, все индексы можно разбить на группы согласно тому, чему индекс равен: либо 1, либо двум, либо трем. Пусть первая группа включает в себя k индексов, так что k лежит в пределах $0 \leqslant k \leqslant p$. Пусть вторая группа включает в себя j индексов, $0 \leqslant j \leqslant p-k$. Остальные индексы принадлежат третьей группе. В симметричном тензоре порядок индексов неважен. Мы договорились, что первая группа из k индексов принимает значение 1, вторая группа, состоящая из j индексов, — значение 2, а оставшиеся индексы — значение 3. При зафиксированном k разные значения могут принимать столько элементов тензора, сколько возможно разных значений количества индексов, принимающих значение 2, т.е. $p-k+1$. Тогда для подсчёта числа элементов тензора, которые могут принимать разные значения, надо просуммировать по числу k в диапазоне его изменения, т. е. от нуля до p. Значит, число независимых матричных элементов симметричного тензора ранга p, каждый из которых равен какому-либо комплексному числу, равно

$$\sum_{k=0}^{p}(p+1-k) = \frac{1}{2}\,(p+1)(p+2). \tag{III.6.30}$$

Смешанный тензор, отвечающий представлению $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$, имеет p_1 симметризованных верхних индексов и p_2 симметризованных нижних индексов. Поэтому число его независимых компонент согласно (III.6.30) равно

$$\frac{1}{4}\,(p_1+1)(p_1+2)\,(p_2+1)(p_2+2) \tag{III.6.31}$$

без учета условия бесследовости тензора при его свертке по каждой паре противолежащих индексов [см. (III.6.29)]. Результат свертки (III.6.29) можно рассматривать как равенство нулю тензора, симметризованного отдельно по p_1-1 верхним и по p_2-1 нижним индексам. Значит, у симметризованного тензора (III.6.29) все компоненты должны быть равны нулю. Количество таких условий дается той же формулой (III.6.31), при подстановке $p_{1,2} \mapsto p_{1,2}-1$:

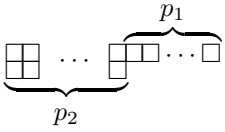
$$\frac{1}{4}\,p_1(p_1+1)\,p_2(p_2+1). \tag{III.6.32}$$

Так как тензор неприводимого представления изначально симметризован, то достаточно рассмотреть его свертку по единственной произвольной паре индексов: все другие свертки по условию симметрии тензора сводятся к выбранной. В итоге, вычитание числа условий нулевой свертки (III.6.32) из количества компонент в симметризованном тензоре (III.6.31) дает число независимых компонент такого тензора, т. е. число базисных состояний неприводимого представления $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$

$$\dim \mathrm{T}^{(p_1,p_2)} = \frac{1}{2}\,(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2), \tag{III.6.33}$$

и воспроизводит прежний результат (III.4.65), полученный прямым подсчетом состояний на весовой диаграмме с учетом степени вырождения весов.

Резюмируем свойства схем Юнга. Неприводимое представление $\mathrm{T}^{(p_1,p_2)}$ изображается на схеме Юнга в виде



$\leftrightarrow \quad \mathrm{T}^{(p_1,p_2)}.$

Подчеркнем, что первая строка по определению схемы Юнга должна быть не короче второй. Ясно также, что слева к этой схеме можно пририсовать произвольное число трехярусных столбцов, символизирующих синглеты–инварианты, которые в виде множителей в тензорном произведении нисколько не изменяют характеристики неприводимости представления по отношению к групповым преобразованиям.

символ	старший вес	тензор	мультиплет	схема Юнга	свойства
$\mathtt{T}^{(1,0)}$	$\boldsymbol{\lambda}_1$	$\mathcal{T}^{\mathtt{F}}$	$\mathbf{3}$	$\square$	триплет $v_{[1]}$
$\mathtt{T}^{(0,1)}$	$\boldsymbol{\lambda}_2$	$\mathcal{T}_{\mathtt{F}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\begin{array}{l}\square\\\square\end{array}$	антитриплет $v_{[1]} \wedge v_{[2]}$, антисимметрия по перестановке клеток схемы Юнга в столбце
$\mathtt{T}^{(0,0)}$	—	$\mathcal{T}$	$\mathbf{1}$	$\begin{array}{l}\square\\\square\\\square\end{array}$	синглет $v_{[1]} \wedge v_{[2]} \wedge v_{[3]}$, антисимметрия по перестановкам клеток схемы Юнга в столбце
$\mathtt{T}^{(p,0)}$	$p\boldsymbol{\lambda}_1$	$\mathcal{T}^{\mathtt{F}_1\dots\mathtt{F}_p}$	$\frac{1}{2}(p+1)\cdot$ $\cdot(p+2)$	$\overbrace{\square\square\dots\square}^{p}$	симметричный тензор, симметрия по перестановкам клеток схемы Юнга в строке
$\mathtt{T}^{(0,p)}$	$p\boldsymbol{\lambda}_2$	$\mathcal{T}_{\mathtt{F}_1\dots\mathtt{F}_p}$	$\frac{1}{2}(p+1)\cdot$ $\cdot(p+2)$	$\underbrace{\begin{array}{ll}\square&\dots\\\square&\end{array}}_{p}$	симметричный тензор, симметрия по перестановкам клеток схемы Юнга в строках, антисимметрия при перестановках в столбцах
$\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$	$p_1\boldsymbol{\lambda}_1 + p_2\boldsymbol{\lambda}_2$	$\mathcal{T}^{\mathtt{F}_1\dots\mathtt{F}_{p_1}}_{\mathtt{F}'_1\dots\mathtt{F}'_{p_2}}$	$\frac{1}{2}(p_1+1)\cdot$ $\cdot(p_2+1)\cdot$ (p_1+p_2+2)	$\begin{array}{ll}\underbrace{\begin{array}{ll}\square&\dots\\\square&\end{array}}_{p_2}&\overbrace{\square\square\dots\square}^{p_1}\end{array}$	симметричный по перестановкам верхних индексов и по перестановкам нижних индексов тензор, след тензора по любой паре верхнего и нижнего индексов равен нулю, симметрия по перестановкам клеток схемы Юнга в строках, антисимметрия при перестановках в столбцах

Таблица 1: Основные параметры неприводимых представлений группы SU(3).

• Резюме техники тензоров и схем

В качестве наглядного итога рассмотрения записи неприводимых представлений группы SU(3) как тензоров и схем Юнга приведем перечень свойств этих представлений в виде сводной таблицы 1.

• Метод «шагов» и «крюков»

Формулу для размерности неприводимого представления (III.6.33) можно записать в виде

$$\dim \mathtt{T}^{(p_1,p_2)} = \frac{(p_1+p_2+2)!}{2!p_1!(p_1+p_2+1)\cdots(p_1+2)} \cdot \frac{(p_2+1)!}{p_2!}.$$

Это произведение трактуют согласно следующей схеме действий:

- припишем каждой клетке i число шагов D_i от ее положения при движении по клеткам строго только влево и только вверх к «первой», расположенной в левом верхнем углу, беря шаг вверх с отрицательным знаком;
- сопоставим этой клетке длину «крюка» k_i — число клеток, расположенных по двум линиям углом с вершиной в рассматриваемой клетке, вертикально вниз от нее и горизонтально направо от нее, плюс сама рассматриваемая клетка в вершине ломаной двузвенной линии.

Тогда для верхней строки получаем набор значений (слева направо)

$$\begin{array}{rl|l} \{i\} = \{ & 1, \quad 2, \quad \dots, p_2 & p_2+1, p_2+2, \dots, \quad p_1+p_2 \quad \}, \\ \{D_i\} = \{ & 0, \quad 1, \quad \dots, p_2-1 & p_2, \quad p_2+1, \dots, p_1+p_2-1 \ \}, \\ \{k_i\} = \{ & p_1+p_2+1, p_1+p_2, \dots, p_1+2 & p_1, \quad p_1-1, \dots, \quad 1 \quad \}, \end{array} \qquad \text{(III.6.34)}$$

где вертикальная линия отмечает конец нижней строки. Тогда находим, что первый сомножитель из двух в произведении для размерности неприводимого представления выражается через произведение

$$\frac{(p_1+p_2+2)!}{2!p_1!(p_1+p_2+1)\cdots(p_1+2)} = 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (p_1+p_2+2)\cdot \frac{p_1+1}{(p_1+p_2+1)!} = \prod_{i=1}^{p_1+p_2} \frac{3+D_i}{k_i}.$$

Аналогично для второй строки получаем набор

$$\begin{array}{ll} \{i\} & = \{\ 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p_2 \quad \}, \\ \{D_i\} & = \{\ -1, \quad 0, \quad \ldots, p_2 - 2\ \}, \\ \{k_i\} & = \{\ p_2,\ p_2 - 1, \ldots, \quad 1 \quad \}, \end{array} \tag{III.6.35}$$

так что

$$\prod_{i=1}^{p_2} \frac{3 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p_2 + 1)}{p_2!} = \frac{(p_2 + 1)!}{p_2!}.$$

В итоге приходим к выражению для размерности неприводимого представления группы SU(3) в терминах шагов D_i и крюков k_i

$$\dim \mathtt{T}^{(p_1,p_2)} = \prod_i \frac{3 + D_i}{k_i}, \tag{III.6.36}$$

где i пробегает все клетки в строках схемы Юнга: в неприводимом представлении $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ группы SU(3) число этих клеток равно $(p_1 + p_2) + p_2$.

В случае группы SU(2) аналогичную формулу для размерности неприводимого представления $\mathtt{T}^{(j)}$ с моментом j можно получить, если учесть, что для этой группы схема Юнга — это одна строка из $2j$ клеток. Для этой единственной строки набор шагов и крюков задается в виде

$$\begin{array}{ll} \{i\} & = \{\ 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 2j \quad \}, \\ \{D_i\} & = \{\ 0, \quad 1, \quad \ldots, 2j - 1\ \}, \\ \{k_i\} & = \{\ 2j,\ 2j - 1, \ldots, \quad 1 \quad \}. \end{array} \tag{III.6.37}$$

Тогда

$$\dim \mathtt{T}^{(j)} = \prod_{i=1}^{2j} \frac{2 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2j + 1)}{(2j)!} = \frac{(2j + 1)!}{(2j)!} = 2j + 1, \tag{III.6.38}$$

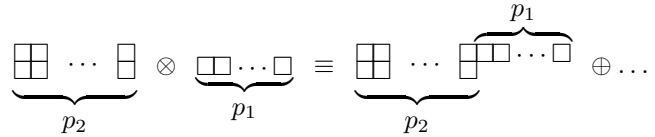
что совпадает со стандартным результатом.

Мультиплетность неприводимого представления является следствием симметризации клеток первого фундаментального представления по перестановкам в строках и антисимметризации по перестановкам в столбцах. В теории представлений дискретной группы перестановок, которая находится вне рамок изучения групп и алгебр Ли, построена схема расчета мультиплетности неприводимого представления в терминах шагов и крюков.

Без вывода приведем обобщение формулы (III.6.36), которая доказывается в теории группы перестановок, для группы SU(N). Можно ввести аналогичные схемы Юнга с указанными свойствами симметрии в строках и антисимметрии в столбцах[78] и рассчитать размерность неприводимого представления

$$\dim \mathtt{T}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\mathrm{N}-1})} = \prod_i \frac{\mathrm{N} + D_i}{k_i}. \tag{III.6.39}$$

Мы рассчитали размерность неприводимого представления согласно его схеме Юнга, исходя из рассмотрения многократного тензорного произведения состояний фундаментального представления триплета и сопряженного к нему антитриплета: это есть частный случай тензорного произведения пространств двух неприводимых представлений $\mathtt{T}^{(p_1,0)} \otimes \mathtt{T}^{(0,p_2)}$ и выделения в нем неприводимой части $\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}$ как одного из членов в прямой сумме[79]. В терминах схем Юнга

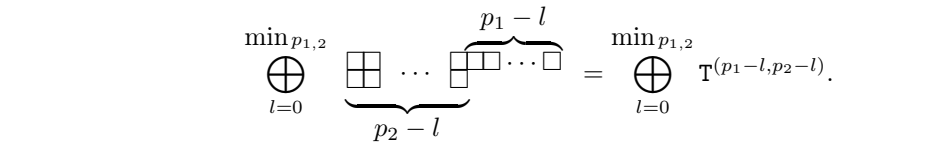


Несложно догадаться, как выглядят другие члены прямой суммы в этом тензорном произведении: клетки–компоненты тензорного произведения из второй схемы Юнга (контравариантный тензор) можно последовательно присоединять (тензорно умножать) к первой схеме так, чтобы получалась опять же схема Юнга (неприводимое представление), и при этом вычеркивать получающиеся трехъярусные

[78] Формула справедлива и для N = 2.

[79] Напомним, что прямую сумму образуют векторные подпространства, элементы которых являются инвариантными подпространствами при групповых преобразованиях, т. е. линейная оболочка образов подпространства совпадает с самим подпространством. Мы использовали эти понятия при определении неприводимых представлений: приводимое представление — это прямая сумма неприводимых (инвариантных) подпространств.

столбцы, отвечающие инвариантным множителям в тензорном произведении. При такой операции можно вложить в третью строку первой схемы Юнга (представление $\mathtt{T}^{(0,p_2)}$) l клеток из второй схемы Юнга (представление $\mathtt{T}^{(p_1,0)}$), причем $l \leqslant \min p_{1,2}$. Тогда получится ровно l синглетов, которые можно вычеркнуть. Затем, казалось бы, можно изъять k пар клеток из строки представления $\mathtt{T}^{(p_1-l,0)}$ и сделать из них k вертикально расположенных пар клеток, увеличив число этих пар в общей схеме Юнга с $p_2 - l$ до $p_2 - l + k$, но это сделать невозможно, поскольку в исходной схеме горизонтальное расположение этих клеток означало симметризацию по их номерам, в том числе в каждой паре, а вертикальное расположение приводит к антисимметризации по тем же номерам клеток в парах и дает вклад, равный нулю. Поэтому оставшиеся во второй схеме $p_1 - l \geqslant 0$ клеток могут быть только присоединены к схеме с вычеркнутыми синглетами, и сумма представлений имеет вид



$$= \bigoplus_{l=0}^{\min p_{1,2}} \mathtt{T}^{(p_1-l,p_2-l)}.$$

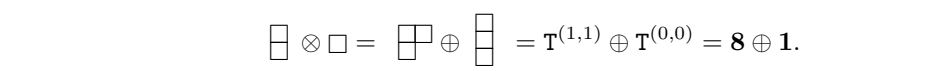
Описанное вычисление есть простейшее применение метода схем Юнга для разложения в прямую сумму произведения неприводимых представлений для группы SU(3).

6.2 Тензорные произведения неприводимых представлений и схемы Юнга

В общем случае (представления с двумя строками разной длины) сформулируем правила вычисления произведения неприводимых представлений. Пусть первая схема Юнга, а именно, левая в произведении будет фиксированной. К ней мы будем присоединять всеми возможными способами клетки второй, правой схемы, ограничивая себя следующими требованиями:

1. клетки второй схемы присоединяются по одной клетке к первой последовательно строка за строкой, начиная с верхней («длинной») строки;
2. присоединение клеток должно давать схему Юнга (первая строка длиннее второй);
3. максимальное число строк равно трем (столбец из трех клеток вычеркивается из схемы как инвариант);
4. клеткам второй схемы присваивают символьные имена: в верхней строке — «a», в нижней — «b», так что после присоединения к фиксированной, левой схеме клетки с одним именем не могут оказаться в одном столбце: действительно, клетки с одним именем изначально симметризованы по перестановкам, а их запись в столбец означала бы антисимметризацию, которая для симметричного тензора дает тождественный нуль;
5. после всевозможных присоединений клеток второй схемы к первой каждую добавленную к первой схеме клетку надо проверить на допустимость по такому критерию. Пройдем от этой клетки вверх на некоторое количество клеток, а потом вправо до выхода из схемы и подсчитаем количество встретившихся «a» и «b» по всем возможным таким г-образным путям. Схема допустима, если число пройденных имен «a» не меньше числа пройденных имен «b»[80].

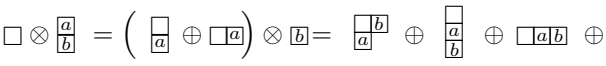
Проиллюстрируем действие метода схем Юнга на простейших примерах. Произведение представлений $\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathtt{T}^{(0,1)} \otimes \mathtt{T}^{(1,0)}$:



$$= \mathtt{T}^{(1,1)} \oplus \mathtt{T}^{(0,0)} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$

[80] Для заинтересованного в деталях читателя отметим, что данное правило означает, что выше заданной присоединенной клетки число клеток из первой строки второй схемы, помеченных символом «a», не меньше числа клеток из второй строки, помеченных символом «b». Это отражает тот факт, что отдельной клетке с именем «a» отвечает триплет фундаментального представления типа v^a, а клетке с именем «b» сопутствует и клетка с именем «a», так как они образуют двухъярусный столбец — антисимметризованное произведение двух триплетов фундаментального представления $v^a\tilde{v}^b - v^b\tilde{v}^a$. Фундаментальные триплеты из первой строки второй схемы могут быть либо симметризованы с триплетами из первой строки фиксированной схемы: операция присоединения клетки «a» к первой строке; либо антисимметризованы: операция присоединения клетки «a» ко второй строке; либо свернуты с сопряженными антитриплетами исходной схемы: операция присоединения клетки «a» в третью строку с образованием инварианта. Рассмотрение тех же операций с клеткой по имени «b» показывает, во-первых, что она не может быть присоединена к первой строке, так как либо в первой строке уже есть антисимметрично сопряженная ей клетка по имени «a», симметризация с которой приводит к нулю. Либо в этой строке отсутствуют клетки по имени «a», так что в результате добавления в первую строку клетки «b» возникает повторный счет уже имеющейся схемы Юнга, другими словами, повторная запись одного и того же слагаемого: сопряженная клетка «a» уже составила идентичную схему. Запись клетки «b» во вторую строку означает антисимметризацию фундаментального триплета с номерами клеток верхней строки, и, следовательно, симметризацию с сопряженным антитриплетом «a». То же самое касается и свертки с клеткой «b». В итоге, выше клетки «b» должна быть хотя бы одна клетка «a», что и записано в правиле.

Умножение тех же неприводимых представлений в обратном порядке иллюстрирует пятое правило:



Первое и третье слагаемые в этой сумме недопустимы: первое повторяет четвертое слагаемое, но в первом слагаемом выше клетки с именем «a» число клеток «b», равное 1, больше числа клеток «a», равного 0, что нарушает правило 5, а третье противоречит изначальной антисимметрии по перестановкам «a» и «b» в исходном антитриплете, и опять же в строке имя «b» встречается раньше имени «a». Поэтому мы приходим к прежнему результату

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}.$$

Заметим, что в кварковой модели мезонов разложение тензорного произведения триплета на антитриплет $\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}$ приводит, согласно последнему примеру, к существованию не только описанного нами ранее псевдоскалярного мезонного октета, но и синглета. Синглетное состояние η'-мезона наблюдается экспериментально[81].

Произведение $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$, которое в кварковой модели описывает барионы, составленные из трех кварков разных ароматов, вычисляется последовательно: сначала найдем



В этом выражении неприводимое представление $\mathtt{T}^{(2,0)}$ — это векторное пространство симметричного контравариантного тензора второго ранга размерности (III.6.33)

$$\dim\mathtt{T}^{(p_1,p_2)}=\frac{1}{2}\,(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)\Big|_{p_1=2,\,p_2=0}=6.$$

На весовой диаграмме это представление изображается в виде правильного треугольника со стороной равной двум по три весовые точки на каждой стороне. Тогда, используя результат тензорного умножения двух триплетов, найдем для тензорного произведения трех триплетов

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})\otimes\mathbf{3}=(\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6})\otimes\mathbf{3}=\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3}\oplus\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}.$$

Второй вклад в эту прямую сумму равен



а произведение $\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}$ мы уже вычисляли выше, так что, суммируя все вклады, найдем

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}.$$

Обратим теперь внимание не только на структуру мультиплетов по ароматам кварков, но и на спиновую структуру барионов в разных мультиплетах. Для этого необходимо учесть, что кварки обладают не только ароматом, но еще и полуцелым спином, а также цветом, являясь триплетами по группе $\mathrm{SU}_c(3)$. При этом мы полагаем, что кварки покоятся в основном состоянии барионов, что позволяет не рассматривать свойства движения кварков относительно друг друга. Поскольку спин кварка равен $1/2$, кварки являются фермионами и подчиняются статистике Ферми. Поэтому при перестановке квантовых чисел, которые индексируют состояния кварковых наблюдаемых во всех пространствах, имеет место антисимметрия. Под квантовыми числами мы понимаем в данном случае индексы, которые указывают аромат, цвет и проекцию спина кварков на выбранную ось.

Что касается цвета, то экспериментально установлено, что все адроны — синглеты по цветовой группе $\mathrm{SU}_c(3)$, так что в случае барионов, составленных из трех кварков, т. е. в виде тензорного произведения трех фундаментальных триплетов по группе $\mathrm{SU}_c(3)$, синглет — это антисимметричное по трем цветам трех кварков тензорное произведение (в терминах схемы Юнга для цветовой группы это столбец из трех клеток). Здесь мы считаем симметрию ароматов кварков $\mathrm{SU}_f(3)$ точной. Тогда аромат становится одним из квантовых чисел фермиона, что существенно при рассмотрении статистики Ферми-Дирака тождественных частиц. Таким образом, состояние кварков в пространстве цвета для барионов является антисимметричным, и, следовательно, по статистике Ферми их состояние по перестановкам в спиновом пространстве и пространстве ароматов должно быть симметрично. Такое состояние описывается тензорным произведением состояний по группе ароматов SU(3) и группе спина SU(2). Свойства состояний декуплета относительно перестановки тождественных кварков в различных квантовых пространствах суммированы в таб. 2.

[81] В реальности симметрия кварковых ароматов не является точной из-за разных масс кварков, что сказывается на характеристиках сильного и слабого взаимодействий кварков. Поэтому реальный η'-мезон не является точным синглетным состоянием.

$\mathsf{T}^{(3,0)}$:

квантовое пространство	ароматы кварков (flavor)	цвет	спин
группа	$\mathrm{SU_f}(3)$	$\mathrm{SU}_c(3)$	SU(2)
симметрия	$+1$	-1	$+1$

Таблица 2: Симметрия относительно перестановки тождественных кварков в декуплете барионов как представления $\mathsf{T}^{(3,0)}$ группы ароматов SU(3) с учетом группы SU(2) преобразования спинов кварков при спине бариона равном $3/2$.

Итак, декуплету, схема Юнга которого в группе ароматов представляет строку из трех клеток, отвечают состояния пространства ароматов (волновые функции) симметричные по перестановкам ароматов кварков. С учетом антисимметрии состояния трех кварков в пространстве цветов и статистики Ферми в состоянии с минимальной энергией симметричном относительно перестановки координат кварков допустимы только симметричные состояния пространства спина[82]. Спиновые состояния с максимально допустимой проекцией $3/2$ являются симметричными относительно перестановок квантовых чисел в общем спиновом пространстве. Это значит, что декуплет составляют барионы со спином $3/2$.

Синглетное состояние кварков по группе SU(3) в пространстве ароматов описывается в рамках схемы Юнга столбцом из трех клеток, т. е. оно антисимметрично по ароматам кварков. Это значит, что спиновое состояние при основном координатном (состоянием с наименьшей энергией) могла бы быть только антисимметричной, что невозможно: схема Юнга группы SU(2) по спину должна включать в себя три клетки, каждая из которых относится к одному из трех кварков, составляющих барион, но в этой схеме может быть только две строки, так что антисимметричный столбец из трех клеток не существует в алгебре группы SU(2). Другими словами, хотя бы две из трех проекций спина на выбранную ось одинаковы и равны $1/2$, что при антисимметризации по перестановке этих квантовых чисел дает тождественный нуль. Поэтому синглет в основном состоянии запрещен: см. таб. 3.

$\mathsf{T}^{(0,0)}$:

квантовое пространство	ароматы кварков (flavor)	цвет	спин
группа	$\mathrm{SU_f}(3)$	$\mathrm{SU}_c(3)$	SU(2)
симметрия	-1	-1	-1

Таблица 3: Симметрия относительно перестановки тождественных кварков в гипотетическом синглетном, допускаемом от противного состоянии барионов как представления $\mathsf{T}^{(0,0)}$ группы ароматов SU(3) с учетом группы SU(2) преобразования спинов кварков.

Октетные состояния $\mathsf{T}^{(1,1)}$ в пространстве ароматов кварков по группе $\mathrm{SU_f}(3)$ имеют смешанную симметрию по перестановкам, так что из них формируется октет барионов со спином $1/2$, в котором отсутствует симметрия отдельно в пространстве ароматов и пространстве спина кварков. А состояния трех кварков в тензорном произведении пространств аромата и спина симметричны по перестановкам. Подобные суперпозиции факторизованных тензорных произведений состояний[83] по аромату и по спину в квантовой механике называют зацепленными или запутанными, так как законы построения состояний с заданными групповыми инвариантами обязаны быть согласованы со статистикой Ферми, а это достигается только суперпозицией состояний с определенной симметрией в тензорном произведении. Суперпозиция состоит из состояний с различными значениями квантовых чисел по аромату и спину.

Итак, метод схем Юнга позволяет вычислять разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, определяя тем самым типы неприводимых представлений. Его обобщение с SU(3) на случай группы SU(N) довольно очевидно, но мы не излагаем его, а отсылаем заинтересованного читателя к соответствующей физико-математической литературе, где обычно он описан кратко в виде инструкций по применению.

[82] Напомним, что спином частицы называется ее физическая характеристика, которая задает свойства частицы в специальном пространстве поляризаций частицы относительно поворотов в обычном координатном евклидовом пространстве. Эта характеристика описывается в неприводимом представлении группы SU(2) введением двух индексов. Первый индекс s называют спином частиц, и он задает собственное значение $s(s+1)$ для квадратичного оператора Казимира – оператора квадрата спина $\widehat{\boldsymbol{s}^2}$. Все состояния неприводимого представления группы SU(2) являются собственными для оператора $\widehat{\boldsymbol{s}^2}$, а значение индекса s однозначно задает представление и его размерность, равную $2s+1$. Состояние старшего веса неприводимого представления является собственным для одного из трех операторов проекции спина, выбранного в качестве единственного оператора подалгебры Картана, например, s_z с собственным значением s. Таким образом спин частицы s совпадает с максимальной проекцией векторного оператора спина этой частицы на какую-либо ось.

[83] Факторизованные состояния по определению представимы в форме монома тензорного произведения состояний в отдельных пространствах. Запутанные состояния являются суммой двух и более факторизованных состояний с ненулевыми нормами. В этом курсе рассматриваются только чистые состояния, для которых нет необходимости вводить матрицу плотности.

Другой вопрос — вычисление матричных элементов перехода от факторизованного базиса произведения квантовых состояний неприводимых представлений к зацепленному базису состояний неприводимого представления в прямой сумме, на которую разлагается это произведение. Это — задача расчета коэффициентов Клебша–Гордана, а также ее обобщение на случай матричных элементов неприводимых тензорных операторов, выразившееся в теореме Вигнера–Эккарта. В простейших задачах их решение легко находится, а общие методы излагаются как кратко в **§ 1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов** главы 4, так и с подробностями в справочной литературе.

Задача 41. Пользуясь схемами Юнга для группы SU(2) и формулой для размерности представления, запишите схемы для синглета $s = 0$, дублета $s = 1/2$, триплета $s = 1$ и квартета $s = 3/2$ и разложите в прямую сумму тензорные произведения $2 \otimes 2$, $3 \otimes 2$ и $3 \otimes 3$.

Заметка для ободрения читателя. На самом деле мы не предполагаем, что читатель обязательно сможет самостоятельно решить поставленные в этом разделе задачи, но он хотя бы сможет проследить аргументацию изложенного решения, что будет способствовать усвоению понятий курса в практической плоскости.

Задача 42. С помощью группы отражений Вейля покажите, что фундаментальные представления с весами старших векторов $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n$ алгебры $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$, где $\mathrm{N} = n + 1$, n — ранг алгебры, имеют размерность

$$C_{\mathrm{N}}^{k} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(\mathrm{N}-k)!}$$

при условии, что фундаментальные векторы $\boldsymbol{\lambda}_k$ отвечают нумерации простых положительных корней на диаграмме Дынкина от одного края связной диаграммы до другого.

Решение. Каждый элемент группы отражений Вейля переводит неприводимое представление в себя. Для того, чтобы определить число состояний представления, необходимо сосчитать число композиций отражений, которые переводят одно состояние базиса представления во все другие.

Начнем рассмотрение с фундаментального представления с весом $\boldsymbol{\lambda}_1$ у старшего вектора состояния, причем простой положительный корень $\boldsymbol{\alpha}_1$ расположен первым в цепочке корней алгебры $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ на диаграмме Дынкина. Единственное отражение, которое изменяет старший вес этого фундаментального представления, согласно определению

$$\hat{\mathrm{w}}_m \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)},$$

где все простые корни в алгебре $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ имеют одну и туже длину, $(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) = 1$, это

$$\hat{\mathrm{w}}_1 \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1, \qquad \hat{\mathrm{w}}_1(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\lambda}_1.$$

Так как в алгебре $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ все простые положительные корни соединены последовательно от $\boldsymbol{\alpha}_1$ к $\boldsymbol{\alpha}_2$ и так далее, то естественно возникает цепочка однократных отражений от старшего веса к младшему,

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda}_1 \overset{\hat{\mathrm{w}}_1}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \overset{\hat{\mathrm{w}}_2}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 \overset{\hat{\mathrm{w}}_3}{\longleftrightarrow} \ldots \overset{\hat{\mathrm{w}}_n}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 - \ldots - \boldsymbol{\alpha}_n \\ \Updownarrow \\ v^{(1)} \overset{\hat{\mathrm{W}}_1}{\longleftrightarrow} v^{(2)} \overset{\hat{\mathrm{W}}_2}{\longleftrightarrow} v^{(3)} \overset{\hat{\mathrm{W}}_3}{\longleftrightarrow} \ldots \overset{\hat{\mathrm{W}}_n}{\longleftrightarrow} v^{(n+1)}. \end{array} \tag{III.6.40}$$

Тем самым, действуя только однократными отражениями Вейля вдоль простых положительных корней в определенной последовательности, мы перечислили все базисные элементы фундаментального представления v^{c} со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_1$. Это представление называют *определяющим*, так как коэффициенты разложения по базису состояний в этом представлении, v^{c}, записываются в виде столбца с $n + 1 = \mathrm{N}$ компонентами, и именно на этот столбец действуют унитарные унимодулярные[84] матрицы группы SU(N).

Полученный результат можно сформулировать следующим образом:
если рассмотреть множество в виде цепочки элементов группы отражений Вейля вдоль простых положительных корней и тождественного преобразования

$$(\mathbb{1}, \hat{\mathrm{W}}_1, \ldots, \hat{\mathrm{W}}_n), \tag{III.6.41}$$

то выборка по одному из этих $n + 1$ элементов состоит из n+1 элемента (тривиально) и равна числу состояний представления со старшим вектором $\boldsymbol{\lambda}_1$. Количество элементов в выборке равно числу вариантов композиций этих элементов, составленных только из одного элемента, и его целесообразно записать в виде $C_{n+1}^{1} = C_{\mathrm{N}}^{1} = n+1$.

Ясно, что представление со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_n$, который расположен в конце цепочки на диаграмме Дынкина для простых положительней корней группы SU(N), строится из старшего вектора состояния ровно таким же манером, так что возникает сопряженное представление той же размерности $n+1 = \mathrm{N}$, как мы это уже описали при построении фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(3)$, для которой в случае ранга группы, равного двум, есть только эти два фундаментальных представления.

[84] Условие равенства единице детерминанта матрицы называют унимодулярностью.

Описанная картина может теперь применяться и для других фундаментальных представлений. Для примера, в фундаментальном представлении со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_2$ для построения из состояния старшего веса $|\boldsymbol{\lambda}_2\rangle$ других базисных состояний необходимо сначала задействовать вейлевское отражение $\hat{\mathrm{w}}_2$,

$$\hat{\mathrm{w}}_2\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2.$$

Затем можно уже действовать отражениями $\hat{\mathrm{w}}_k$, где $2 < k \leqslant n$, так же, как мы поступали при рассмотрении определяющего представления. Но поскольку простой положительный корень $\boldsymbol{\alpha}_2$ расположен на диаграмме Дынкина вторым после корня $\boldsymbol{\alpha}_1$, с которым есть одинарное соединение, и

$$\hat{\mathrm{w}}_1(\boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1,$$

то на каждом шаге отражения $\hat{\mathrm{w}}_k$, где $2 < k \leqslant n$, допустимо разветвление за счет действия $\hat{\mathrm{w}}_1$ или аналогичным образом за счет действия $\hat{\mathrm{w}}_3$. (Предлагаем читателю самостоятельно изобразить схему с ветвлениями по аналогии с (III.6.40), где ветвлений нет, и разобрать пример алгебры $\mathfrak{su}(4)$ ранга 3 с тремя фундаментальными векторами.) Это значит, что общее число композиций, которые порождают все базисные элементы этого представления, равно числу выборки пар из множества элементов группы (III.6.41, из которых эти композиции построены, т. е.

$$C^2_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{N}(\mathrm{N}-1).$$

Например, для алгебры $\mathfrak{su}(4)$ неупорядоченная выборка пар из множества элементов группы (III.6.41 содержит 6 элементов следующих пар

$$(\mathbb{1}\hat{\mathrm{W}}_1, \mathbb{1}\hat{\mathrm{W}}_2, \mathbb{1}\hat{\mathrm{W}}_3, \hat{\mathrm{W}}_1\hat{\mathrm{W}}_2, \hat{\mathrm{W}}_1\hat{\mathrm{W}}_3, \hat{\mathrm{W}}_2\hat{\mathrm{W}}_3),$$

последовательное действие которых на старший вес $\boldsymbol{\lambda}_2$ порождает все состояния представления, в чем читатель может убедиться самостоятельно, изображая ту же последовательность операций, что была описана нами выше для старшего веса $\boldsymbol{\lambda}_1$, но с поправкой на ветвления. Замечание о неупорядоченной выборке говорит о следующем: если, например, указано двойное отражение $\hat{\mathrm{W}}_2\hat{\mathrm{W}}_3$, то на практике нужно рассмотреть отражение $A\hat{\mathrm{W}}_2\hat{\mathrm{W}}_3 + B\hat{\mathrm{W}}_3\hat{\mathrm{W}}_2$ с $A \neq 0$, $B \neq 0$, так как нас интересуют число независимых состояний в суперпозиции, а не построение состояний, отвечающих определенным весам. К примеру,

$$\hat{\mathrm{w}}_2\hat{\mathrm{w}}_3\boldsymbol{\lambda}_2 = \hat{\mathrm{w}}_2\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \hat{\mathrm{w}}_3\hat{\mathrm{w}}_2\boldsymbol{\lambda}_2 = \hat{\mathrm{w}}_3(\boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3.$$

Первый из этих весов есть результат действия $\mathbb{1}\hat{\mathrm{W}}_2\boldsymbol{\lambda}_2$, так что указанная суперпозиция двойного отражения $A\hat{\mathrm{W}}_2\hat{\mathrm{W}}_3 + B\hat{\mathrm{W}}_3\hat{\mathrm{W}}_2$ дает только один новый независимый вектор состояний, как это и должно быть в принятой нами методике построения элементов фундаментального представления со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_2$.

Таким образом логика проведенного рассмотрения приводит к тому, что размерность фундаментального представления с весом $\boldsymbol{\lambda}_k$ равна числу выборок *k-кратных отражений* из элементов группы Вейля (III.6.41)

$$C^k_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(\mathrm{N}-k)!}.$$

После этого вывода становится обоснованным изображение фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$ в виде столбца из k клеточек: число независимых выборок в полностью антисимметричном тензоре ранга $\mathrm{N}-k$ равно

$$C^{\mathrm{N}-k}_{\mathrm{N}} = C^k_{\mathrm{N}}.$$

Поэтому фундаментальное представление из k клеточек в столбце отвечает неприводимому антисимметричному тензору ранга $\mathrm{N}-k$, построенному из символа Леви-Чивиты в N-мерном пространстве при умножении на k векторов определяющего представления $v^{\mathrm{c}_k}_{[k]}$,

$$\epsilon_{\mathrm{c}_1\ldots\mathrm{c}_k\mathrm{c}_{k+1}\ldots\mathrm{c}_{\mathrm{N}}} v^{\mathrm{c}_1}_{[1]}\cdots v^{\mathrm{c}_k}_{[k]} \;\cong\; \text{фундаментальное представление с состоянием старшего веса } |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle.$$

Эта запись изоморфна внешнему произведению 1-форм, начиная с первой $\omega_{[1]}$ и кончая k-той $\omega_{[k]}$, так что

$$\begin{aligned}\omega_{[1]}\wedge\ldots\wedge\omega_{[k]} \;&\cong\; \text{фундаментальное представление с состоянием старшего веса } |\boldsymbol{\lambda}_k\rangle,\\ &\omega_{[j]} = (v_{[j]})_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\mathfrak{h}}^{\mathrm{c}}, \quad \mathrm{c}\in\overline{\{1,\mathrm{N}\}}.\end{aligned}$$

Для примера, в алгебре $\mathfrak{su}(3)$ (см. раздел **4.1 Фундаментальные представления** главы 3, **§4. Представления $\mathfrak{su}(3)$** на стр. 184) элемент

$$\epsilon_{312}v^{(1)}_{[1]}v^{(2)}_{[2]}$$

отвечает вектору собственных значений

$$\boldsymbol{\lambda}_1 + (\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\lambda}_2,$$

так как собственные значения генераторов подалгебры Картана каждого вектора состояния — это компоненты весового вектора, а для произведения состояний собственные значения складываются, и

$$v^1_{[1]} \;\mapsto\; \boldsymbol{\lambda}_1, \qquad v^{(2)}_{[2]} \;\mapsto\; \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1.$$

Это значит, что нумерация состояний в сопряженном представлении в этой схеме с антисимметричными тензорами отвечает тому, что на третьей позиции значится фундаментальный вектор представления[85]. Кроме того, мы убеждаемся, что старший вектор фундаментального представления может быть построен в виде суперпозиции фундаментального вектора и весов определяющего представления. Например, $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$.

Задача 43. Рассмотрите фундаментальные представления группы SU(5) и диаграммы Юнга для них, используя выражение для размерности неприводимого представления группы SU(N) через шаги D_i и крюки k_i:

$$\dim \mathtt{T}^{(p_1,p_2,\ldots,p_{\mathrm{N}-1})} = \prod_i \frac{\mathrm{N}+D_i}{k_i}. \tag{III.6.42}$$

Используйте схему теории великого объединения (GUT= Great Unified Theory) для фермионов первого поколения: лептонов ν_e, e и кварков u, d, — с квантовыми числами: электрический заряд Q, слабый изоспин T_3^W, цвет по группе $\mathrm{SU}_c(3)$. Учтите, что согласно разделу **3.5 Слабый изоспин** в **§3. Представления** $\mathfrak{su}(2)$ главы 3 в слабых взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса равна $-\frac{1}{2}$) и их CP-сопряженные партнеры — правые античастицы (проекция на ось импульса равна $+\frac{1}{2}$). Распишите состав фундаментальных представлений по фермионам первого поколения. Чему равна сумма зарядов и проекций изоспина компонент фундаментального представления?

Решение. Ранг группы SU(5) равен четырем, а значит, имеется 4 фундаментальных представления и 4 наблюдаемых величины — 4 генератора подалгебры Картана, которые представляют собой диагональные матрицы. На диагоналях расположены вещественные собственные значения наблюдаемой величины, сумма которых равна нулю, так как в простой компактной алгебре Ли след эрмитовой матрицы генератора равен нулю.

Фундаментальные представления отвечают следующим схемам Юнга:

$\square$ — представление $\mathtt{T}^{(1,0,0,0)}$, которое называется определяющим, квинтет **5**, так как согласно **задаче 42** его размерность равна $C_5^1 = 5$, а по общей формуле (III.6.42)

$$\dim \mathtt{T}^{(1,0,0,0)} = \frac{5}{1} = 5,$$

$\begin{array}{|c|}\hline\square\\\hline\square\\\hline\end{array}$ — представление $\mathtt{T}^{(0,1,0,0)}$, декуплет **10**, так как огласно **задаче 42** его размерность равна $C_5^2 = 10$, а по общей формуле (III.6.42)

$$\dim \mathtt{T}^{(0,1,0,0)} = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{1} = 10,$$

$\begin{array}{|c|}\hline\square\\\hline\square\\\hline\square\\\hline\end{array}$ — представление $\mathtt{T}^{(0,0,1,0)}$, декуплет $\overline{\mathbf{10}}$, так как согласно **задаче 42** его размерность равна $C_5^3 = 10$, а по общей формуле (III.6.42)

$$\dim \mathtt{T}^{(0,0,1,0)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1} = 10,$$

$\begin{array}{|c|}\hline\square\\\hline\square\\\hline\square\\\hline\square\\\hline\end{array}$ — представление $\mathtt{T}^{(0,0,0,1)}$, сопряженный квинтет $\bar{\mathbf{5}}$, так как согласно **задаче 42** его размерность равна $C_5^4 = 5$, а по общей формуле (III.6.42)

$$\dim \mathtt{T}^{(0,0,0,1)} = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1} = 5.$$

Сопряженность представлений **5** и $\bar{\mathbf{5}}$ является следствием того, что они по своим индексам преобразуются матрицами U и $U^\dagger$, соответственно, как мы это показали при рассмотрении фундаментальных представлений SU(3). При этом если считать, что квинтет составлен из частиц с зарядами, которые задаются собственными значениями генераторов подалгебры Картана на базисных состояниях квинтета, то сопряженный квинтет содержит античастицы, т. е. состояния с зарядами противоположного знака по сравнению с зарядами состояний в квинтете.

Что касается декуплетов **10** и $\overline{\mathbf{10}}$, то их наименование с чертой или без нее является условным и указывает на то, что они также составлены из частиц и античастиц по отношению к друг другу.

[85] Этот вывод согласуется с явным построением триплета первого фундаментального представления (u, d, s) и триплета сопряженного представления $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$, как мы это показали в разделе **4.1 Фундаментальные представления** главы 3, **§4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$. Сопряжение отвечает смене знаков всех собственных значений — весов. При этом мы не изменяем нумерацию сопряженных состояний, т. е. переводим состояние в сопряженное, оставляя его на том же месте в триплете. В данном случае старший вектор первого фундаментального представления, u, занимает первое место, а старший вектор сопряженного фундаментального представления, $\bar{s}$, последнее, третье.

Вместе с тем, группа SU(5) содержит в себе две подгруппы: SU(2) по слабому взаимодействию и SU(3) по сильному взаимодействию. Подгруппа SU(2) действует на две верхних компонента квинтета, которые являются синглетными по отношению к подгруппе SU(3), так что эти две компоненты квинтета не обладают сильным взаимодействием. Подгруппа SU(3) действует на три нижних компоненты квинтета, являющиеся синглетными по подгруппе SU(2), так что эти три компоненты квинтета не обладают слабым взаимодействием. Как следствие в квинтете можно выделить в качестве генераторов подалгебры Картана блочные матрицы проекции изоспина T_3 подгруппы SU(2) и диагональные генераторы $\frac{1}{2}\lambda_3$ и $\frac{1}{2}\lambda_8$ подгруппы SU(3). Эти три генератора подалгебры Картана группы SU(5) в пятимерном пространстве первого фундаментального, определяющего представления квинтета имеют вид матриц размером 5×5, явный вид которых прямо следует из их определения в подгруппах SU(2) и SU(3) так, что

$$\hat{T}_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tfrac{1}{2}\,\lambda_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tfrac{1}{2}\,\lambda_8 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Но поскольку ранг группы SU(5) равен 4, то число генераторов подалгебры Картана этой группы тоже равно 4, и к указанным трем генераторам подалгебры Картана из подгрупп SU(2) и SU(3) необходимо добавить четвертый. В качестве четвертого элемента подалгебры Картана Γ_Y в группе SU(3) можно задать диагональную матрицу, пропорциональную гиперзаряду Y, который в примере с группой SU(2) для слабых взаимодействий складывается из электрического заряда и проекции изоспина $\frac{1}{2}Y = Q - T_3$. Коэффициент пропорциональности между гиперзарядом Y и четвертым генератором подалгебры Картана Γ_Y необходимо задать так, чтобы он обеспечивал одно и тоже значение следа квадрата любого генератора подалгебры Картана. Значения таких следов в заданном неприводимом представлении, в данном случае в фундаментальном представлении группы SU(3) связаны со значениями отличных от нуля элементов метрики Киллинга простой компактной группы SU(3). Но, поскольку метрика Киллинга SU(3) пропорциональна евклидовой метрике, следы квадратов генераторов подалгебры Картана в заданном представлении должны быть одинаковыми. Более того, должна иметь место взаимная «ортогональность» (в смысле диагональности метрики Киллинга) генераторов подалгебры Картана: следы произведений различных генераторов подалгебры Картана равны нулю. Из этих условий находим, что

$$\Gamma_Y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\cdot\tfrac{1}{2}\,Y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}\,(\Gamma_Y^2) = \mathrm{tr}\,(T_3^2) = \mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}\lambda_3^2\right) = \mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}\lambda_8^2\right) = \tfrac{1}{2} \tag{III.6.43}$$

при $\mathrm{tr}\,(\Gamma_Y T_3) = \mathrm{tr}\,(\Gamma_Y\lambda_3) = \mathrm{tr}\,(\Gamma_Y\lambda_8) = 0$.

Из приведенного явного вида матрицы гиперзаряда Y, который в случае подгруппы $\mathrm{SU}_L(2)$ для слабого взаимодействия выражался через барионное и лептонное число как $Y^W = B - L$, и матрицы слабого изоспина $\hat{T}_3$ следует, что первые две из пяти компонент квинтета являются состояниями с $Y = -1$ и электрическим зарядом $Q = \frac{1}{2}Y + T_3$, равным $Q[\nu] = 0$ при $T_3 = \frac{1}{2}$ и $Q[e] = -1$ при $T_3 = -\frac{1}{2}$, что согласуется со значением лептонного числа $L = 1$ и отвечает нейтрино и электрону. соответственно. Три оставшиеся компоненты квинтета являются синглетными по подгруппе слабого изоспина $\mathrm{SU}_L(2)$, так как $T \equiv 0$, и преобразуются как триплет по цветовой подгруппе сильного взаимодействия $\mathrm{SU}_c(3)$. При этом электрический заряд этих трех компонент квинтета равен $Q = \frac{1}{3}$, что согласуется с тем, что эти три компоненты — компоненты левого цветного антикварка $\bar{d}_L$, который обладает именно таким электрическим зарядом и не имеет слабого взаимодействия[86]. Таким образом квинтет составлен из левых спиноров: лептонного дублета по слабому взаимодействию и антикваркового триплета, синглетного по слабому взаимодействию:

$$\mathbf{5} \;\cong\; v \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e\\ e_L\\ \bar{d}_L^{c_1}\\ \bar{d}_L^{c_2}\\ \bar{d}_L^{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L^e\\ e_L\\ \bar{d}_L^{c} \end{pmatrix}. \tag{III.6.44}$$

Тогда в декуплете, построенном как внешнее произведение двух квинтетов, компонента $v^{(1)}_{[1]} \wedge v^{(2)}_{[2]}$, где $v^{(1)}_{[1]}$ и $v^{(2)}_{[2]}$ обозначают, соответственно, нейтрино и электрон, обладает квантовыми числами, которые получаются

[86] Интересно, что состояние $\bar{d}_L$ несет барионное число $B = -\frac{1}{3}$, как это и должно быть у антикварка, но по формуле для лептонного числа в группе слабого взаимодействия $L = B - 2(Q - T_3)$ обладало бы $L = -1$. Это означает, что формула для гиперзаряда $Y^W = B - L$ через барионное B и лептонное число L не обобщается с подгруппы SU(2) на гиперзаряд в группе SU(5). Поэтому мы трактуем гиперзаряд в SU(5) как отдельное квантовое число, определяющее электрический заряд в виде $Q = \frac{1}{2}Y + T_3$, где в правой части стоят операторы, заданные в группе SU(5).

сложением квантовых чисел этих базисных состояний квинтета. Поэтому $v^{(1)}_{[1]} \wedge v^{(2)}_{[2]}$ так же, как и лептонный дублет в квинтете, является синглетом по подгруппе цвета SU(3), ее изоспин равен сумме проекций изоспина в лептонном дублете нейтрино и электрона $T_3 = 0$, а гиперзаряд — сумме гиперзарядов в этом же лептонном дублете $Y = -2$, т. е. гиперзаряд имеет тот же знак, что и у электрона и нейтрино в квинтете **5**. Поэтому резонно считать, что декуплет **10** следует обозначить символом мультиплетности без черты, как и квинтет. В то же время в сопряженном декуплете $\overline{\mathbf{10}}$, построенном как внешнее произведение трех квинтетов, компонента, которая является синглетом по подгруппе SU(3), $v^{(3)}_{[1]} \wedge v^{(4)}_{[2]} \wedge v^{(5)}_{[3]}$, так как она представляет из себя полностью антисимметричное по перестановке цветов состояние, составленное из трех состояний $\bar{d}^c_L$, обладает нулевым изоспином и гиперзарядом, равным сумме зарядов трех левых антикварков $Y = +2$, что указывает на то, что $\overline{\mathbf{10}}$ построен из античастиц по отношению к лептонному дублету в квинтете.

Резюмируем проведенное отождествление компонент квинтета с электроном, нейтрино и антикварком. По условию задачи задан комплект состояний первого поколения фермионов (см. раздел **3.5 Слабый изоспин** в **§3. Представления** $\mathfrak{su}(2)$ главы 3 на стр. 180): по слабому взаимодействию выделяют дублеты левых лептонов и кварков и их античастиц [87]

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu^e_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e^+_R \\ -\bar{\nu}^e_R \end{pmatrix}, \tag{III.3.41}$$

квантовые числа которых задаются электрическими зарядами и слабым изоспином, а также синглеты по слабому взаимодействию (правые частицы и CP-сопряженные им левые античастицы)

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \qquad e_R, \quad e^+_L, \tag{III.3.42}$$

у которых слабый изоспин равен нулю. Кроме того, кварки являются триплетами $\mathbf{3}_c$ по цветовой группе $\mathrm{SU}_c(3)$, а антикварки — антитриплетами $\overline{\mathbf{3}}_c$. Всего с учетом цвета в первом поколении насчитывается 30 квантовых состояний, которые с учетом трех цветовых состояний кварков и антикварков перечислены в выражениях (III.3.41) и (III.3.42), и их количество в точности совпадает с числом состояний в 4-х фундаментальных представлениях группы SU(5).

В группе SU(5) содержится подгруппа $\mathrm{SU}_L(2)\times\mathrm{SU}_c(3)$, так как в определяющем 5-мерном представлении всегда можно выделить 2 компоненты сверху, которые преобразуются по группе слабого изоспина, и 3 компоненты снизу, которые преобразуются по цвету, причем 2 компоненты сверху не должны нести цвет, а 3 компоненты снизу не должны иметь слабый изоспин. Значит, в определяющем представлении в квинтете по SU(5) имеет смысл выбрать в качестве 2 верхних компонент дублет левых лептонов.

Учтем, что ранг группы SU(5) равен 4, и кроме проекции слабого изоспина (1 наблюдаемая) и цвета (2 генератора в подалгебре Картана) компоненты представления обладают еще одним квантовым числом — электрическим зарядом. Электрический заряд Q выражается через проекцию слабого изоспина T_3 группы SU(2) и введенный нами выше в формуле (III.6.43) гиперзаряд Y или пропорциональный ему Γ_Y:

$$Q = \tfrac{1}{2}\, Y + T_3 = \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, \Gamma_Y + T_3,$$

что эквивалентно переходу к новым параметрам групповых координат, которые вместо генераторов подалгебры Картана Γ_Y и T_3 задают генераторы Q и T_3. Тогда электрический заряд описывается генератором подалгебры Картана, а поскольку сумма собственных значений эрмитово самосопряженного генератора алгебры Ли равна нулю, то и в случае генератора Q сумма зарядов состояний в определяющем представлении должна обращаться в нуль: заряд 3-х цветных компонент в квинтете должен равняться $+1$, так как сумма зарядов нейтрино и электрона равна -1. Итак, в квинтет в качестве 3-х нижних компонент входят кварки в зарядом $+\frac{1}{3}$, изосинглетные по слабому взаимодействию. Таким электрическим зарядом обладает антикварк, который мы обозначаем символом $\bar{d}$ с цветовым индексом $c = \{c_1, c_2, c_3\}$, а изосинглетный по слабому взаимодействию антикварк является

[87] Напомним, что согласно детальному рассмотрению, которое представлено в разделе **4.1Спинорная метрика, §4. Спин $s = 1/2$** главы 1, сопряженный двухкомпонентный спинор $\psi_{\mathrm{C}} \equiv \bar{\psi}$ отличается от комплексно сопряженного спинора ψ^* и определяется как

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi^*, \quad \text{где } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ после комплексного сопряжения } \psi^*_{1,2} \equiv \bar{\psi}_{1,2} \text{ дает } \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_2 \\ -\bar{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на следующую традицию обозначений: черта над компонентой спинора означает комплексное сопряжение, а черта над спинором означает, что комплексно сопряженный спинор еще и умножен на спинорную метрику. В математике обычно оперируют комплексно сопряженным представлением ψ^*, а в физике часто используют сопряженный спинор $\bar{\psi}$: компоненты сопряженного спинора получаются после умножения комплексно сопряженного столбца ψ^* на спинорную метрику

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты комплексно сопряженного спинора описывают античастицы, которые мы специально обозначили вместо звездочки чертой $\psi^*_{1,2} \mapsto \bar{\psi}_{1,2}$, чтобы подчеркнуть, что при переходе к античастицам спинор меняет киральность: левый спинор частицы становится правым спинором античастицы, а правый спинор частицы — левым спинором античастицы, поскольку для киральных спиноров определена только операция комбинированной $\mathbb{CP}$-четности, когда меняется и знак заряда, и киральность (свойство базиса состояний по группе Лоренца).

левым спинором, так как правый антикварк принадлежит слабому изодублету, сопряженному фундаментальному изодублету левых кварков. В итоге, квинтет (III.6.44) составлен из левых спиноров: лептонного дублета по слабому взаимодействию и антикваркового триплета, синглетного по слабому взаимодействию:

$$\mathbf{5} \;\cong\; v \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c_1} \\ \bar{d}_L^{c_2} \\ \bar{d}_L^{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c} \end{pmatrix}.$$

Сопряженный по группе SU(5) квинтет обозначается как $\bar{\mathbf{5}}$. Его можно построить как антисимметричное тензорное произведение четырех фундаментальных представлений (каждое со своим номером):

$$u_{a_1} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} v_{[2]}^{a_2} v_{[3]}^{a_3} v_{[4]}^{a_4} v_{[5]}^{a_5}.$$

Например, квантовые числа компоненты $a_1 = 1$ совпадают с суммой квантовых чисел компонент $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, как это следует из антисимметричности символа Леви-Чивиты в 5-мерном пространстве, т. е. заряд компоненты u_1 равен

$$Q = Q[e] + 3Q[\bar{d}] = -1 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 0,$$

а проекция слабого изоспина равна

$$T_3 = T_3[e_L] + 3T_3[\bar{d}_L] = -\tfrac{1}{2} + 3 \cdot 0 = -\tfrac{1}{2},$$

что совпадает с квантовыми числами правого антинейтрино. При этом необходимо учесть, что антисимметричное произведение трех компонент сопряженного фундаментального представления группы $\mathrm{SU}_c(3)$, которому принадлежат цветные антикварки, является синглетом по цвету. Аналогично находим, что

$$Q[u_2] = +1, \quad T_3[u_2] = +\tfrac{1}{2}, \qquad Q[u_{3,4,5}] = -\tfrac{1}{3}, \quad T_3[u_{3,4,5}] = 0.$$

Это значит, что вторая компонента имеет квантовые числа правого позитрона, а три оставшиеся компоненты — это правый d-кварк (вопрос о цвете этих компонент по группе $\mathrm{SU}_c(3)$ рассмотрите самостоятельно). Сопряженный квинтет обозначают символом $\bar{v}^a$, а его состав был только что рассчитан нами с учетом комбинированной $\mathbb{CP}$-четности, которая не только меняет знаки у зарядов состояний, но и спиральность — проекцию спина на ось импульса в безмассовом пределе (это экспериментальный факт исследования слабых взаимодействий). Подчеркнем, что рассчитанные нами квантовые числа: электрический заряд, изоспин и цвет совпадают с квантовыми числами правых спиноров, но из наших построений никак не следует, что сопряженный квинтет составлен из спиноров. Мы постулируем, что совпадение квантовых чисел означает, что компоненты сопряженного квинтета — это спиноры. Это значит, что

$$\bar{\mathbf{5}} \;\cong\; \bar{v} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R^{c_1} \\ d_R^{c_2} \\ d_R^{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R^{c} \end{pmatrix}. \tag{III.6.45}$$

Фундаментальное определяющее представление $\mathbf{5}$ позволяет вычислить все характеристики компонент декуплетов $\mathbf{10}$ и $\overline{\mathbf{10}}$, если их составлять в форме антисимметричных сверток с символом Леви-Чивиты, а квантовые числа компонент тензорного произведения складывать. Поэтому, например, у сопряженного декуплета $\overline{\mathbf{10}}$

$$u_{a_1 a_2} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} v_{[1]}^{a_3} v_{[2]}^{a_4} v_{[3]}^{a_5}$$

компонента $u_{12} \sim \epsilon_{12345} v_{[1]}^{(3)} v_{[2]}^{(4)} v_{[3]}^{(5)}$ обладает

$$Q = Q[v^{(3)}] + Q[v^{(4)}] + Q[v^{(5)}] = 3Q[\bar{d}] = +1, \quad T_3 = 3T_3[\bar{d}_R] = 0,$$

и является синглетом по цвету, так как это свертка трех антитриплетов по цвету с тензором Леви-Чивиты по индексам a_3, a_4, a_5. Замечаем, что это характеристики левого позитрона, и u_{12} можно отождествить с e_L^+: электрический заряд $+1$, синглет по цвету и синглет по слабому изоспину (правый позитрон e_R^+ $\mathbb{CP}$-сопряжен левому электрону e_L^-, так что e_R^+ несет отличный от нуля слабый изоспин, а именно, $T_3[e_R^+] = \frac{1}{2}$).

Аналогично, компоненты u_{13}, u_{14} и u_{15} несут

$$Q = Q[e] + 2Q[\bar{d}] = -\tfrac{1}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + 2T_3[\bar{d}_L] = -\tfrac{1}{2},$$

и это частица, которая обладает слабым изоспином нижней компоненты дублета $T_3 = -1/2$ и является цветовым триплетом, так как, например, в комбинации $u_{13} \sim \epsilon_{13245} v_{[1]}^{(2)} v_{[2]}^{(4)} v_{[3]}^{(5)} + \ldots \sim \epsilon_{3 c_1 c_2 e} \bar{d}_{c_1} \bar{d}_{c_2}$ в силу антисимметрии по перестановкам c_1 и c_2 число цветных состояний равно трем, причем они построены из тензорного произведения

двух антикварковых антитриплетов по цвету $\overline{\mathbf{3}}_c \times \overline{\mathbf{3}}_c$, и такое состояние несет заряд $Q = -1/3$ как у d-кварка, т. е. соответствует состоянию $d_L \equiv u_{1c}$. Поэтому мы постулируем, что эта компонента декуплета и есть спинор левого d-кварка.

Точно так же $u_{2c} \equiv u_L$,

$$Q = Q[\nu] + 2Q[\bar{d}] = \tfrac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[\nu_L^e] + 2T_3[\bar{d}_R] = \tfrac{1}{2},$$

и для u_{34}, u_{35} и u_{45}

$$Q = Q[e] + Q[\nu] + Q[\bar{d}] = -\tfrac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + +T_3[\nu_L^e] + T_3[\bar{d}_R] = 0,$$

так что это антитриплет по цвету (один цветовой индекс свободен и совпадает с цветовым зарядом антикварка в определяющем представлении), т. е. $\bar{u}_L$.

С учетом антисимметрийных свойств тензора Леви-Чивиты все эти компоненты сопряженного декуплета приводят в виде антисимметричной матрицы 5×5,

$$\overline{\mathbf{10}} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c_1} & d_L^{c_2} & -d_L^{c_3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c_1} & -u_L^{c_2} & u_L^{c_3} \\ d_L^{c_1} & -u_L^{c_1} & 0 & \bar{u}_L^{c_3} & -\bar{u}_L^{c_2} \\ -d_L^{c_2} & u_L^{c_2} & \bar{u}_L^{c_3} & 0 & \bar{u}_L^{c_1} \\ d_L^{c_3} & -u_L^{c_3} & \bar{u}_L^{c_2} & -\bar{u}_L^{c_1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.6.46}$$

Декуплетное представление **10** записывается в виде аналогичной матрицы, в которой левые частицы заменяются на правые античастицы[88].

Обратим внимание на тот факт, что стерильное нейтрино, которое по определению несет равные нулю заряды как электрического, так и слабого взаимодействий, а также не имеет цвета, является синглетом по группе SU(5) и поэтому стерильное нейтрино не вошло в состав ни фундаментальных, ни каких-либо иных точных представлений группы SU(5). Предполагается, что стерильное нейтрино могло бы участвовать во взаимодействиях, которые приводят к появлению отличной от нуля массы нейтрино. Это говорит о том, что нейтрино, обладающее массой, существование которой доказано в экспериментах с осцилляциями нейтрино разных поколений, либо возникает без участия стерильного, либо для объяснения массы нейтрино необходимо использовать мультиплеты других групп, имея в виду, что в целом ряде физических явлений достаточно использовать фундаментальные представления группы SU(5).

Разделение групп, описывающих мультиплеты квантовых состояний в зависимости от физических характеристик процессов с участием всех компонент мультиплета, называют иерархией групп симметрии.

В качестве характеристики процессов рождения частиц мультиплета в реакциях рассеяния или распада рассматривают суммарную энергию частиц в системе центра масс, которая сохраняется в таких реакциях. Порогом реакции называют суммарную энергию, при которой становится возможной реакция рождения любой частицы из мультиплетов неприводимых представлений группы, которые реализуются в природе, что зависит от масс частиц в мультиплетах. Такой порог, который зависит от группы, называют энергетическим масштабом этой группы. Масштабы различных групп упорядочивают по мере их возрастания. Этот порядок групповых масштабов и называют иерархией групп. На практике более широкая группа симметрии имеет более высокий масштаб энергии для образования любых состояний ее физически реализованных мультиплетов.

Задача 44. Какому набору $(p_1, \ldots, p_n)$ в разложении старшего веса по фундаментальным векторам отвечает присоединенное представление группы SU(N), где ранг группы $n = \mathrm{N} - 1$, а фундаментальные векторы пронумерованы в соответствии с расположением простых положительных корней $\boldsymbol{\alpha}_m$ на диаграмме Дынкина от края $m = 1$ до края $m = n$? **Ответ:** представление $\mathbf{T}^{(1,0,\ldots,0,1)}$.

Задача 45. Найдите все положительные корни $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}}$ группы SU(N).

Решение. Каждый простой положительный корень $\boldsymbol{\alpha}_m$ алгебры $\mathfrak{su}(\mathrm{N})$, начиная с первого при $m = 1$ и кончая предпоследним при $m = n - 1$, согласно диаграмме Дынкина соединен одной линией с последующим простым корнем, т. е. при построении положительных корней как последовательностей из простых корней допускается только один шаг сложения двух последовательных простых корней, и это верно для всех простых положительных корней, кроме последнего по порядку простого корня $\boldsymbol{\alpha}_n$, так как простого положительного корня с большим номером не существует. Поэтому перечисление все положительных корней сводится к следующему:

все простые корни

$$\boldsymbol{\alpha}_m, \quad m \in \overline{\{1, n\}}, \qquad n = \mathrm{N} - 1,$$

[88] Вообще говоря, для декуплета **10** от стандартного антисимметричного тензора 3-го ранга нужно перейти к дуальному тензору второго ранга.

все последовательные пары простых корней

$$\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1}, \quad p \in \overline{\{1, n-1\}},$$

все последовательные тройки простых корней

$$\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1} + \boldsymbol{\alpha}_{p+2}, \quad p \in \overline{\{1, n-2\}},$$

и так до последнего шага — последовательной суммы всех простых корней

$$\sum_m \boldsymbol{\alpha}_m.$$

Итого: всех положительных корней

$$K = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}\, n(n+1) = \frac{1}{2}\, \mathrm{N}(\mathrm{N}-1).$$

Общее число генераторов N_G получится, если сложить число генераторов из подалгебры Картана n с числом всех положительных корней K и таким же числом всех отрицательных корней,

$$N_G = n + 2K = \mathrm{N} - 1 + \mathrm{N}(\mathrm{N}-1) = \mathrm{N}^2 - 1.$$

Задача 46. Покажите, что старший вес присоединенного представления группы SU(N)

$$\boldsymbol{\mu}_S = \sum_{m=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_m,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_m$ — простые положительные корни, а длина этого веса $\boldsymbol{\mu}_S^2 = 1$.

Докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с корнями из последовательностей, определенных в предыдущей задаче, также равна единице,

$$\sum_{p=1}^{n} (\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\mu}_S) = 1, \qquad \sum_{p=1}^{n-1} \big((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1}), \boldsymbol{\mu}_S\big) = 1, \qquad \sum_{p=1}^{n-2} \big((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1} + \boldsymbol{\alpha}_{p+2}), \boldsymbol{\mu}_S\big) = 1, \ldots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира,

$$\langle C_2 \rangle = (\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\mu}_S) + \sum_{\tilde{m}} (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{m}}, \boldsymbol{\mu}_S), \tag{III.2.5}$$

найдите

$$C_A = C_2^{\mathrm{ad}} = 1 + \sum_{j=1}^{n} 1 = 1 + n = \mathrm{N}.$$

Задача 47. Для определяющего фундаментального представления с весом $\boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\lambda}_1$ группы $\mathrm{SU}(n+1)$ докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с положительными корнями каждой последовательности

$$\sum_{p=1}^{n} (\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\mu}_S) = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{p=1}^{n-1} \big((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1}), \boldsymbol{\mu}_S\big) = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{p=1}^{n-2} \big((\boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_{p+1} + \boldsymbol{\alpha}_{p+2}), \boldsymbol{\mu}_S\big) = \frac{1}{2}, \ldots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира (III.2.5), найдите

$$C_F = C_2^F = \boldsymbol{\lambda}_1^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = \boldsymbol{\lambda}_1^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{N}-1).$$

Установите, что в базисе простых положительных корней единичной длины

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0 \ldots, 0\big), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \big(0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \ldots, 0\big), \ldots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \big(0, \ldots, 0, -\tfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}}, \tfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}}\big)$$

координаты фундаментального вектора равны

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}, \ldots, -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right).$$

Найдите

$$\boldsymbol{\lambda}_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{2}\, \frac{n}{n+1}.$$

Выведите значение

$$C_F = \frac{\mathrm{N}^2 - 1}{2\mathrm{N}}. \tag{III.6.47}$$

Используя общее выражение для индекса Дынкина

$$T_R = \tilde{C}_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\mathrm{ad}}}, \tag{II.2.50}$$

докажите, что $T_F = \frac{1}{2}$.

§7. Генераторы, токи, составные состояния и калибровочная гипотеза

Связь генераторов группы с физическими токами, калибровочная гипотеза, предсказание нейтральных слабых токов, диаграммы для матричных элементов, великое объединение и токи лептокварков, иерархия масштабов спонтанного нарушения калибровочной симметрии и вакуум, распад протона.

В этом параграфе мы покажем, как система понятий, принятая в физике для описания взаимодействий в рамках квантовых состояний, связана с терминами описания групп Ли, теория представлений которых была изучена в предыдущих главах и параграфах.

7.1 Взаимодействия как групповые преобразования состояний

Преобразование базисных состояний в рамках мультиплета неприводимого представления группы при действии генераторов алгебры Ли в физике называют термином «ток». В этом смысле наблюдаемое изменение квантовых состояний называют проявлением взаимодействия, что эквивалентно понятию корневых генераторов групповых преобразований в некотором представлении алгебры Ли. На примере слабого взаимодействия в разделе **3.5 Слабый изоспин, §3.Представления** $\mathfrak{su}(2)$ главы 3 было дано объяснение того, что бета-распад нейтрона есть проявление слабого взаимодействия кварков, которое при более детальном рассмотрении экспериментальных данных соответствует заряженным токам в группе $\mathrm{SU}_L(2)$, т. е. преобразованиям при действии на квантовые состояния базиса фундаментального представления генераторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$.

Однако, повышающие и понижающие генераторы не исчерпывают весь набор генераторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$, так как в него входят и генераторы из подалгебры Картана, которые не изменяют квантовые числа состояния[89], поскольку базис пространства состояний построен из совместных собственных состояний полного набора наблюдаемых величин, включающего в себя генераторы подалгебры Картана. На примере слабого взаимодействия это значит, что левое нейтрино как верхняя компонента слабого

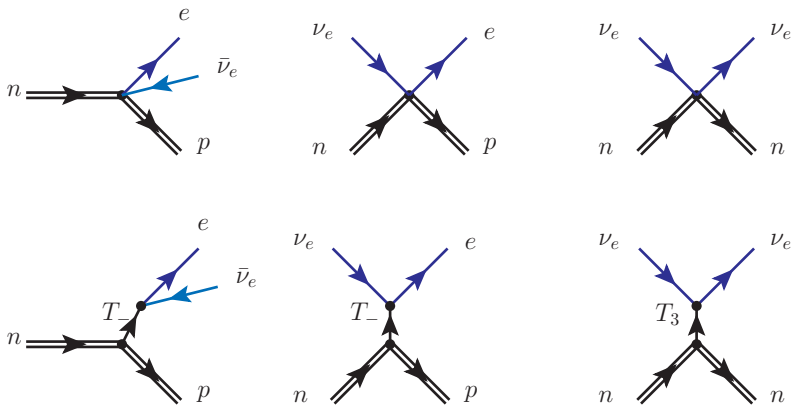


Рис. 3.13: В верхнем ряду распад нейтрона, рассеяние нейтрино на нейтронах за счет слабых заряженных и нейтральных токов, в нижнем — те же процессы, в которых символически указаны генераторы алгебры $\mathfrak{su}(2)$, которые отвечают преобразованию состояний слабых изодублетов.

изодублета, т. е. как базисное состояние неприводимого представления для группы слабых взаимодействий при действии понижающего генератора переходит в состояние левого электрона, а при действии

[89] Напомним, что квантовыми числами называются номера базисных квантовых состояний, которые взаимноднозначно связаны с наборами собственных значений операторов полного набора наблюдаемых. Поэтому часто квантовые числа отождествляют с самим набором собственных значений операторов полного набора наблюдаемых. Терминологически выделен случай, когда базисные состояния маркируются не номером, а непрерывной величиной, например импульсом. Тогда вместо термина «квантовое число» используют термин «спектральный параметр».

генератора подалгебры Картана на левое нейтрино как базисное состояние представления это нейтрино переходит само в себя, так как генератор подалгебры Картана не изменяет базисное квантовое состояние. По введенной терминологии отождествления математического понятия генератора с физическим понятием тока это означает, что генератору подалгебры Картана соответствует нейтральный слабый ток — ток без изменения квантовых чисел базисного состояния. Этот ток мы называем слабым потому, что мы рассматриваем его в рамках групповой симметрии $\mathrm{SU}_L(2)$ слабых взаимодействий. В самой общей формулировке алгебра Ли с необходимостью приводит к выводу о существовании *нейтральных токов*, в частности, нейтральных токов слабого взаимодействия. Этот ток не может совпадать с нейтральным током электромагнитного взаимодействия, так как электромагнитный ток — это ток отличных от нуля электрических зарядов, а электрический заряд нейтрино равен нулю. Значит, если в природе наблюдаются слабые заряженные токи, например, при распаде нейтрона, когда одно базисное состояние слабого изодублета переходит в другое состояние изодублета (распад d-кварка в u-кварк) или при рассеянии нейтрино на нейтроне, когда состояние нейтрино переходит в состояние электрона, а нейтрон — в протон, то групповой характер описания слабых токов предсказывает процессы со слабым нейтральным током, когда, например, слабое взаимодействие нейтрино с нейтронами вещества приводит не только к появлению в конечном состоянии заряженных лептонов (электронов), но и к регистрации процессов рассеяния, когда в конечном состоянии наблюдаются все те же нейтрино. Распад нейтрона и процессы рассеяния за счет слабого взаимодействия проиллюстрированы на рис. 3.13.

После экспериментального открытия слабых нейтральных токов в процессах с рассеянием нейтрино на веществе Вайнберг, Салам и Глэшоу были удостоены Нобелевской премии за предсказание этих токов в модели электрослабого взаимодействия лептонов и кварков.

Напомним, что корни по построению представляют из себя разность собственных значений генераторов подалгебры Картана на состояниях мультиплета алгебры Ли. Поэтому *значения корневых векторов алгебры Ли, которые*, как мы показали в разделе **2.4 Веса присоединенного представления** главы 3, *совпадают с весами состояний в присоединенном представлении, отождествляют с квантовыми числами заряженных токов, которые реализуют присоединенное представление, в то время как нейтральные токи отвечают нулевым изменениям весов, которые представлены собственными значениями генераторов подалгебры Картана в присоединенном представлении.* Из этого общего утверждения в случае $\mathrm{SU}_L(2)$ сдедует, что слабый заряженный ток по построению обладает квантовыми числами, равными значениям компонент корневых векторов присоединенного представления, или, как говорят, «несет слабый изоспин» с компонентами $T_3 = \pm 1$, что отвечает разности проекций изоспина у верхней и нижней компонент изодублета и совпадает со значениями координаты T_3 для положительного и отрицательного корневых векторов группы SU(2), а $T_3 = 0$ соответствует нейтральному току с весом генератора подалгебры Картана в группе SU(2). Это значит, что слабые токи как генераторы присоединенного представления имеют три компоненты изоспина, равного $T = 1$.

Итак, идея слабых токов проиллюстрирована в нижнем ряду рис. 3.13: парное изменение компонент слабого изоспина в двух дублетах, как показано в верхнем ряду на этом рисунке, рассматривается как два акта взаимодействия одного дублета через промежуточное состояние с другим дублетом. Число промежуточных состояний определяется числом генераторов, так что относительно действия группы пространство промежуточных состояний является присоединенным представлением. Говорят, что заряженный ток — это промежуточное состояние во взаимодействии двух слабых дублетов. Эксперимент подтверждает такую теорию: промежуточные состояния действительно существуют в виде $W^{\pm}$- и Z-бозонов.

• Диаграммы с токами

Наглядным представлением преобразования базисных состояний за счет действия генераторов симметрии являются диаграммы, которые согласно правилам взаимнооднозначно соответствуют матричным элементам генераторов между начальным и конечным состояниями. Сформулируем эти правила.

Действие генератора на состояние называется вершиной взаимодействия (vertex) и изображается на диаграмме точкой (dot). Если генератор действует на кет-состояние, то на диаграмме это отвечает двум линиям, которые входят в вершину, т. е. на каждой из линий указывается стрелка, направленная в вершину. У каждой линии указывается «имя» состояния или генератора. В результате действие генератора Γ на исходное базисное состояние $|\mathfrak{i}\rangle$ неприводимого представления получается конечное состояние состояние $|\mathfrak{f}\rangle$, что на диаграмме обозначается в виде исходящей из вершины линии с именем конечного состояния. Это также можно описать матричным элементом

$$\langle \mathfrak{f}|\big(\Gamma|\mathfrak{i}\rangle\big),$$

так что исходящая линия конечного состояния отвечает эрмитово сопряженному конечному состоянию, т. е. бра-вектору $|\mathfrak{f}\rangle^{\dagger} = \langle \mathfrak{f}|$. В приведенной выше записи матричного элемента необходимость скобок обусловлена тем, что генератор может быть неэрмитовым и важно указать, на какое именно состояние

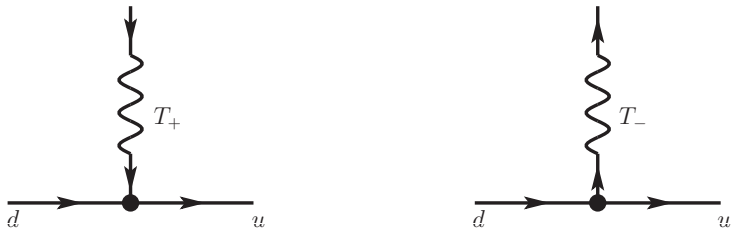


Рис. 3.14: Диаграммы для матричного элемента перехода d-кварка в u-кварк за счет заряженного тока слабого взаимодействия.

он действует. Более того, поскольку

$$\langle \mathfrak{f}|\big(\Gamma|\mathfrak{i}\rangle\big) = \big(\Gamma^\dagger|\mathfrak{f}\rangle\big)^\dagger|\mathfrak{i}\rangle,$$

этот же матричный элемент описывается диаграммой с вершиной, в которую входит линия с именем $\mathfrak{i}$, а выходят две линии, отвечающие эрмитово сопряженным символам: состоянию с именем конечного состояния $\mathfrak{f}$ и току с именем эрмитово сопряженного генератора $\Gamma^\dagger$, поскольку именно этот генератор воздействует на состояние, которое затем из «кет» эрмитово сопрягается в «бра». Обычно токи изображаются волнистой линией, а состояния сплошной.

Эти правила позволяют сопоставить матричному элементу преобразования d-кварка в u-кварк в слабом распаде

$$\langle u|\big(T_+|d\rangle\big) = \big(T_-|u\rangle\big)^\dagger|d\rangle$$

диаграмму, показанную на рис. 3.14.

В таком же формализме произведение матричных элементов слабого распада d-кварка

$$\langle u|\big(T_+|d\rangle\big)\langle e|\big(T_-|\nu_e\rangle\big)$$

изображено на рис. 3.15. На этом рисунке мы также показали кварки, входящие в состав нейтрона и протона, но не участвующие в слабом распаде, так что эти кварки называют спектаторами (spectators), поскольку их роль сводится к стороннему наблюдению за тем, что происходит на сцене слабого распада. Кроме того, на рисунке обычно предполагают, что стрела времени направлена слева направо. В этом случае следует обратить внимание на то, что линия с нейтрино ориентирована против стрелы времени. Согласно теореме квантовой теории поля о CPT-инвариантности реальность инвариантна относительно совместного преобразования от частиц к античастицам, зеркального отражения пространства и обращения стрелы времени. Но это значит, что движение против стрелы времени эквивалентно движению по стреле времени, но с заменой правого на левое и частиц на античастицы. В нашем случае левое нейтрино, которое участвует в слабых взаимодействиях, при движении против стрелы времени эквивалентно правому антинейтрино, которое движется вперед по времени.

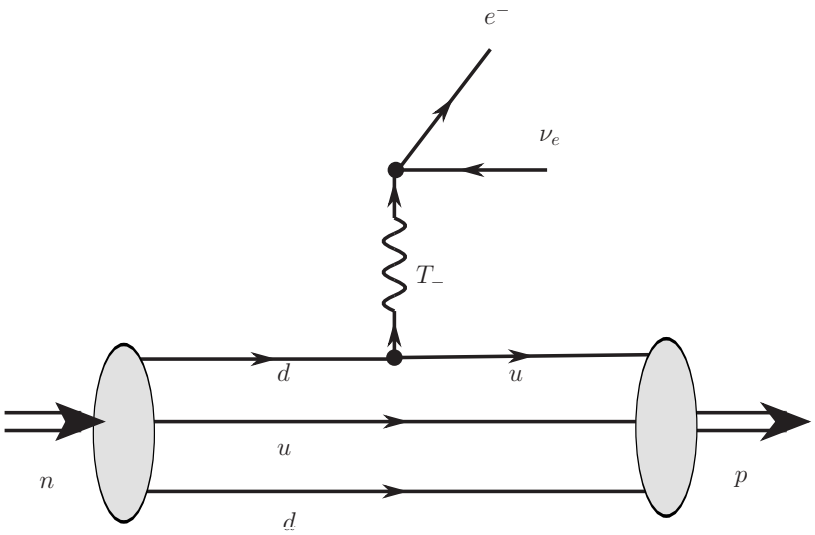


Рис. 3.15: Диаграмма для матричного элемента слабого распада нейтрона.

В таком понимании становится ясно, какой процесс может быть описан той же диаграммой, если линию нейтрино развернуть по стреле времени: тогда в вершины слабого взаимодействия будут входить нейтрон и левое нейтрино, а конечное состояние образуют протон и электрон, что называется процессом неупругого рассеяния нейтрино на нейтроне с электроном и протоном в качестве продуктов рассеяния (если набор исходных и конечных состояний процесса различается, то рассеяние принято называть неупругим).

Если в процессе рассеяния участвуют генераторы подалгебры Картана, то квантовые числа состояний не меняются и может идти упругий процесс с нейтральными токами. Рассеяние нейтрино на нуклонах обладает яркой особенностью («сигнатурой» на профессиональном арго) для экспериментального исследования нейтральных токов: сигналы детекторов резко отличаются, когда через них проходят нейтральные, либо заряженные частицы. В данном случае у нейтрино в отличие от электрона нет электрического заряда.

Наконец подчеркнем, что принципы построения диаграмм для матричных элементов с токами мы описали для групп симметрий, которые принято называть внутренними. В классической физике принято считать, что всякое движение происходит в трехмерном пространстве, общем для всех физических систем. В современном понимании структуры реальности физические системы эволюционируют параллельно в нескольких пространствах, причем пространства не обязательно являются общими для всех систем. Пространства, отличные от общего для всех координатного, принято называть внутренними. Генераторы преобразований внутренних пространств коммутируют с генераторами преобразований всеобщего координатного пространства. Внутренние симметрии относятся к наблюдаемым величинам, которые отличны от наблюдаемых, связанных с пространством-временем Минковского. Принципы построения диаграмм, описанные для внутренних симметрий, могут быть распространены и на пространственно-временные характеристики состояний. В самом деле, непрерывные изометрии пространства-времени Минковского образуют группу Пуанкаре лоренцевых бустов, поворотов и трансляций, но только группа поворотов как подгруппа группы Пуанкаре является компактной. Тем не менее, если следовать общей логике исследования групп, то в группе Пуанкаре также можно выявить инварианты и генераторы подалгебры Картана, а затем и построить неприводимые представления группы Пуанкаре. Неприводимые представления группы Пуанкаре образуют векторные пространства v над базой координат пространства-времени x, т. е. векторные расслоения $v \times x$. Такие векторные расслоения в виде прямого произведения неприводимого представления группы Пуанкаре v на пространство Минковского с 4-координатой x в математике называют локально тривиальными, а в физике — локальными полями. В таком формализме матричные элементы преобразований базисных состояний как по группе внутренних симметрий, так и по группе Пуанкаре можно изображать в виде диаграмм, которые называются диаграммами Фейнмана. В диаграммах Фейнмана необходимо отличать внешние и внутренние линии, поскольку вершина теперь характеризуется еще и точкой пространства-времени и становится важным, отвечает ли линия начальным или конечным состояниям, или она соединяет различные вершины. В первом случае линия внешняя, во втором — внутренняя. Для внутренних линий, которые распространяются между вершинами, необходимо вводить функцию распространения состояния из одной точки в другую. Разные виды функций распространения — пропагаторы Фейнмана или причинные функции Грина — изучаются в рамках квантовой теории поля.

В связи с приведенными в данном разделе аргументами уместно отметить главную идею настоящей книги: открытие групповых структур в физике означает и открытие новых пространств состояний как линейных оболочек базисных состояний неприводимых представлений групп. Это приводит к открытию локальных полей, которые описывают неприводимые представления групп как внутренних симметрий, так и группы Пуанкаре пространства Минковского.

• Группы симметрий и самодействие калибровочных бозонов

Простая картина слабых токов несколько усложнена Природой, так как кроме слабых имеют место и электромагнитные взаимодействия. В частности, правый электрон, например, не обладает слабым взаимодействием, но имеет электрический заряд. Наличие дополнительного вида взаимодействия с другими зарядами, т. е. наличие другого типа преобразований состояний означает, что необходимо ввести дополнительную группу, отвечающую таким преобразованиям состояний. При этом, поскольку электрический заряд не меняется при электромагнитных преобразованиях состояний, в дополнительной группе есть только нулевые корни: весовой вектор является одномерным, а его единственная координата — это собственное значение единственного генератора группы, который коммутирует сам с собой, т. е. это оператор подалгебры Картана, который называют гиперзарядом электрослабого взаимодействия. По сути это значит, что необходимо ввести группу U(1) с гиперзарядом Y. Гиперзаряд не обязан совпадать с электрическим зарядом. На самом деле мы уже знаем, что электрический заряд пропорционален гиперзаряду у частиц, которые не обладают слабым взаимодействием. Для частиц, которые наряду с электромагнитным взаимодействием обладают еще и взаимодействием со слабыми нейтральными токами, электрический заряд задается в виде линейной комбинации генераторов, которые не меняют ни состояния, ни их весовые векторы, т. е. оператор электрического заряда линейно связан с генераторами

подалгебр Картана групп слабого взаимодействия и группы гиперзаряда. В итоге структура электрослабой теории задается прямым произведением $\mathrm{U}_Y \times \mathrm{SU}_L(2)$, где имеется 2 типа нейтральных токов: слабый и электромагнитный.

Преобразования составных квантовых состояний, построенных как тензорные произведения фундаментальных представлений, выводятся из свойств фундаментальных представлений: собственные значения генераторов подалгебры Картана, т. е. соответствующие этим генераторам собственные значения, которые трактуются как квантовые числа составных состояний, являются суммой собственных значений (квантовых чисел) состояний образующих тензорное произведение.

Гипотеза калибровочных взаимодействий базируется на предположении о том, что мультиплету присоединенного представления алгебры Ли, т. е. токам, ставится в соответствие мультиплет новых бозонных состояний, а не мультиплет, составленный на тензорном произведении фундаментальных представлений. Эти состояния принято называть квантами калибровочного поля, которое по отношению к группе поворотов координат в пространстве-времени Минковского является векторным. Напомним, что в присоединенном представлении ненулевые веса состояний совпадают с корнями. Остальные базисные состояния имеют нулевые веса (см. раздел **2.4 Веса присоединенного представления**, **§ 2. Неприводимые представления** главы 3). Поэтому все квантовые числа базисных состояний присоединенного представления калибровочного поля совпадают с квантовыми числами токов в группе Ли: заряженных токов, соответствующих ненулевым корням, и нейтральных токов, соответствующих нулевым собственным значениям генераторов подалгебры Картана. Важно подчеркнуть, что присоединенное представление можно построить как неприводимое представление в тензорном произведении фундаментальных представлений группы, как это имеет место в составных моделях. Но в калибровочной гипотезе постулируют, что присоединенное представление рассматривается не как составное из фундаментальных, а как самостоятельное пространство состояний калибровочного поля. С точки зрения понятия тождественных частиц и связи статистики со спином можно сформулировать это так: бозоны калибровочного поля не построены из фермионов и не являются составными объектами. Из частиц со спином $1/2$ можно построить и частицы с нулевым спином, и с единичным, но это не значит, что все бозоны построены из фермионов и являются составными. Поэтому постулат о существовании калибровочных состояний не зависит от того, какими по спину состояниями укомплектованы фундаментальные представления алгебры Ли, фермионами или бозонами. Введенные так состояния калибровочного поля в присоединенном представлении несут квантовые числа токов алгебры Ли, и поэтому их называют переносчиками калибровочного взаимодействия или калибровочными бозонами. Они являются векторными и обладают целым спином, равным единице.

Из калибровочной гипотезы следует, что калибровочными бозонами электрослабой теории являются заряженные $W^{\pm}$-бозоны и пара нейтральных токов: Z-бозоны и A-бозоны (фотоны). Поэтому процессы на рис. 3.13 с заряженными токами отвечают распространению $W^{\pm}$, а нейтральный слабый ток — распространению Z-бозона.

Важно подчеркнуть, что поскольку калибровочные бозоны слабого взаимодействия сами обладают отличным от нуля слабым изоспином $T = 1$, то согласно общему рассмотрению состояния калибровочных бозонов также преобразуются заряженными и нейтральными токами. Напомним, что длина простого положительного корня группы SU(2) является единичной в масштабе, заданном групповым зарядом, в данном случае зарядом слабого взаимодействия, который может быть измерен экспериментально (см. раздел **1.2 Масштаб и конформный фактор** в **§ 1. Алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{su}(3)$** главы 3 и пункт • **Единичная длина корня и заряд в физике** на стр. 180). Это означает, что калибровочные бозоны также взаимодействуют друг с другом за счет слабого взаимодействия: корневые генераторы алгебры Ли преобразуют базисное состояние с одним весом в состояние с другим весом в том числе и в присоединенном представлении, а нейтральный ток генераторов подалгебры Картана переводит базисные состояния в себя. Это называют самодействием калибровочных частиц. Пространственно-временную структуру калибровочных взаимодействий рассматривают в рамках группы непрерывных изометрий пространства-времени Минковского.

Группа квантовой хромодинамики $\mathrm{SU}_c(3)$ описывает 8 калибровочных векторных частиц, которые называют глюонами. Глюоны также обладают самодействием, что обусловлено неабелевым характером группы калибровочной симметрии, в данном случае SU(3).

Согласно квантовой теории поля точечные частицы — это квантовые состояния локального поля. Свойства преобразования частиц и полей относительно действия группы симметрии идентичны друг другу: поля и их кванты принадлежат одному и тому же неприводимому представлению группы Ли. Кинематика и динамика полей в виде уравнений движения выводится из принципа экстремального действия, которое задается в механике. Действие является синглетом относительно преобразований группы симметрии: любые групповые преобразования оставляют действие неизменным. Согласно теореме Нётер инвариантность действия означает закон сохранения тока Нётер. Тогда этот сохраняющийся ток обеспечивает сохранение заряда группы симметрии, определяемого длиной корневого вектора.

7.2 Великое объединение SU(5), векторные лептокварки и распад протона

• Квинтет и калибровочные бозоны. Иерархия масштабов

Как мы видели при решении **задачи 43** на стр. 242, в квинтет определяющего фундаментального представления SU(5)

$$\mathbf{5} \;\cong\; v = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c_1} \\ \bar{d}_L^{c_2} \\ \bar{d}_L^{c_3} \end{pmatrix} \tag{III.6.44}$$

входят как левые лептоны, так и левые антикварки. Сформулируем выбор 4-х операторов подалгебры Картана группы SU(5) с точки зрения ее связи с понятиями физики элементарных частиц конца 20 века.

- электрический заряд, Q,
- слабый изоспин, T_3,
- 2 диагональных матрицы в группе цвета, λ_3, λ_8.

Ток как физическое понятие соответствует генератору алгебры Ли. Перечислим токи.

- Два заряженных слабых тока, которые соответствуют двум корневым генераторам подгруппы слабого взаимодействия SU(2), т. е. токи с изменением электрического заряда и проекции слабого изоспина. Два нейтральных тока, отвечающих генераторам электрического заряда Q и проекции слабого изоспина T_3 подалгебры Картана, так что вместе эти 4 тока отвечают калибровочным бозонам электрослабой теории, заряженным $W^{\pm}$- и нейтральным Z-бозону и фотону.
- 8 токов преобразования цвета, которые отвечают калибровочным бозонам квантовой хромодинамики — глюонам, включая два тока нейтральных матриц Гелл-Манна λ_3 и λ_8.
- Ток перехода в квинтете от состояния левого нейтрино к левому антикварку $\bar{d}$ с зарядом $\frac{1}{3}$ несет электрический заряд, равный изменению заряда между этими состояниями $Q = Q[\nu] - Q[\bar{d}] = -\frac{1}{3}$, а также цвет, так как у нейтрино нет цвета, а у антикварка цвет есть. Этот ток обозначается как $X_c^{-\frac{1}{3}}$, где индексы указывают на заряд и цвет, а преобразование состояний в обратном переходе соответствует току $X_c^{+\frac{1}{3}}$. Эти токи называются калибровочными лептокварками $X_c^{\pm\frac{1}{3}}$, при этом у левого нейтрино есть проекция слабого изоспина верхней компоненты изодублета, а у антикварка $\bar{d}_L$ изоспин равен нулю, так что лептокварки $X_c^{\mp\frac{1}{3}}$ несут изоспин, равный $T_3 = \pm\frac{1}{2}$. Токов таких калибровочных лептокварков шесть.
- По аналогии с предыдущим пунктом переходу от электрона к $\bar{d}$-антикварку соответствует ток $X_c^{-\frac{4}{3}}$, а переходу в обратном порядке — ток $X_c^{+\frac{4}{3}}$, это токи других калибровочных лептокварков $X_c^{\mp\frac{4}{3}}$ с $T_3 = \mp\frac{1}{2}$. Токов таких калибровочных лептокварков шесть.

В сумме получается 24 тока, как это и должно быть, так как размерность координат группы SU(N) равна $N_G = \mathrm{N}^2 - 1$, и для SU(5) размерность группового многообразия $N_G = \dim \mathfrak{G} = 24$. Считается, что известные нам эмпирически 12 токов электрослабой теории и квантовой хромодинамики наблюдаются либо как реальные состояния, которые рождаются в процессах рассеяния при доступных на данный момент энергиях экспериментов, либо в распадах за счет слабого и сильного взаимодействия. При этом все состояния калибровочных мультиплетов электрослабой теории рождаются при энергиях рассеяния в системе центра масс, превышающих порог в 100 ГэВ, который называют масштабом энергий электрослабой теории. Калибровочные бозоны сильного взаимодействия, глюоны отчетливо идентифицируются при энергиях рассеяния, существенно превышающих порог в 1 ГэВ, который считают энергетическим масштабом, связанным с сильным взаимодействием. Предсказываемые теорией калибровочные токи группы SU(5), не входящие в состав токов электрослабых и сильных взаимодействий, называют экзотическими, а их эмпирическое проявление считают подавленым из-за того, что симметрия SU(5) имеет масштаб энергии порядка 10^{16} ГэВ: все состояния мультиплета калибровочных токов SU(5) могут образоваться как реальные частицы в реакциях рассеяния только при энергиях, превышающих порог их рождения порядка 10^{16} ГэВ. Это значит также, что вероятности обнаружить проявления SU(5) в распадах при низких энергиях сильно подавлены, так как при низких энергиях квантовые эффекты

флуктуации части энергии, которая может идти на образования тяжелых экзотических калибровочных бозонов на малые промежутки времен согласно соотношению неопределенностей энергия–время, крайне маловероятны. Подобное ранжирование проявления таких состояний присоединенного представления группы как калибровочные бозоны в зависимости от энергетических порогов — это так называемый эффект иерархии энергетических масштабов симметрии.

Электромагнитные взаимодействия осуществляются за счет тока фотонов, которые являются безмассовыми, так что силы являются дальнодействующими и регистрируются на любых расстояниях (нет порога включения эффектов взаимодействия).

Сильные взаимодействия за счет тока глюонов связывают кварки в адронах, а масштаб энергии связи порядка 300 МэВ согласно теореме вириала определяет и масштабы кинетической и потенциальной энергии, которые имеют один порядок величины. Размер адронов можно оценить в экспериментах по рассеянию одного адрона на другом, когда сечение рассеяния определяется квадратом конечного радиуса действия ядерных сил, так что этот размер по порядку величины равен $r_{\text{QCD}} \sim 1$ ферми или 10^{-13} см. С другой стороны, если полагать, что энергия притяжения кварков в адроне имеет вид типа кулоновского потенциала с зарядом g_s и $E \sim g_s^2/r_{\text{QCD}}$, то при безразмерной константе сильного взаимодействия $g_s^2/(\hbar c) \sim 1$ размер адрона $r_{\text{QCD}} \sim \hbar c/E$ числено также имеет величину порядка 1 ферми. Эмпирически имеет место эффект конфайнмента (confinement или заключение в ограниченной области) цветных объектов: в свободном состоянии наблюдаются только синглетные состояния по калибровочной группе $\text{SU}_c(3)$, которой в квантовой теории поля описывается сильное взаимодействие. В таком подходе теория называется квантовой хромодинамикой (Quantum ChromoDynamics = QCD).

Слабые взаимодействия переносятся W- и Z-бозонами с массами около $Mc^2 \sim 80$ и 92 ГэВ, соответственно, так что радиус слабого взаимодействия составляет порядка 10^{-4} Ферми ($\sim 10^{-17}$ см): измеренный заряд слабого взаимодействия g_W имеет величину, которая дает безразмерную константу слабого взаимодействия $g_W^2/(\hbar c) \sim 1/30$, откуда оценка потенциальной энергии кулоновского типа $E \sim mc^2 \sim g_W^2/r_W$ при численном значении

$$\hbar \cdot c \approx 200\,\text{МэВ} \cdot \text{ферми}$$

приводит к радиусу действия слабого взаимодействия

$$r_W \sim \frac{g_W^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar c}{mc^2} \sim 3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^2\,\text{МэВ} \cdot \text{ферми}}{10^2\,\text{ГэВ}} \sim 10^{-4}\ \text{ферми}.$$

Переносчики-лептокварки имеют масштаб масс порядка $M_{\text{GUT}}c^2 \sim 10^{16}$ ГэВ, и вероятности наблюдать связанные с лептокварками эффекты за счет SU(5) при энергиях $E \sim 1 - 100$ ГэВ подавлены в степенях малого параметра $E/(M_{\text{GUT}}c^2) < 10^{-14}$.

Первый вопрос: почему возникает иерархия масштабов? Считается, что это обусловлено вакуумом теории — состоянием с минимальной энергией или плотностью энергии, которое является релятивистски инвариантным решением уравнений движения. Сами уравнения движения являются симметричными относительно группы преобразований состояний SU(5) вследствие того, что и действие тоже является инвариантным относительно группы симметрии. Но вакуумное решение может быть и не инвариантным относительно группы симметрии действия, если возникают нетривиальные вакуумные поля. В этом случае говорят о спонтанном нарушении симметрии и о том, что возникает иерархия масштабов энергии в вакуумных решениях: компонента вакуумного поля с масштабом энергии 10^{16} ГэВ нарушает SU(5), но это нарушение может оставлять остаточную симметрию, например, электрослабую, которая нарушается другой компонентой вакуумного поля с масштабом энергии 10^2 ГэВ, так что остается точной только электромагнитная и хромодинамическая симметрия. В итоге, механизм возникновения иерархии масштабов целиком относят к структуре вакуума: именно его свойства и образуют иерархию разных значений пороговых энергий.

Иерархия масштабов сказывается и на зарядах разных взаимодействий: дело в том, что наблюдаемые заряды зависят от того, на каком масштабе мы их измеряем, так как инструментом измерения служит воздействие на систему в процессах с разной длиной волны, а значит, с разной разрешающей способностью датчика внешнего влияния на систему. В квантовой теории поля такая зависимость описывается в рамках уравнений так называемой ренормгруппы. Важно отметить, что на масштабах энергий, превышающих шкалу нарушения симметрии, процессы рассеяния или распада описываются единым для всех состояний значением заряда в группе с учетом пропорций, которые для разных состояний устанавливает исходная симметрия действия согласно дискретным значениям собственных значений генераторов

подалгебры Картана у этих состояний. При энергиях, меньших чем масштаб пороговой энергии симметрии SU(5), заряды в сильных, электромагнитных и слабых взаимодействиях станут зависеть от того, на сколько порядков энергия измерений меньше масштаба энергии нарушения симметрий SU(5). Дело в том, что при энергиях ниже масштаба энергии нарушения симметрии квантовые флуктуации за счет тяжелых состояний типа калибровочных бозонов подавлены, так что эффективный заряд, который наблюдается при таких энергиях зависит уже от того, какая из подгрупп исходной группы SU(5) исследуется в процессе. Ниже порога энергий для калибровочных бозонов группы SU(5) экзотические лептокварки не вносят вклада в определение заряда: их взаимодействие подавлено, так что электрослабый заряд и заряд квантовой хромодинамики становятся разными. Более того, из-за существенной разности в массах фотона (масса равна нулю) и массах W- и Z-озонов (масштаб энергий порядка 10 ГэВ) значения электрического заряда и слабого тоже отличаются. Таким образом влияние разных компонент вакуумных полей на характеристики системы имеет ступенчатый характер: при увеличении энергии каждый раз, когда энергия превышает порог, связанный с масштабом симметрии подгруппы, изменяются вклады от калибровочных бозонов подгруппы.

Второй вопрос: как токи симметрии SU(5) скажутся на свойствах физических систем на масштабах энергий, где лептокварковые калибровочные бозоны выглядят как невероятно тяжелые? Не означает ли это, что прямое наблюдение этих токов становится исчезающе маловероятным в процессах рассеяния? При поиске ответа на этот вопрос можно так же, как и в случае слабого взаимодействия, исследовать опцию с распадами: распад нейтрона вполне себе происходит, хотя размер массы нейтрона порядка 1 ГэВ явно много меньше масштаба масс, которым характеризуется слабое взаимодействие, 10^2 ГэВ. На масштабе 100 ГэВ рассеяние за счет процессов слабого взаимодействия становится детектируемым, а регистрация калибровочных бозонов может быть осуществлена в явном виде, как частиц, которые возникают и распадаются в процессах рассеяния.

• Декуплет и изменение барионного числа

Обратим внимание на декуплет состояний фундаментального представления $\mathtt{T}^{(0,0,1,0)}$ группы SU(5)

$$\overline{\mathbf{10}} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c_1} & d_L^{c_2} & -d_L^{c_3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c_1} & -u_L^{c_2} & u_L^{c_3} \\ d_L^{c_1} & -u_L^{c_1} & 0 & \bar{u}_L^{c_3} & -\bar{u}_L^{c_2} \\ -d_L^{c_2} & u_L^{c_2} & \bar{u}_L^{c_3} & 0 & \bar{u}_L^{c_1} \\ d_L^{c_3} & -u_L^{c_3} & \bar{u}_L^{c_2} & -\bar{u}_L^{c_1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.6.46}$$

Переходы между состояниями этого декуплета происходят под действием все тех же генераторов алгебры Ли $\mathfrak{su}(5)$, т. е. за счет тех же токов, что и переходы в квинтете. Стало быть, мы знаем все варианты квантовых переходов.

Сфокусируем свое внимание на том, что в декуплет (III.6.46) входят как кварки, так и антикварки, а значит, может происходить переход кварков в антикварки за счет лептокварковых калибровочных бозонов, чего не могло быть в рамках Стандартной модели взаимодействий, которая включает в себя группу электрослабой симметрии $\mathrm{U}_Y(1)\times\mathrm{SU}_L(2)$ и цветовую группу $\mathrm{SU}_c(3)$. Значит, лептокварки могут инициировать процессы распадов, в которых исчезает адронная материя. Эти редкие процессы исчезновения адронной материи станут заметны, если происходит распад состояния, которое стабильно в рамках Стандартной модели. Обратимся к такому примеру — к протону $p = (uud)$.

Рассмотрим двукратное воздействие лептокварковых токов на исходное состояние с барионным числом $B = 1$ так, чтобы в конечном состоянии $B = 0$. Первый вариант включает ток $u \to \bar{u}$, так что имеет место пара преобразований

$$u \to \bar{u} + X_c^{+\frac{4}{3}}, \qquad X_c^{+\frac{4}{3}} + d \to e^+, \tag{III.7.1}$$

где второй u-кварк в протоне не участвует непосредственно в токах, так что его называют спектатором, а в итоге имеет место процесс $p(uud) \to e^+ + (u\bar{u})$. Нейтральное состояние кварк-антикварковой пары $(u\bar{u})$ может аннигилировать в фотоны и лептоны. Таким образом *протон имеет канал распада на позитрон и легкую нейтральную систему с нулевым барионным числом.*

Второй вариант с изменением барионного числа — ток $d \to \bar{u}$, так что имеет место пара преобразований

$$d \to \bar{u} + X_c^{+\frac{1}{3}}, \qquad X_c^{+\frac{1}{3}} + u \to e^+, \tag{III.7.2}$$

и происходит процесс $p(uud) \to e^+ + (u\bar{u})$.

Третий независимый вариант — ток $u \to e^+$, так что имеет место пара преобразований

$$u \to e^+ + X_c^{-\frac{1}{3}}, \qquad X_c^{-\frac{1}{3}} + u \to \bar{d}, \tag{III.7.3}$$

и наблюдается переход $p(uud) \to e^+ + (d\bar{d})$.

Четвертая опция — ток $d \to e^+$, так что происходит каскадный процесс

$$d \to e^+ + X_c^{-\frac{4}{3}}, \qquad X_c^{-\frac{4}{3}} + u \to \bar{u}, \tag{III.7.4}$$

и $p(uud) \to e^+ + (u\bar{u})$.

Для того, чтобы в процессе выполнялся закон сохранения энергии, необходимо наложить условие на массы продуктов распада: если сумма масс состояний после распада меньше массы исходной частицы, то частицы в конечном состоянии могут иметь кинетическую энергия движения. Это значит, что масса кварк-антикварковой пары с нулевым зарядом не должна превышать величину $m_p - m_e$, т. е. разность масс протона и позитрона. В природе это может быть в случае π^0-мезона или пары–тройки пионов, а также ρ^0-мезона. Кроме того, возможно излучение и безмассовых фотонов. В квантовой теории поля можно оценить сумму амплитуд вероятности возможных процессов с заданным конечным состоянием. Отметим, что кроме калибровочных лептокварков в моделях рассматривают и другие частицы, например, скалярные, по своей роли аналогичные бозону Хиггса Стандартной модели и необходимые для введения масс калибровочных бозонов.

Итак, следует ожидать, что в случае SU(5) симметрии протон нестабилен. И этот вариант необходимо изучить экспериментально: в случае удачи установить время жизни протона путем наблюдения его редкого распада в большом объеме детектора, или указать нижний предел на время жизни в целом или на относительную вероятность одного из каналов распада. В настоящее время этот предел [12]

$$\tau_p > 3.6 \cdot 10^{29} \text{ лет.} \tag{III.7.5}$$

Некоторые оценки, зависящие от моделей, в которых вариант моды распада может быть описан теоретически, доводят предел до 10^{32-34} лет.

Глава 4

Магнитные моменты барионов в составной кварковой модели

§1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов

Задача сложения моментов вращения двух подсистем как разложение тензорного произведения в сумму по неприводимым представлениям группы SU(2), схемы Юнга и базис представлений суммарного момента вращения, сложение двух спинов $1/2$, коэффициенты Клебша–Гордана и условия отбора по проекции и суммарному моменту вращения, пример сложения моментов вращения триплета и дублета, общая схема построения базиса состояний неприводимого представления суммы двух моментов вращения. Отличие неприводимого тензорного оператора от мультиплета неприводимого представления, матричный элемент неприводимого тензорного оператора и приведенный матричный элемент, теорема Вигнера–Эккарта, правила отбора матричных элементов и правило запрета.

1.1 Сложение моментов вращения

Пусть физическая система составлена из подсистем A и B, так что квантовые состояния системы — это произведения квантовых состояний этих подсистем, свойства которых по отношению к преобразованиям группы поворотов заданы так, что пространства квантовых состояний подсистем — это неприводимые представления, которые допускают как целые, так и полуцелые значения момента количества движения. Это значит, что мы имеем дело с неприводимыми представлениями группы SU(2) (см. главу 3, **§3. Представления** $\mathfrak{su}(2)$), а пространство квантовых состояний системы — это пространство представления тензорного произведения состояний двух подсистем. Тензорное произведение может быть разложено в прямую сумму пространств неприводимых представлений группы SU(2). Для записи этих неприводимых представлений и их тензорных произведений мы можем использовать схемы Юнга для группы SU(2). Такая схема Юнга в случае неприводимого представления с моментом вращения, равным j, представляет собой строку из клеток длиной $2j$, т. е. клетки расположены в линию по горизонтали

$$\underbrace{\square\square\cdots\square}_{2j},$$

а синглет — это столбец из двух клеток

$$\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}\,.$$

Каждую клетку схемы Юнга можно считать соответствующей вектору пространства состояний фундаментального представления группы SU(2), т. е. спинору с $j=\frac{1}{2}$. И если мы строим базис неприводимого представления пространства, соответствующего рассматриваемой схеме Юнга, то в дираковских обозначениях каждой клетке соответствует одно из двух базисных состояний фундаментального представления: $|+\rangle$ и $|-\rangle$. Клетки схемы Юнга, т. е. элементы базиса фундаментального представления, в строке симметризованы по номеру фундаментального представления, а клетки в столбце в случае синглета — антисимметризованы. Для синглета это значит, что ортонормированные базисные состояния фундаментального представления $|+\rangle$ и $|-\rangle$ с проекциями момента вращения на ось z, равными соответственно $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, при антисимметризации по номерам фундаментальных представлений в тензорном произведении

$$\begin{array}{|c|}\hline[1]\\\hline[2]\\\hline\end{array}$$

дают следующие варианты[1]

$$\begin{aligned}
&|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} \;-\; |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} = 0,\\
&|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} \;-\; |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]},\\
&|-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} \;-\; |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} = 0.
\end{aligned}$$

[1] В традициях квантовомеханических обозначений тензорное произведение квантовых состояний обычно пишут без знака тензорного произведения: $|A\rangle|B\rangle \equiv |A\rangle \otimes |B\rangle$.

В итоге единственная отличная от нулевого вектора пространства состояний комбинация — это состояние с суммарным моментом вращения $j = 0$ и проекцией на ось z, равной[2] $m = 0$,

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} = |0,0\rangle \equiv \big(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\big)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tag{IV.1.1}$$

где нормировочный множитель $1/\sqrt{2}$ мы подобрали так, чтобы состояние было нормировано на единицу. Собственное значение оператора из подалгебры Картана, в данном случае это оператор проекции момента вращения $j_z^{\otimes}$, который действует на тензорном произведении, задается как сумма собственных значений того же оператора подалгебры Картана на собственных состояниях фундаментальных сомножителей в тензорном произведении. Поэтому у синглета проекция момента вращения равна нулю, как это и должно быть у состояния с $j = 0$.

• Суммарный момент вращения двух дублетов

В качестве примера и для понимания общей схемы решения задачи о сложении моментов вращения рассмотрим две подсистемы с моментом вращения $j^A = j^B = \frac{1}{2}$ и разложим на неприводимые представления тензорное произведение двух этих дублетов по группе SU(2):

$$\mathbf{2}\otimes\mathbf{2} = \square\otimes\square = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}\oplus\square\!\square = \mathbf{1}\oplus\mathbf{3}.$$

Зацепленное состояние синглета, построенное из базисных состояний дублетов, мы только что детально рассмотрели и установили, что синглет построен как антисимметризованная суперпозиция двух тензорных произведений состояний дублета с противоположными проекциями момента вращения на выделенную ось z. При этом направление выбранной оси может быть задано произвольно, так как интегральное состояние синглета является инвариантным относительно действия группы поворотов, а зацепленное выражение записывается инвариантно через состояния дублетов с противоположными значениями проекции момента вращения на произвольно выбранную ось. Ситуацию с записью состояний триплета необхождимо рассматреть более внимательно, поскольку у триплета есть три различных интегральных состояния с разными значениями проекции момента вращения на выделенную ось, а именно, проекции, равные $+1$, 0 и -1.

Три ортонормированных базисных состояния триплета, построенного из состояний фундаментальных представлений, согласно схеме Юнга (две клетки в одну линию по горизонтали) получаются симметризацией всех возможных произведений базисных состояний фундаментального представления:

$$|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} = |1,+1\rangle, \tag{IV.1.2}$$

$$\big(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\big)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = |1,0\rangle, \tag{IV.1.3}$$

$$|-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} = |1,-1\rangle. \tag{IV.1.4}$$

Подчеркнем, что одной и той же схеме Юнга, в данном случая схеме триплета из двух клеток в одну горизонталь, отвечают несколько состояний базиса с разными значениями проекции момента вращения на выбранную ось, т. е. сама по себе схема Юнга неоднозначно задает характеристики базиса неприводимого представления, так как, вообще говоря, по одной схеме Юнга можно постить различные суперпозиции тензорных произведений базисных состояний.

Заметим, что кет-векторы правой стороны равенств (IV.1.2)–(IV.1.4) промаркированы квантовыми числами оператора Казимира и единственного оператора подалгебры Картана, которые действуют уже на тензорном произведении пространств двух исходных фундаментальных представлений. В записи (IV.1.1)—(IV.1.4) мы установили соответствие базисных состояний неприводимых представлений, составляющих прямую сумму, с суперпозициями произведений базисных состояний компонент тензорного произведения. Согласно введенной терминологии из четырех состояний два, (IV.1.2) и (IV.1.4) — факторизованные, а два, (IV.1.1) и (IV.1.3) — зацепленные. Такой переход от исходного базиса тензорного произведения в форме мономов к базису состояний в прямой сумме называют разложением по Клебшу–Гордану, а сами коэффициенты разложения называются коэффициентами Клебша–Гордана. В общем

[2] Читатель самостоятельно может убедиться, что действие повышающего и понижающего операторов, заданных на тензорном произведении, на состояние (IV.1.1) приводит к нулю: $\hat{j}_{\pm}^{\otimes}|0,0\rangle = 0$, а это значит, что проекция момента вращения равна как своему максимальному, так и минимальному значениям, равным нулю, т. е. и собственное значение квадрата момента вращения равно нулю. $s = 0 \Leftrightarrow s(s+1) = 0$, и моментом вращения в квантовомеханической терминологии обычно называют не собственное значение квадрата момента вращения $s(s+1)$, а индекс s этого собственного значения, т. е. указатель на собственное значение, называемый квантовым числом.

случае эта запись имеет вид

$$|J,M\rangle = \sum_{m^A,m^B} C^{JM}_{j^A m^A, j^B m^B} |j^A, m^A\rangle \otimes |j^B, m^B\rangle. \tag{IV.1.5}$$

Заметим здесь, что сумма состоит из факторизованных элементов, и если в сумме более одного элемента, то мы получаем зацепленное состояние как элемент нового базиса тензорного произведения. Коэффициенты Клебша–Гордана

$$C^{JM}_{j^A m^A, j^B m^B} = \big(\langle j^A, m^A| \otimes \langle j^B, m^B|\big)|J,M\rangle \equiv \langle j^A, m^A; j^B, m^B|J,M\rangle$$

отличны от нуля только при

$$M = m^A + m^B \tag{IV.1.6}$$

и еще при одном условии на значения j, которое мы установим позже. Ясно также, что число базисных состояний в прямой сумме пространств представлений системы не может измениться и оно равно $(2j^A + 1)(2j^B + 1)$.

Генератор групповых преобразований, который действует на тензорном произведении неприводимых представлений, в математическом определении является суммой тензорных произведений единичного оператора в пространстве одного из сомножителей с генератором, который действует на пространстве другого сомножителя тензорного произведения. В физическом понимании разложение тензорного произведения на сумму неприводимых представлений является задачей сложения «квантов моментов количества движения подсистем». В результате находится суммарный момент вращения как индекс собственного значения квадрата суммарного момента вращения для каждого члена в прямой сумме неприводимых представлений. Решение этой задачи позволяет установить свойства базиса составной системы по отношению к действию группы SU(2): мы выделяем классы базисных состояний, и каждый класс является пространством неприводимого представления, характеризующегося собственным значением квадратичного оператора Казимира, для которого всё пространство неприводимого представления является собственным, и этот оператор Казимира в физической терминологии называется суммарным моментом количества движения.

В рассмотренном примере сложения двух спинов, равных $\frac{1}{2}$, суммарный момент вращения триплета равен единице, а синглета — нулю. Повторим, что суммарный момент вращения, который обозначается как j, является индексом собственного значения квадратичного оператора Казимира, который на любом неприводимом представлении пропорционален единичному оператору. Поэтому разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму естественно и неизбежно, если мы говорим о сумме неприводимых составляющих этого тензорного произведения.

• Суммарный момент вращения трех дублетов

Чуть позже нам предстоит вычисление магнитного момента барионов — системы из трех кварков. Самые распространенные во вселенной барионы: протон и нейтрон, — состоят из кварков двух типов, поэтому нам предстоит при конструировании интегрального состояния барионов учитывать статистику Ферми–Дирака. Симметрия спинового состояния, как мы видели, определяет суммарный момент вращения двух тождественных частиц. В связи с этим нам предстоит не просто сложить три спина и построить соответствующие спиновые состояния, а выделить такие суперпозиции тензорных произведений спиновых состояний кварков, в которых у двух частиц из трех в общей волновой функции будут заданы мультиплеты с определенным значением спина и симметрией.

Как мы установили, при сложении двух дублетов со спином $1/2$ и $1/2$ их интегральное состояние принадлежит либо векторному, симметричному по перестановке состояний дублетов пространству со спином $j^A = 1$, либо сиглетному, антисимметричному по перестановке состояний дублетов пространству со спином $j^A = 0$:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \square \otimes \square = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \oplus \square\square = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}.$$

При сложении моментов вращения синглета с $j^A = 0$ для двух дублетов и третьего дублета с $j^B = \frac{1}{2}$ возникает тензорное произведение

$$\begin{array}{|c|}\hline [1] \\ \hline [2] \\ \hline \end{array} \otimes \boxed{[3]},$$

которое обладает антисимметрией в первой схеме Юнга по перестановкам $[1] \leftrightarrow [2]$. При выборе положительного значения проекции момента вращения у спинора [3] получается интегральное состояние трех дублетов

$$\Big(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\Big)|+\rangle_{[3]}.$$

Найдем состояния системы, образованной из триплета с $j^A = 1$, который получается при суммировании моментов вращения двух дублетов, и третьего дублета с $j^B = \frac{1}{2}$. В методе схем Юнга получим следующее разложение на неприводимые представления (физически: на мультиплеты состояний, собственных для оператора квадрата суммарного момента вращения) тензорного произведения триплета и дублета:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \square\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{1}{|c}{} \\ \hline \end{array} \oplus \square\square\square = \square \oplus \square\square\square = \mathbf{2} \oplus \mathbf{4}.$$

Это значит, что значения суммарного момента вращения равны $j = \frac{1}{2}$ и $j = \frac{3}{2}$. Остается вопрос о вычислении аналогов коэффициентов Клебша–Гордана для трех моментов вращения. При $j = \frac{3}{2}$ решение находится просто, так как схема Юнга указывает на симметричность по перестановкам номеров фундаментальных представлений, а состояние старшего веса записывается как

$$|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{3}{2}\rangle = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} = |1, +1\rangle|+\rangle_{[3]}, \tag{IV.1.7}$$

где мы учли полученные ранее формулы для состояний $|1, m\rangle$ в виде результата тензорного произведения двух фундаментальных представлений под номерами [1] и [2]. В формуле (IV.1.7) мы выделили подсистему $[1 + 2]$ в состоянии с моментом вращения, равным 1.

Базисное состояние $|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\rangle$ можно получить, действуя понижающим оператором

$$j_-^{\otimes} = j_- \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes j_- \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes j_-$$

на факторизованное состояние старшего веса в виде (IV.1.7)

$$|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{3}{2}\rangle = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]},$$

так как действие понижающего оператора $j_-^{\otimes}$ уменьшает значение проекции момента вращения на выделенную ось z, но не изменяет квадрат момента вращения. В самом деле, согласно стандартному соотношению

$$j_-^{\otimes}|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle \quad \Rightarrow \quad j_-^{\otimes}|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}\,|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle, \tag{IV.1.8}$$

а с учетом того, что $j_-|+\rangle = |-\rangle$, находим[3]

$$|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \big(|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}\big) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} =$$
$$= |1, 0\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} + |1, +1\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}. \tag{IV.1.9}$$

Последнее равенство записано с учетом явных выражений для состояний с суммарным моментом вращения $j^A = 1$ подсистемы $[1 + 2]$ в форме суммы факторизованных тензорных произведений базисных состояний для двух моментов вращения с полуцелым спином в (IV.1.2)—(IV.1.4).

Два оставшихся состояния квартета неприводимого представления с моментом вращения $j = \frac{3}{2}$, а именно, состояния $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ и $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ также можно получить последовательным действием тензорного понижающего оператора. Например, в полной аналогии с (IV.1.8) найдем

$$j_-^{\otimes}|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle \quad \Rightarrow \quad j_-^{\otimes}|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{4}\,|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle,$$

а затем

$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{2} \cdot j_-^{\otimes}\big(|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}\big) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} =$$
$$= \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\big(2|-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + 2|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]} + 2|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}\big) =$$
$$= |1, -1\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + |1, 0\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}}. \tag{IV.1.10}$$

[3] В силу того, что исходное состояние старшего веса является симметричным по перестановкам множителей в тензорном произведении, и тензорный оператор понижения проекции спина тоже симметричен, все базисные состояния неприводимого представления этого состояния старшего веса также будут симметричными по перестановкам сомножителей в тензорном произведении состояний фундаментального представления. Поэтому другой способ получения связи (IV.1.9) заключается в том, чтобы просуммировать по перестановкам номеров фундаментальных представлений выражение

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}$$

с учетом нормировки получающейся суперпозиции ортонормированных состояний на единицу.

Состояние с младшим весом можно записать так же, как и в случае состояния старшего веса, исходя из условия, что младший вес может быть получен только как сумма младших весов состояний в тензорном произведении, так что

$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle = |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]} = |1,-1\rangle|-\rangle_{[3]}.$$

В этой формуле мы выделили подсистему $[1+2]$ в состоянии с моментом вращения, равным 1.

Как видим, выражения для базисных состояний с отрицательными значениями проекции суммарного момента вращения можно получить в данном случае также сменой знака всех проекций у уже полученных состояний базиса с положительной проекцией суммарного момента вращения (IV.1.7) и (IV.1.9), однако так бывает не всегда[4]. В этом смысле действие понижающего оператора предпочтительно при вычислениях для физических приложений, так как это согласует фазы состояний в мультиплете.

В тензорном произведении триплета и дублета наряду с описанными состояниями квартета выделяют и неприводимое представление дублета с суммарным моментом вращения $1/2$. Состояние этого дублета $|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle$ ортогонально состоянию квартета $|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\rangle$, поскольку у них разные собственные значения квадратичного оператора Казимира несмотря на то, что значения проекций момента вращения совпадают. Это условие ортогональности позволяет построить $|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle$ в явном виде, так как согласно (IV.1.9)

$$|\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = |1,0\rangle|+\rangle_{[3]}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}} + |1,+1\rangle|-\rangle_{[3]}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда следует, что в ортогональном состоянии нужно поменять местами коэффициенты перед состояниями в суперпозиции двух слагаемых с взаимно ортогональными компонентами тензорного произведения и сменить знак у одного из двух множителей так, что

$$\begin{aligned}|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = |1,0\rangle|+\rangle_{[3]}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} \;-\; |1,+1\rangle|-\rangle_{[3]}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \\ = \big(|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - 2|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}\big)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{6}}.\end{aligned} \qquad \text{(IV.1.11)}$$

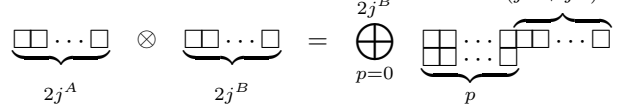
Читатель может самостоятельно убедиться, что действие тензорным повышающим оператором $j_+^{\otimes}$ на состояние, записанное во второй строке (IV.1.11) в терминах дублетов, дает нуль, а это значит, что полный момент вращения равен проекции в состоянии (IV.1.11).

Таким образом мы построили интегральный дублет из состояний с $j^A = 1$ подсистемы $[1+2]$ и дублета [3]. Именно такие квантовые числа представляют для нас интерес в задаче по вычислению магнитного момента протона и нейтрона в дальнейшем изложении. Состояние $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ мы предлагаем читателю построить самостоятельно, используя понижающий тензорный оператор $j_-^{\otimes}$ или пользуясь замечанием о смене знака проекций момента вращения у подсистем триплета с $j^A = 1$ и дублета с $j^B = 1/2$.

• Правила сложения моментов вращения двух подсистем

Сформулируем общие положения для вычисления суммарного момента количества движения составной системы для случая двух подсистем.

С помощью схем Юнга тензорное произведение двух неприводимых представлений с моментами вращения j^A и $j^B \leqslant j^A$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений,



(IV.1.12)

В этой прямой сумме (IV.1.12) суммарный момент вращения в неприводимом представлении группы SU(2) — это число одинарных клеток, умноженных на $1/2$,

$$2J = 2(j^A + j^B) - 2p.$$

[4]Имеется в виду то, что фазы базисных состояний неприводимого представления согласованы с фазами, которые возникают при переходе от состояния старшего веса к другим состояниям неприводимого представления при действии понижающим оператором, а простая смена проекций момента вращения в исходных состояниях сомножителей в тензорном произведении может привести к состояниям суммарного момента с другими фазами, например, в виде общего множителя, равного -1.

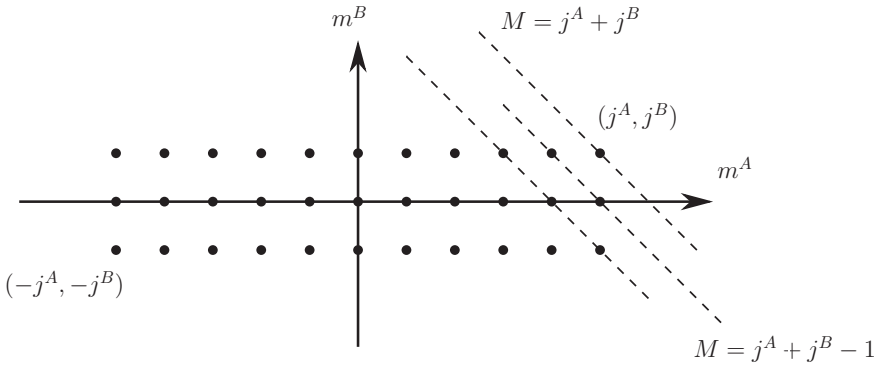


Рис. 4.1: Весовая диаграмма значений на плоскости (m^A, m^B) с характерными линиями постоянной суммы проекций момента вращения $M = m^A + m^B$

При этом $2p$ клеток, образующих p столбцов, которые описывают синглеты, т. е. множители, инвариантные относительно группы SU(2), можно просто вычеркнуть при таком подсчете. Это значит, что суммарный момент вращения j принимает значения

$$0 \leqslant j^A - j^B \leqslant J \leqslant j^A + j^B, \qquad \text{с шагом } \Delta j = 1. \tag{IV.1.13}$$

Шаг между суммарными значениями момента вращения равен единице, так как синглет образован на схеме Юнга двумя клетками в столбце, так что длина строки может уменьшатся и увеличиваться только по две клетки за один шаг в прямой сумме (IV.1.12).

Условия (IV.1.6) и (IV.1.13) называются правилами отбора: они определяют допустимую область квантовых чисел m и j, в которой коэффициенты Клебша–Гордана могут быть отличны от нуля. В противном случае эти коэффициенты заведомо обращаются в нуль.

Построение базиса квантовых состояний с заданным суммарным значением момента вращения системы в общем случае проводится по следующей схеме:

- сначала строится состояние старшего веса для максимального суммарного момента вращения

  $$J = j_{\max} = j^A + j^B,$$

  т. е. $|j_{\max}, j_{\max}\rangle = |j^A, j^A\rangle|j^B, j^B\rangle \equiv |j^A, j^A; j^B, j^B\rangle$, которое имеет максимально допустимые значения проекций моментов подсистем $m^A = j^A$ и $m^B = j^B$, а затем действием тензорного понижающего оператора $j_-^{\otimes}$ вычисляются все базисные состояния с этим значением суммарного J;

- состояние $|j_{\max}, j_{\max} - 1\rangle$ с проекцией суммарного момента вращения, равной $M = j^A + j^B - 1$ является суперпозицией двух состояний исходного базиса $|j^A, j^A - 1; j^B, j^B\rangle$ и $|j^A, j^A; j^B, j^B - 1\rangle$, а это значит, что из этих же исходных базисных состояний необходимо построить ортогональную этому состоянию суперпозицию, которая отвечает базисному состоянию с суммарным моментом вращения $j_{\max} - 1 = j^A + j^B - 1$ и тем же значением проекции, т. е. состояние старшего веса $|j_{\max} - 1, j_{\max} - 1\rangle$ мультиплета с $J = j_{\max} - 1$, и затем с помощью понижающего оператора $j_-^{\otimes}$ построить все базисные состояния этого представления;

- алгоритм предыдущего пункта необходимо повторять при уменьшении значения проекции суммарного момента вращения на единицу с той лишь разницей, что с каждым шагом по уменьшению значения проекции момента вращения количество базисных состояний и, следовательно, размерность подпространства с заданной проекцией суммарного момента вращения возрастают на единицу, так что построенные на предыдущем шаге состояния суммарного момента вращения с рассматриваемой на этом шаге проекцией необходимо дополнять состоянием старшего веса с суммарным моментом, который равен рассматриваемой проекции момента вращения, пока эта проекция не дойдет до значения $|j^A - j^B| - 1$ (см. рис. 4.1);

- каждый получаемый набор состояний с определенным значением момента вращения и есть базис составляющего прямую сумму неприводимого представления, так как значение момента вращения является численным идентификатором собственного значения квадратичного оператора Казимира, характеризующего неприводимое представление.

Все шаги этой схемы мы описали выше на конкретных простых примерах сложения двух моментов вращения. Ясно также, что схема является алгоритмической, так что ее можно оформить в виде компьютерной программы для вычисления коэффициентов Клебша–Гордана. Поэтому в справочной литературе можно найти таблицы значений коэффициентов Клебша–Гордана для случаев, когда исходные моменты вращения подсистем j^A и j^B принимают небольшие значения.

1.2 Неприводимые тензорные операторы и теорема Вигнера–Эккарта

Рассмотрим оператор, который переводит состояние одного неприводимого представления в состояние другого неприводимого представления на простейшем примере, когда синглет по группе поворотов $|0,0\rangle$ переходит под действием оператора T^j_m в состояние с моментом вращения j так, что[5]

$$|0,0\rangle \xrightarrow{T^{(j)}_m} |j,m\rangle\cdot\tilde{T},$$

где $\tilde{T}$ — это инвариант группы поворотов. Например, в самом простом случае число, которое не зависит от значения проекции m. В общем случае в записи состояния необходимо указывать еще символ ψ, обозначающий состояние инвариантных по группе наблюдаемых[6], и тогда

$$|0,0,\psi_0\rangle \xrightarrow{T^{(j)}_m} |j,m,\psi\rangle\cdot\tilde{T},\ \text{где}\ \tilde{T}=\langle j,m,\psi|\Big(\hat{T}^{(j)}_m|0,0,\psi_0\rangle\Big)\text{— групповой инвариант (нет суммирования по } m).$$

Для упрощения записи мы опустим указатели на инвариантные по группе поворотов переменные в рассматриваемых состояниях.

Описанный тензорный оператор можно записать в терминах кет- и бра-векторов состояний в виде, который называют стандартным представлением,

$$\hat{T}^{(j)}_m = |j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|. \tag{IV.1.14}$$

При повороте состояние неприводимого представления преобразуется как

$$\hat{R}|j,m\rangle = \mathcal{R}^{(j)}_{mm'}|j,m'\rangle,\quad \hat{R}|0,0\rangle=|0,0\rangle,\quad \text{и поэтому } \langle 0,0|\hat{R}^\dagger=\langle 0,0|, \tag{IV.1.15}$$

где $\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}$ — это матрица групповых преобразований, которая имеет размер $(2j+1)\times(2j+1)$, и мы подразумеваем суммирование по повторяющемуся индексу m'. Тогда согласно (IV.1.14) и в силу инвариантности $\tilde{T}$ оператор $\hat{T}^{(j)}_m$ преобразуется так

$$\hat{R}\Big(|j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|\Big)=\hat{R}\cdot|j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|\hat{R}^\dagger=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}|j,m'\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\big(\hat{R}|0,0\rangle\big)^\dagger=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}|j,m'\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|, \tag{IV.1.16}$$

В итоге

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big)=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\hat{T}^{(j)}_{m'}. \tag{IV.1.17}$$

Заметим, что

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big)=\hat{R}\cdot\hat{T}^{(j)}_m\cdot\hat{R}^\dagger.$$

Это выражение мы получим ниже также из других соображений.

Свойство преобразований оператора при поворотах (IV.1.17) имеет место, только если $\tilde{T}$ является инвариантом группы поворотов и не зависит от m. В противном случае матричный закон (IV.1.17) не имел бы места. Важно подчеркнуть, что закон линейных матричных преобразования базисных состояний неприводимого представления группы поворотов, записанный в (IV.1.15), и закон преобразования компонент тензорного оператора при действии группы поворотов изоморфны. Это значит, что компоненты такого линейного тензорного оператора реализуют базисные элементы неприводимого представления группы поворотов, так как компоненты линейного оператора сами образуют векторное пространство.

Принято записывать матричный элемент $\langle j,m|\hat{T}^{(j)}_m|0,0\rangle=\tilde{T}$ в виде

$$\langle j,m|\hat{T}^{(j)}_m|0,0\rangle\equiv\frac{\langle j||\hat{T}^{(j)}||0\rangle}{\sqrt{2j+1}}\quad(\text{нет суммирования по } m),$$

[5] В этой записи мы не указываем квантовые числа состояния, которые являются инвариантами группы поворотов, т. е. не зависят от действия на состояния операторов группы поворотов.

[6] Например, координатная волновая функция может быть умножена на квадрат длины $\boldsymbol{r}^2$, который является инвариантом группы поворотов.

где числитель называют *приведенным матричным элементом* (обратите в обозначении внимание на двойную вертикальную черту вместо одинарной): его значение не зависит от значений проекций моментов вращения у начального и конечного состояний, а также от индекса, который нумерует компоненты неприводимого тензорного оператора.

Коммутаторы тензорного оператора с операторами компонент момента вращения легко вычисляются по известному результату действия компонент момента вращения на кет- и бра-состояния:

$$\begin{aligned}[j_3, \hat{T}^{(j)}_m] &= m\,\hat{T}^{(j)}_m,\\ [j_\pm, \hat{T}^{(j)}_m] &= \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\hat{T}^{(j)}_{m\pm 1}.\end{aligned} \tag{IV.1.18}$$

В самом деле, поскольку

$$j_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \qquad \langle 0,0|j_3 = 0,$$

то

$$[j_3, \hat{T}^{(j)}_m] = [j_3, \big(|j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|\big)] = j_3|j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0| - |j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0|j_3 = m\,|j,m\rangle\cdot\tilde{T}\cdot\langle 0,0| = m\,\hat{T}^{(j)}_m,$$

и аналогично для коммутатора с повышающим и понижающим генератором группы поворотов[7].

Соотношения (IV.1.17) и (IV.1.18), закон преобразования и следующие из него коммутационные соотношения говорят о том, что набор линейных операторов $\hat{T}^{(j)}_m$ реализует неприводимое представление группы SU(2): коммутаторы задают линейное преобразование в стандартном базисе, аналогичном базису Картана–Вейля присоединенного представления, а преобразование компонент оператора $\hat{T}^{(j)}_m$ — это линейные преобразования в $(2j+1)$-мерном пространстве неприводимого представления.

Дадим теперь общее определение неприводимого тензорного оператора, опираясь на свойства, которые мы получили при рассмотрении примера[8].

Компоненты неприводимого тензорного оператора $\hat{T}^{(j)}_m$ образуют неприводимое представление группы SU(2) и в стандартном представлении характеризуются базисом, элементы которого помечаются значением проекции m момента количества движения j, так что при действии элемента группы $\hat{R}$ стандартные компоненты неприводимого тензорного оператора $\hat{T}^{(j)}_m$ преобразуются так же, как и все другие неприводимые представления с тем же значением момента, так что, вводя обозначение для операции преобразования оператора

$$\hat{T}^{(j)}_m \xrightarrow{\hat{R}} \Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big)_R \equiv \hat{\mathcal{R}}\Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big),$$

запишем

$$\hat{\mathcal{R}}\Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big) = \mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\hat{T}^{(j)}_{m'}. \tag{IV.1.19}$$

Здесь $\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}$ — это та же матрица размером $(2j+1)\times(2j+1)$, что и при групповых преобразованиях в пространстве неприводимого представления квантовых состояний:

$$\hat{R}\Big(|j,m\rangle\Big) = \mathcal{R}^{(j)}_{mm'}|j,m'\rangle. \tag{IV.1.20}$$

Несмотря на идентичное определение закона преобразования при действии операторов поворотов на неприводимый тензорный оператор в стандартном представлении $\hat{T}^{(j)}_m$ в (IV.1.19) и на базисное состояние неприводимого представления $|j,m\rangle$ в (IV.1.20), есть существенное различие в свойствах этих объектов, которое связано с наличием у базисных состояний собственных значений наблюдаемых, инвариантных относительно действия операторов поворотов[9].

Разница между неприводимым тензорным оператором $\hat{T}^{(j)}_m$ и квантовыми состояниями $|j,m\rangle$ с определенным значением момента вращения и его проекции в следующем. Умножение состояния $|j,m\rangle$ на

[7] Для читателя, склонного к скрупулезному изучению формул, отметим, что построенный нами специфический оператор $\hat{T}^{(j)}_m$ действует только на пространстве состояний $|0,0\rangle$, а на всех других состояниях его действие равно нулю. То же относится и к рассмотренным коммутаторам.

[8] Подчеркнем, что стандартное представление неприводимого тензорного оператора в виде (IV.1.14), рассмотренное нами в примере, когда оператор действовал исключительно на состояния $|0,0\rangle$, справедливо только в подпространстве этих скалярных состояний, а стандартное представление неприводимого тензорного оператора в общем виде на пространстве состояний $|J,M\rangle$ фактически выводится нами исходя из свойств преобразования этого оператора и формулируется как теорема Вигнера–Эккарта.

[9] Когда мы так говорим, мы имеем в виду, что состояние является собственным для этих наблюдаемых. Если собственный вектор инвариантной наблюдаемой не преобразуется при действии группы поворотов остается собственным, то и линейная комбинация собственных векторов не меняется при действии группы.

состояние $|\tilde{j},\tilde{m}\rangle$ является тензорным произведением состояний, которое раскладывается в прямую сумму по состояниям с определенными значениями суммарного момента вращения J. Базисное состояние, являющееся собственным для квадрата и проекции суммарного момента вращения $|J,M\rangle$, является зацепленным и раскладывается в сумму факторизованных состояний, набранных из элементов базисов представлений исходных моментов вращения $|j,m\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m}\rangle \equiv |j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle$. Коэффициенты такой суперпозиции называются коэффициентами Клебша-Гордана.. При этом обычно не указывают на тот факт, что состояния базиса момента вращения включают в себя еще и квантовые числа ψ наблюдаемых, которые являются инвариантами группы поворотов и дополняют набор наблюдаемых до полного. Например, $|j,m,\psi\rangle$ записывают как $|j,m\rangle$, поскольку генераторы группы поворотов никак не влияют на состояние ψ, которое инвариантно относительно действия группы поворотов. В качестве примера ψ можно указать модуль радиус-вектора частицы.

Действие неприводимого тензорного оператора $\hat{T}^{(j)}_m$ на квантовое состояние $|\tilde{j},\tilde{m},\psi\rangle$ не сводится к тензорному произведению состояния неприводимого представления $|j,m\rangle$ на состояние неприводимого представления $|\tilde{j},\tilde{m}\rangle$. Оператор $\hat{T}^{(j)}_m$ включает в себя еще и инвариантный оператор типа $\tilde{T}$, т. е. преобразование, которое затрагивает квантовые числа ψ. Эти квантовые числа могут не иметь отношения к универсальной накрывающей группы поворотов[10], т. е. к группе SU(2). Мы уже упоминали пример такой инвариантной переменной: если $\tilde{T}$ — это длина радиус-вектора r, а состояние относится к координатному пространству состояний, то умножение этого состояния на инвариант r не изменяет свойства состояния относительно группы поворотов, и это умножение не сводится к какому-либо коэффициенту Клебша–Гордана, т. е. к умножению на число. Это значит, что у квантового состояния $|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle$ мультииндекс $\tilde{\psi}$ маркирует собственные значения наблюдаемых, которые остаются инвариантными при действии группы SU(2). Значения $\tilde{\psi}$ не зависят от проекции момента вращения $\tilde{m}$, но могут зависеть от инварианта группы SU(2), т. е. от $\tilde{j}$. Состояние составной системы, построенной из подсистем A и $\tilde{A}$ в форме тензорного произведения $|j,m,\psi\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle$ преобразуется по законам преобразования компонент такого тензорного произведения. Разложение этого тензорного произведения в прямую сумму неприводимых представлений суммарного момента вращения не зависит от инвариантов ψ и $\tilde{\psi}$. Поэтому коэффициенты Клебша–Гордана не зависят от ψ и $\tilde{\psi}$, и эти инварианты не указываются в выражениях для коэффициентов Клебша–Гордана.

Действие же неприводимого тензорного оператора на состояние с определенным моментом вращения $\tilde{j}$ и его проекцией $\tilde{m}$ приводит к суперпозиции состояний, где могут изменяться квантовые числа инвариантов $\tilde{\psi}$:

$$\hat{T}^{(j)}_m|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle = \sum_{\tilde{j}',\tilde{m}',\tilde{\psi}'} C^{jm}_{\tilde{j}\tilde{m}\tilde{\psi}}(\tilde{j}',\tilde{m}',\tilde{\psi}')\,|\tilde{j}',\tilde{m}',\tilde{\psi}'\rangle.$$

Тем не менее, зададимся вопросом о том, что можно сказать о преобразованиях элементом группы поворотов результата действия неприводимого тензорного оператора на квантовое состояние с определенными значениями момента вращения и его проекции, т. е. о вычислении

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_m|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big).$$

Поскольку в пространстве квантовых состояний действуют линейные операторы, которые переводят суперпозицию квантовых состояний в суперпозицию образов квантовых состояний с теми же коэффициентами, а элемент группы имеет обратный, рассматриваемое действие обычно формально записывают в виде

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big) = \hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}\hat{R}^{-1}\hat{R}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big) = \Big(\hat{R}\hat{T}^{(j)}_{m'}\hat{R}^{-1}\Big)\Big(\hat{R}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big).$$

Оператор группового преобразования определяют так, чтобы он сохранял нормировку квантовых состояний. Это значит, что $\hat{R}$ — это унитарный оператор и $\hat{R}^{-1}=\hat{R}^{\dagger}$. Дадим определение понятия действия оператора поворота на оператор $\hat{T}^{(j)}_m$ и запишем результат такого действия оператора поворотов в случае, когда оператор $\hat{T}^{(j)}_m$ является неприводимым тензорным оператором:

$$\hat{\mathcal{R}}\Big(\hat{T}^{(j)}_m\Big) \equiv \hat{R}\,\hat{T}^{(j)}_{m'}\,\hat{R}^{\dagger} = \mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\hat{T}^{(j)}_{m'}.$$

[10]Понятие универсальной обертывающей группы мы обсуждали в главе 1, **§4. Спин $s=1/2$** на стр. 46. Более общее рассмотрение было проведено при описании экспоненциального представления группы в разделе **4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы** главы 2. Вкратце, алгебра Ли и ее представления определяют экспоненциальное представление групповых элементов, а сама такая группа и есть универсальная накрывающая для исходной группы Ли, алгебра которой рассматривается.

Неприводимый тензорный оператор может изменять значения инвариантных квантовых чисел $\tilde{\psi}$, но результат действия элемента группы

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)$$

обладает ровно теми же свойствами преобразования[11] по отношению к группе SU(2), что и *тензорное произведение неприводимых представлений с моментами вращения j и $\tilde{j}$*:

$$\hat{R}\Big(|j,m\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m}\rangle\Big)=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\mathcal{R}^{(\tilde{j})}_{\tilde{m}\tilde{m}''}|j,m\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m}''\rangle=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\mathcal{R}^{(\tilde{j})}_{\tilde{m}\tilde{m}''}|j,m';\tilde{j},\tilde{m}''\rangle\quad\Rightarrow$$

$$\langle J,M|\Big(\hat{R}\Big(|j,m\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m}\rangle\Big)\Big)=\big(\hat{R}^{\dagger}|J,M\rangle\big)^{\dagger}\Big(|j,m\rangle\otimes|\tilde{j},\tilde{m}\rangle\Big)=\big(\mathcal{R}^{(J)\mathrm{T}*}_{MM'}\big)^{*}\langle J,M'|j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle=$$

$$=\mathcal{R}^{(J)}_{M'M}\langle J,M'|j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\mathcal{R}^{(\tilde{j})}_{\tilde{m}\tilde{m}''}\langle J,M|j,m';\tilde{j},\tilde{m}''\rangle,\quad\text{(IV.1.21)}$$

где матричные элементы выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана. Например,

$$\langle J,M'|j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle=\Big(\langle j,m;\tilde{j},\tilde{m}|J,M'\rangle\Big)^{\dagger}=\Big(C^{JM'}_{jm,\tilde{j}\tilde{m}}\Big)^{*}.\qquad\text{(IV.1.22)}$$

Аналогично

$$\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\mathcal{R}^{(\tilde{j})}_{\tilde{m}\tilde{m}''}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m}'',\tilde{\psi}\rangle\Big)\quad\Rightarrow$$

$$\langle J,M|\Big(\hat{R}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)\Big)=\big(\hat{R}^{\dagger}|J,M\rangle\big)^{\dagger}\Big(\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)=\big(\mathcal{R}^{(J)\mathrm{T}*}_{MM'}\big)^{*}\langle J,M'|\hat{T}^{(j)}_{m}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle=$$

$$=\mathcal{R}^{(J)}_{M'M}\langle J,M'|\hat{T}^{(j)}_{m}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle=\mathcal{R}^{(j)}_{mm'}\mathcal{R}^{(\tilde{j})}_{\tilde{m}\tilde{m}''}\langle J,M|\hat{T}^{(j)}_{m'}|\tilde{j},\tilde{m}'',\tilde{\psi}\rangle.\quad\text{(IV.1.23)}$$

Последняя строчка в формуле (IV.1.21) устанавливает соотношения преобразования комплексно сопряженных коэффициентов Клебша–Гордана, т. е. чисел $\langle j,m;\tilde{j},\tilde{m}|J,M'\rangle^{*}$, при действии оператора поворотов. Последняя строчка в формуле (IV.1.23) говорит о том, что соотношения преобразования матричных элементов

$$\langle J,M'|\Big(\hat{T}^{(j)}_{m}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)$$

совпадают с соотношениями преобразования комплексно сопряженных коэффициентов Клебша–Гордана. В силу линейности соотношений (IV.1.21) и (IV.1.23) это значит, что имеет место изоморфизм комплексно сопряженных коэффициентов Клебша–Гордана и матричных элементов неприводимого тензорного оператора, так что эти коэффициенты и матричные элементы могут отличаться лишь на постоянный множитель. Это утверждение можно записать в виде формулы

$$\langle J,M|\Big(\hat{T}^{(j)}_{m}|\tilde{j},\tilde{m},\tilde{\psi}\rangle\Big)=\langle J,M|j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle\,K(J,j,\tilde{j},\tilde{\psi}),\qquad\text{(IV.1.24)}$$

где

$$\langle J,M|j,m;\tilde{j},\tilde{m}\rangle=\Big(C^{J'M'}_{jm,\tilde{j}\tilde{m}}\Big)^{*}.$$

Последняя формула есть определение комплексно сопряженных коэффициентов Клебша–Гордана при переходе к базису состояний с суммарным моментом вращения J от факторизованного базиса в тензорном произведении подсистем с моментами вращения j и $\tilde{j}$, а инвариантный множитель обычно записывают в виде

$$K(J,j,\tilde{j},\tilde{\psi})=\frac{\langle J||T^{(j)}||\tilde{j}\rangle}{\sqrt{2J+1}}.$$

Его называют приведенным матричным элементом, который не зависит от значений проекций моментов вращения, а квадрат приведенного матричного элемента как бы усредняется по числу базисных состояний с суммарным моментом вращения J:

$$|K(J,j,\tilde{j},\tilde{\psi})|^2=\frac{|\langle J||T^{(j)}||J\rangle|^2}{2J+1}.$$

[11] Такое определение согласовано с тензорным обобщением генераторов алгебры Ли в соответствии с формулой Лейбница для дифференцирования произведения.

Формула (IV.1.24) называется теоремой Вигнера–Эккарта для матричного элемента неприводимого тензорного оператора.

Правила отбора для этого матричного элемента, т. е. условия, при которых матричный элемент может быть отличен от нуля, совпадают с правилами отбора для коэффициентов Клебша–Гордана. Эти правила отбора обычно записывают таким образом:

- *Правила отбора по проекции момента вращения.* Так как $M = m + \tilde{m}$, и $-j \leqslant m \leqslant j$, то

$$\Delta M \equiv |M - \tilde{m}| \leqslant j. \tag{IV.1.25}$$

- *Правила отбора по моменту вращения.* Поскольку $|\tilde{j} - j| \leqslant J \leqslant \tilde{j} + j$, то при $\tilde{j} \geqslant j$ имеет место ограничение $\tilde{j} - j \leqslant J \leqslant \tilde{j} + j$, откуда $J - \tilde{j} \leqslant j$ и $\tilde{j} - J \leqslant j$, а значит, независимо от знака разности $J - \tilde{j}$

$$|J - \tilde{j}| \equiv \Delta J \leqslant j.$$

- *Правила запрета.* При $\tilde{j} \leqslant j$ имеет место ограничение $j - \tilde{j} \leqslant J \leqslant \tilde{j} + j$, откуда, во-первых, при $J \geqslant \tilde{j}$ получется, что

$$0 \leqslant J - \tilde{j} \leqslant j,$$

а при $J \leqslant \tilde{j}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \tilde{j} - J, \\ J \geqslant j - \tilde{j}, \\ \tilde{j} \leqslant j, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \tilde{j} - J \leqslant 2\tilde{j} - j, \\ \tilde{j} \leqslant j, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \tilde{j} - J \leqslant j.$$

Таким образом правило отбора по моменту вращения не изменяется: $\Delta J \leqslant j$. Во-вторых, имеет место условие

$$j \leqslant \tilde{j} + J,$$

очевидно справедливое и при $\tilde{j} \geqslant j$, а значит, запрещены отличные от нуля матричные элементы при

$$j > \tilde{j} + J.$$

В частности, если $J = \tilde{j} = 0$, то при $j \geqslant 1$ равны нулю все матричные элементы $\langle 0, 0, \psi | \hat{T}^{(j)}_{m'} | 0, 0, \psi' \rangle$, и в этом случае говорят, что запрещены переходы $\tilde{j} = 0 \to J = 0$.

Теорема Вигнера–Эккарта говорит о том, что, если воспользоваться полнотой базиса состояний по неприводимым представлениям группы поворотов

$$\mathbb{1} = \sum_{J,M} |J, M\rangle\langle J, M| = \sum_{\tilde{j},\tilde{m}} |\tilde{j}, \tilde{m}\rangle\langle\tilde{j}, \tilde{m}|$$

и представить оператор как

$$\hat{T}^{(j)}_m = \sum_{\tilde{j},\tilde{m},J,M} |J, M\rangle\langle J, M| \Big(\hat{T}^{(j)}_m |\tilde{j}, \tilde{m}\rangle \Big) \langle\tilde{j}, \tilde{m}|,$$

согласно (IV.1.24) неприводимый тензорный оператор представим в виде

$$\hat{T}^{(j)}_m = \sum_{\tilde{j},\tilde{m},J,M} \frac{\langle J || T^{(j)} || \tilde{j} \rangle}{\sqrt{2J+1}} \, |JM\rangle \, \langle J, M | j, m; \tilde{j}, \tilde{m}\rangle \langle\tilde{j}, \tilde{m}|. \tag{IV.1.26}$$

Для примера, как было показано в [1], в декартовых координатах симметричные тензоры ранга l с нулевым следом по любой паре индексов отвечают неприводимым представлениям с моментом вращения $j = l$. В этом же учебном пособии в разделе **3.2 Тензорные поля**, **§3. Спиновые операторы и состояния** главы 1 построена схема перехода от декартовых координат к стандартному представлению для неприводимого тензора, которое определяется в виде суперпозиции компонент тензора в декартовых координатах. Так вектор электрического дипольного момента — это неприводимый тензор с моментом вращения $j = 1$ и тремя независимыми компонентами, а тензор квадрупольного момента — это неприводимый тензор с $j = 2$ и пятью независимыми компонентами.

§2. Магнитные моменты системы трех кварков

Проблема расчета величин магнитных моментов барионов и гиперонов, спиновые состояния дикварков в барионе, спиновое состояние бариона. Оператор магнитного момента протона как сумма операторов кварков составной модели, действие операторов на спиновые состояния, сравнение с экспериментальными данными магнитных моментов протона, нейтрона и $\Sigma^{\pm}$-гиперонов в рамках составной модели.

2.1 Спиновая функция барионов в основном состоянии

Вычислим магнитные моменты нескольких барионов в кварковой модели. Дело в том, что магнитные моменты точечных частиц пропорциональны спину частицы и ее заряду, и если считать, что барионы со спином $1/2$ — это элементарные частицы, подчиняющиеся уравнению Дирака, то у нейтрона, как у частицы Дирака с нулевым электрическим зарядом, магнитный момент должен быть равен нулю, а у протона — нуклонному магнетону (см. учебник [10])

$$\mu_p \mapsto \frac{e}{2m_pc}\, g\, \hbar s_p = \frac{e\hbar}{2m_pc} \equiv \mu_N, \tag{IV.2.1}$$

где $s_p = 1/2$ — это спин протона, причем g-фактор, как установлено для электронов и других частиц, которые описываются уравнением Дирака локальных объектов, не имеющих внутренней структуры, в ведущем приближении равен 2, а его малые отклонения от этого значения вычисляются в квантовой теории поля при учете флуктуаций квантовых полей в виде так называемых петлевых поправок. Эксперимент [12] катастрофически расходится со значениями магнитного момента протона и нейтрона как точечных частиц уравнения Дирака

$$\mu_p \approx 2.79\,\mu_N, \qquad \mu_n \approx -1.91\,\mu_N.$$

Модель, в которой барионы состоят из кварков, даже в статическом приближении дает хорошее согласие с экспериментальными данными.

Согласно кварковой модели барионы составлены из трех кварков, которые связаны сильным взаимодействием, причем кварки — это квантовые состояния, которые кроме координатного пространства и пространства ароматов проявлены также в спиновом и цветовом пространствах. Они обладают спином $1/2$ и цветом группы $\mathrm{SU}_c(3)$ так, что состояние в пространстве цвета антисимметрично по перестановке квантовых чисел кварков в этом пространстве. Трехкварковое состояние адрона является тензорным произведением кварковых состояний в каждом из пространств. В основном состоянии общее координатное состояние кварков (координатная волновая функция) симметрично по перестановке координат кварков как их квантовых чисел. В отношении перестановок квантовых чисел кварков в общем пространстве спина в случае, когда их суммарный спин, т. е. спин бариона, равен $1/2$, ситуация не так проста, как для спина барионов, равного $3/2$, когда перестановка спиновых квантовых чисел кварков должна быть симметрична. Это же замечание касается и перестановки кварков в пространстве ароматов, так что имеет место связь между перестановками в пространстве спина и в пространстве ароматов, и состояния в этих пространствах являются зацепленными (или запутанными): см. табл. 1.

$\mathsf{T}^{(1,1)}$:

квантовое пространство	локальные координаты	ароматы кварков	цвет	спин
группа	вращения и движение	$\mathrm{SU_f}(3)$	$\mathrm{SU}_c(3)$	$\mathrm{SU}(2)$
симметрия	$+1$	зацеплено	-1	зацеплено

Таблица 1: Симметрия относительно перестановки статических кварков в октете барионов как представления $\mathsf{T}^{(1,1)}$ группы ароматов $\mathrm{SU_f}(3)$, в который входят протон и нейтрон, при суммарном значения спинов кварков, равном $1/2$.

Для решения задачи о зацепленности состояний в пространствах аромата и спина заметим, что в состав протона входят два u-кварка одного аромата $p = (uud)$, а в состав нейтрона два d-кварка одного аромата $n = (ddu)$. Если подходить к вопросу о тождественности кварков точно, то кварки разных ароматов u и d обладают разными массами, так что множества значений квантовых квантовых чисел этих кварков, куда входит и их масса, не совпадают. Поэтому кварки разного аромата не являются тождественными, и мы рассматриваем в качестве тождественных два u-кварка в протоне или два d-кварка в нейтроне. Значит, раз в барионе присутствуют тождественные кварки (см. **§5. Тождественные частицы** главы 1), для которых имеет место статистика Ферми–Дирака, и интегральное по всем пространствам

состояние должно быть антисимметричным по перестановке квантовых чисел тождественных кварков в пространствах координат, цвета и спина, то в основном состоянии спиновое состояние двух тождественных кварков должно быть симметрично по перестановке спиновых квантовых чисел кварков, а это, как мы выяснили с помощью схем Юнга, отвечает суммарному спину, равному единице.

Рассмотрим протон, составленный из кварков (uud). Состояние дикварка (uu) в магнитном спиновом пространстве двух тождественных u-кварков симметрично, и спин равен единице, а результирующий спин трехкваркового протона равен $1/2$. Это значит, что в общем спиновом пространстве, симметрия которого описывается группой SU(2), при разложении тензорного произведения триплета, который описывает дикварк (uu) со спином, равным единице, и дублета, который описывает d-кварк со спином, равным $1/2$, в прямую сумму состояний неприводимых представлений нужно выделить мультиплет неприводимого представления с суммарным спином дикварка и кварка, равным $1/2$. Эта задача была рассмотрена нами в этой главе, раздел **1.1 Сложение моментов вращения**, **§1. Тензорное произведение неприводимых представлений группы поворотов**.

Итак, спиновое состояние протона с проекцией спина $+\frac{1}{2}$ задается зацепленным базисным состоянием[12], построенном как суперпозиция трех факторизованных тензорных произведений спиновых состояний трех кварков, или из суммы двух факторизованных тензорных произведений дикварка uu и кварка d,

$$|\text{proton}, +\tfrac{1}{2}\rangle = |1,0\rangle_{(uu)}|+\rangle_{\text{d}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} - |1,+1\rangle_{(uu)}|-\rangle_{\text{d}} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \tag{IV.2.2}$$

(см. формулу (IV.1.11)). Согласно (IV.1.3)

$$|1,0\rangle_{(uu)} = \big(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |1,+1\rangle_{(uu)} = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}.$$

Определение состояния протона в пространстве спина позволяет теперь вычислить его магнитный момент[13].

2.2 Магнитные дипольные моменты протона, нейтрона и странных гиперонов

Магнитный момент протона вычисляется как среднее значение суммы операторов магнитных моментов кварков, составляющих протон. Рассчитаем для спинового состояния протона (IV.2.2) среднее значение оператора проекции магнитного момента кварков на ось z, считая, что состояния кварков описываются уравнением Дирака для точечных частиц с $g = 2$,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p &= \sum_q \mu_z^q = \mu_z^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \mu_z^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mu_z^d = \\ &= Q_u \frac{e\hbar}{2m_u c}\, g\left(s_z^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d\right) + Q_u \frac{e\hbar}{2m_u c}\, g\left(\mathbb{1}^{[1]} \otimes s_z^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d\right) + Q_d \frac{e\hbar}{2m_d c}\, g\left(\mathbb{1}^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes s_z^d\right),\end{aligned} \tag{IV.2.3}$$

причем

$$Q_u = +\tfrac{2}{3}, \qquad Q_d = -\tfrac{1}{3}.$$

Так как массы u- и d-кварков как квантовых состояний в протоне мало отличаются, $m_u \approx m_d \approx m_q \sim 330$ МэВ, можно ввести магнетон легкого кварка

$$\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q c}. \tag{IV.2.4}$$

Из приведенного выше явного вида оператора z-компоненты магнитного момента протона следует, что этот оператор не инвариантен относительно преобразований группы ароматов, так как даже при равенстве масс u- и d-кварков их электрические заряды отличаются. Из этих же соображений ясно, что барионные состояния одного мультиплета по группе ароматов обладают разными магнитными моментами из-за того, что в определение оператора магнитного момента входят электрические заряды, которые

[12] Аналогичная формула может быть записана и для состояния протона с проекцией спина $-\frac{1}{2}$.

[13] С момента открытия спина и понимания, что симметрия этого пространства описывается группой SU(2), установлено, что этот спин взаимодействует с известными нам физическими полями и объектами через магнитное поле. Другие величины с симметрией SU(2) мы называем изоспином, U-спином, слабым изоспином, орбитальным моментом вращения и т.п. Поэтому логично было бы называть самый первый из открытых спинов группы SU(2) магнитным, поскольку он входит в гамильтониан ваимодействия с магнитным полем, благодаря чему он и был обнаружен экспериментально, а пространство состояний такого гамильтониана магнитным пространством или пространством магнитного спина, тем более, что собственное значение проекции магнитного спина на направление магнитного поля называлось в эпоху открытия спина магнитным квантовым числом.

отличаются у разных состояний мультиплета. Каждая из двух компонент зацепленного спинового состояния (спиновой волновой функции) протона в формуле (IV.2.2), образованного из спиновых состояний дикварка uu и кварка d, оказывается собственным состоянием оператора магнитного момента протона со своим собственным значением. Поэтому мы вычислим именно средний магнитный момент по состоянию протона в спиновом (магнитном) пространстве. Само спиновое состояние протона собственным для оператора суммарного магнитного момента не является.

В самом деле, вычислим действие оператора магнитного момента протона (IV.2.3) на обе компоненты спинового состояния протона (IV.2.2):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p|1,0\rangle_{(uu)}|+\rangle_{\rm d} &= \Big\{Q_u\mu_q\, g(s_z^{[1]}+s_z^{[2]}) + Q_d\mu_q\, g\, s_z^d\Big\}\left(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\right)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot|+\rangle_d = \\ &= \left\{Q_u\mu_q\, g(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}) + Q_d\mu_q\, g\,\tfrac{1}{2}\right\}\left(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot|+\rangle_d\right) + \\ &+ \left\{Q_u\mu_q\, g(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}) + Q_d\mu_q\, g\,\tfrac{1}{2}\right\}\left(|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot|+\rangle_d\right) = \\ &= Q_d\mu_q\left(|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}\right)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot|+\rangle_d = Q_d\mu_q\,|1,0\rangle_{(uu)}|+\rangle_{\rm d}, \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.5)}$$

и

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p|1,+1\rangle_{(uu)}|-\rangle_{\rm d} &= \Big\{Q_u\mu_q\, g(s_z^{[1]}+s_z^{[2]}) + Q_d\mu_q\, g\, s_z^d\Big\}\,|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_d = \\ &= \left\{Q_u\mu_q\, g(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}) + Q_d\mu_q\, g\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right\}|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_d = \\ &= (2Q_u - Q_d)\mu_q|1,+1\rangle_{(uu)}|-\rangle_{\rm d}. \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.6)}$$

Результат действия оператора проекции магнитного момента на состояние протона можно представить в виде суммы по всем возможным состояниям $|X\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle &= \mathbb{1}\cdot\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{|X\rangle}|X\rangle\,\langle X|\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle = \\ &= |{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle\,\langle{\rm proton},+\tfrac{1}{2}|\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle + \sum_{\substack{|X\rangle\neq\\ |{\rm proton},+\frac{1}{2}\rangle}}|X\rangle\,\langle X|\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle,\end{aligned}$$

где мы выделили так называемый упругий вклад, который описывает ситуацию, когда протон как составная система остается в своем исходном состоянии, не распадается на составные части и не переходит в иные возбужденные связанные состояния. Именно упругий вклад и является целью проводимых вычислений. Тогда с учетом полученного результата для двух вкладов в состояние протона величину магнитного момента можно вычислить как среднее значение оператора (IV.2.3) по состоянию (IV.2.2), в котором указаны амплитуды рассмотренных нами в (IV.2.5) и (IV.2.6) ортонормированных спиновых состояний кварков, являющихся собственными для оператора проекции магнитного момента:

$$\mu_p = \langle{\rm proton},+\tfrac{1}{2}|\hat{\mu}_p|{\rm proton},+\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{3}\cdot\mu_q Q_d + \tfrac{2}{3}\cdot\mu_q(2Q_u - Q_d) = \mu_q\left(\tfrac{4}{3}\cdot Q_u - \tfrac{1}{3}\cdot Q_d\right) = \mu_q = \mu_N\tfrac{m_N}{m_q}, \quad \text{(IV.2.7)}$$

где μ_N — магнетон Бора частицы с массой нуклона и зарядом протона введен ранее в (IV.2.1). Если в качестве самой грубой оценки пренебречь энергией связи кварковых состояний в протоне и положить, что масса кварка в 3 раза меньше массы нуклона, то $\mu_p \approx 3\mu_N$. Эта оценка нулевого приближения уже близка к экспериментальной величине и превышает ее только на величину менее 10 %. Если же считать, что масса кварка $m_q \approx 330$ МэВ и принять массу нуклона равной $m_N \approx 940$ МэВ, то получим оценку

$$\mu_p \approx 2.85\,\mu_N,$$

что отличается от экспериментального значения только на 5%. И такой обнадеживающий результат достигается при довольно простых предположениях о связи статических кварков в протоне и g-факторе, который считается равным двум так, как это имеет место для дираковской частицы без петлевых поправок! Конечно, можно исходить из полученных в модели формул и из экспериментального значения магнитного момента протона сначала извлечь значение массы u- и d-кварков, полагая, что эти кваркм имеют одинаковую массу в силу изотопической инвариантности сильных взаимодействий, т. е. в силу эквивалентности этих двух ароматов при образовании состояний протона и нейтрона, что имеет место с точностью до 2 МэВ в сравнении с массой нуклона в 940 МэВ. И тогда данные по магнитному моменту протона могут служить исходной информацией для предсказания значения магнитного момента нейтрона. Но мы будем следовать исторической канве развития событий, когда предполагаемые значения масс кварков в статической модели дали результаты, которые оказались в достаточно точном

согласии с экспериментом. Впрочем, оба этих подхода к оценкам в пределах точности модели являются эквивалентными.

Итак, аналогичные формулы для нейтрона (ddu) дают

$$\mu_n = \langle \text{neutron}, +\tfrac{1}{2}|\hat{\mu}_n|\text{neutron}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \mu_q\left(\tfrac{4}{3}\cdot Q_d - \tfrac{1}{3}\cdot Q_u\right) = -\tfrac{2}{3}\cdot\mu_q = -\tfrac{2}{3}\cdot\mu_N\,\tfrac{m_N}{m_q} = -\tfrac{2}{3}\,\mu_p. \qquad \text{(IV.2.8)}$$

При тех же значениях масс кварков и нуклона получаем

$$\mu_n \approx -1.9\,\mu_N.$$

Можно сравнить отношение моментов, найденное в эксперименте [12] и в составной кварковой модели (quark model [QM]):

$$\frac{\mu_n}{\mu_p}\Big|_{\text{exp}} \approx 0.68, \qquad \frac{\mu_n}{\mu_p}\Big|_{\text{QM}} \approx 0.67.$$

Разность этих значений составляет менее 3%, что и показывает меру успеха описания магнитных моментов нуклонов в рамках составной модели со статическими кварками.

Прямое обобщение рассмотренного вывода можно провести на случай странных гиперонов $\Sigma^+ = (uus)$ и $\Sigma^- = (dds)$, если учесть еще и то, что масса состояния странного кварка существенно больше масс состояний легких кварков[14], $m_s \approx 480$ МэВ. Тогда

$$\mu_{\Sigma^+} = \langle \Sigma^+, +\tfrac{1}{2}|\hat{\mu}_{\Sigma^+}|\Sigma^+, +\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{3}\cdot\mu_s Q_s + \tfrac{2}{3}\cdot(\mu_q\, 2Q_u - \mu_s\, Q_s) = \tfrac{4}{3}\cdot\mu_q Q_u - \tfrac{1}{3}\cdot\mu_s Q_s. \qquad \text{(IV.2.9)}$$

Численное значение нужно сравнить с экспериментальным [12]:

$$\mu_{\Sigma^+}\Big|_{\text{QM}} \approx 2.75\,\mu_N, \qquad \mu_{\Sigma^+}\Big|_{\text{exp}} \approx 2.46\,\mu_N.$$

Для $\Sigma^- = (dds)$

$$\mu_{\Sigma^-} = \langle \Sigma^-, +\tfrac{1}{2}|\hat{\mu}_{\Sigma^-}|\Sigma^-, +\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{3}\cdot\mu_s Q_s + \tfrac{2}{3}\cdot(\mu_q\, 2Q_d - \mu_s\, Q_s) = \tfrac{4}{3}\cdot\mu_q Q_d - \tfrac{1}{3}\cdot\mu_s Q_s. \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Численно

$$\mu_{\Sigma^-}\Big|_{\text{QM}} \approx -1.05\,\mu_N, \qquad \mu_{\Sigma^-}\Big|_{\text{exp}} \approx -1.16\,\mu_N.$$

Как видим, точность предсказания для странных гиперонов близка к 10%, что указывает на то, что простая кварковая модель дает верные представления об основных состояниях барионов и гиперонов в предположении, что g-факторы кварковых состояний мало отличаются от значения, равного двум.

Гипероны с двумя странными кварками $\Xi^0 = (ssu)$ и $\Xi^- = (ssd)$, обладающие спином $\frac{1}{2}$, в составной кварковой модели имеют магнитные моменты близкие к экспериментальным [12] с точностью уже порядка 20%:

$$\mu_{\Xi^0}\Big|_{\text{QM}} = \tfrac{4}{3}\cdot\mu_s Q_s - \tfrac{1}{3}\cdot\mu_u Q_u \approx -1.50\,\mu_N, \qquad \mu_{\Xi^0}\Big|_{\text{exp}} \approx -1.25\,\mu_N,$$
$$\mu_{\Xi^-}\Big|_{\text{QM}} = \tfrac{4}{3}\cdot\mu_s Q_s - \tfrac{1}{3}\cdot\mu_d Q_d \approx -0.55\,\mu_N, \qquad \mu_{\Xi^-}\Big|_{\text{exp}} \approx -0.65\,\mu_N.$$

Как видим, точность расчетов в составной кварковой модели снижается при увеличении числа странных кварков в барионе[15].

Отметим также, что магнитные моменты нейтральных барионов октета группы $\mathrm{SU_f}(3)$ со спином $\frac{1}{2}$, которые несут нулевое значение проекции изоспина и состоят из кварков (uds), могут быть вычислены исходя из предположений о изоспиновой симметрии $\mathrm{SU}(2)$ для кварковых ароматов u и d в сильном взаимодействии, определяющем динамику образования связанных состояний кварков. Как видим, кварковый состав этих барионов исключает использование статистики Ферми–Дирака для тождественных

[14]Разность масс легких и странного кварков можно оценить по разности масс протона и странного гиперона, которая составляет приблизительно 150 МэВ. Поскольку странный гиперон тяжелее протона, в численных оценках полагают, что странный кварк тяжелее легких на 150 МэВ.

[15]Причины неточности расчетов кроются в самом приближении статических кварков, в котором никак не учитывается динамика взаимодействий и движения самих кварков, что предполагает, что в действительности в каждом барионном состоянии энергия связи принимает не универсальное значение, а учет этой энергии связи не сводится к пренебрежимо малой вариации эффективных масс статических кварков. В частности, динамика движения кварков становится более существенной в численном выражении, когда разные кварки в составе адрона обладают разными массами и движутся по-разному, что и наблюдается при описании барионов с разным числом странных кварков в предположении, что характеристики u- и d-кварков уже зафиксированы из данных по барионам без странных кварков.

кварков. Однако можно использовать тот факт, что в сильных взаимодействиях неотличимы компоненты изодублета, т. е. кварки u и d. В этом случае эти кварки можно рассмотреть как разные состояния кварка q, который имеет квантовое число аромата, принимающее два значения u или d. Тогда это разные состояния одного и того же кварка q, и в рамках рассмотрения сильного взаимодействия можно рассуждать о двух тождественных кварках, квантовое число аромата которого принимает значения во множестве $\{u, d\}$. В таком подходе гиперон $\Lambda = (uds)$ обладает нулевым T-изоспином в общем пространстве ароматов трех кварков. Поскольку изоспин s-кварка равен нулю, мы рассматриваем группу ароматов $\mathrm{SU_f}(2)$ с двумерным фундаментальным представлением

$$\Psi_Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

и базисными состояниями изоспина

$$|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle_{\text{isospin}} = u_\uparrow, \qquad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{\text{isospin}} = d_\downarrow.$$

Тогда в этой группе изоспина гиперон $(uds) = \Lambda$, как установлено экспериментально, является изосинглетом. Дикварк ud находится в состоянии синглета по $\mathrm{SU_f}(2)$ (пространство неприводимого представления одномерно, и в профессиональной среде в этом случае говорят «является изосинглетом»)

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle^{[1]}_{\text{isospin}} \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle^{[2]}_{\text{isospin}} - |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle^{[1]}_{\text{isospin}} \otimes (|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle^{[2]}_{\text{isospin}}\Big) \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(u^{[1]}_\uparrow d^{[2]}_\downarrow - d^{[1]}_\downarrow u^{[2]}_\uparrow\big), \qquad \text{(IV.2.11)}$$

где верхние индексы в квадратных скобках обозначают метки квантовых чисел состояний кварков в других пространствах. Для трех кварков разных ароматов состояние в пространстве цвета по-прежнему является антисимметричным и синглетным. Мы трактуем в этом тензорном произведении два легких кварка как состояния тождественных фермионов в пространствах аромата, цвета, координат и магнитного спина. Мы установили, что состояние этих двух кварков в Λ-гипероне является симметричным по перестановкам квантовых чисел этих кварков в координатном пространстве, антисимметричным по перестановкам в пространстве цвета, антисимметричным по перестановкам в пространстве ароматов. Их состояние в магнитном спиновом пространстве должно быть антисимметричным, поскольку должна иметь место статистика Ферми–Дирака. Нормированное состояние этого дикварка в спиновом магнитном пространстве, антисимметричное по перестановкам квантовых чисел кварков в факторизованном базисе $|\pm\rangle_u$, $|\pm\rangle_d$, имеет вид

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle_u|-\rangle_d - |-\rangle_u|+\rangle_d\big),$$

и является зацепленным состоянием с нулевым квадратом спина, так как действие на такое состояние (IV.2.11) тензорного оператора квадрата суммарного магнитного спина дает нуль.

Задача 48. Покажите, что магнитный момент дикварка (ud) в Λ-гипероне равен нулю, если учесть, что усреднение приведет к скалярному произведению ортогональных дикварковых состояний. Вычислите магнитный момент этого гиперона.

В итоге магнитный момент Λ-гиперона оказывается равным магнитному моменту s-кварка:

$$\mu_\Lambda\Big|_{\text{QM}} = \mu_s Q_s \approx -0.65\,\mu_N, \qquad \mu_\Lambda\Big|_{\text{exp}} \approx -0.61\,\mu_N.$$

Гиперон $\Sigma^0 = (uds)$ обладает изоспином $T = 1$, но нулевым значением проекции изоспина $T_3 = 0$. Поэтому состояние дикварка в пространстве T-изоспина (для полноты изложения заметим, что это же состояние — гиперон $\Sigma^0 = (uds)$ принадлежит триплету состояний по U- и V- изоспину с проекцией $U_3 = V_3 = 0$), являющимся подпространством пространства аромата группы $\mathrm{SU_f}(3)$, имеет вид

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(u^{[1]}_\uparrow d^{[2]}_\downarrow + d^{[1]}_\downarrow u^{[2]}_\uparrow\big).$$

Это значит, что состояние является симметричным по перестановкам квантовых чисел двух тождественных в приближении точной $\mathrm{SU_f}(2)$–симметрии кварков q в пространстве изоспина, а в силу статистики Ферми–Дирака его спиновое состояние в базисе $|+\rangle$, $|-\rangle$ должно быть также симметричным по перестановке в спиновом пространстве: в зависимости от значения проекции суммарного спина

$$|+\rangle_u|+\rangle_d, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle_u|-\rangle_d + |-\rangle_u|+\rangle_d\big), \qquad |-\rangle_u|-\rangle_d.$$

Каждое из этих состояний пространства суммарного магнитного спина дикварка (ud) будет собственным для квадрата суммарного спина с собственным значение $s(s+1)=2$, а его индекс s, называемый спином дикварка (ud), будет равен единице. Антисимметричность по перестановкам квантовых чисел в интегральном по всем пространствам состоянии дикварка (ud) обеспечивается антисимметричностью по перестановкам квантовых чисел в пространстве цвета. Для случая, когда спин дикварка равен единице, можно воспользоваться выкладками, аналогичными тем, что мы использовали при вычислении магнитных моментов протона и нейтрона, но с соответствующей заменой ароматов кварков, а значит и их зарядов. В итоге найдем

$$\mu_{\Sigma^0}\Big|_{\mathrm{QM}} = -\tfrac{1}{3}\cdot\mu_s Q_s + \tfrac{2}{3}\cdot\mu_q(Q_u+Q_d) \approx 0.85\,\mu_N.$$

Однако сравнить вычисленное значение не с чем, поскольку экспериментально измерить этот магнитный момент методически затруднительно (см. обзор по теме магнитных моментов барионов в разделе о составной кварковой модели в обзоре [12]).

В англоязычной литературе составная модель адронов называется constituent quark model. Недостатком модели является то, что она никак не вникает в динамику образования связанных состояний кварков.

Глава 5

Симметрии эллиптических орбит

§1. Симметрия в атоме водорода

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса как замкнутой орбиты, векторный интеграл движения и связь его длины с эксцентриситетом. Связь генераторов симметрии со скобками Пуассона физических величин, пример скобок Пуассона для компонент момента вращения, скобки Пуассона компонент вектора Рунге–Ленца–Лапласа и SO(4) симметрия финитных кулоновских орбит. Связь значений инвариантов Казимира с плоским движением, вычисление квадратичного оператора Казимира в терминах энергии, импульса, координат и орбитального момента частицы, главное квантовое число, орбитальное квантовое число и кратность вырождения уровней энергии атома водорода.

1.1 Вектор Рунге–Ленца–Лапласа

В нерелятивистской механике для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала[1]. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со временем. Это свойство не является общим для центральных потенциалов, и оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча r от первого фокуса до кривой эллипса до отражения и луча r' от кривой до второго фокуса после отражения — это постоянная величина $r + r' = 2a$, где a — величина той полуоси эллипса, на которой расположены фокусы (см. рис. 5.1; в дальнейшем мы полагаем, что центр потенциала расположен в правом фокусе). Поскольку

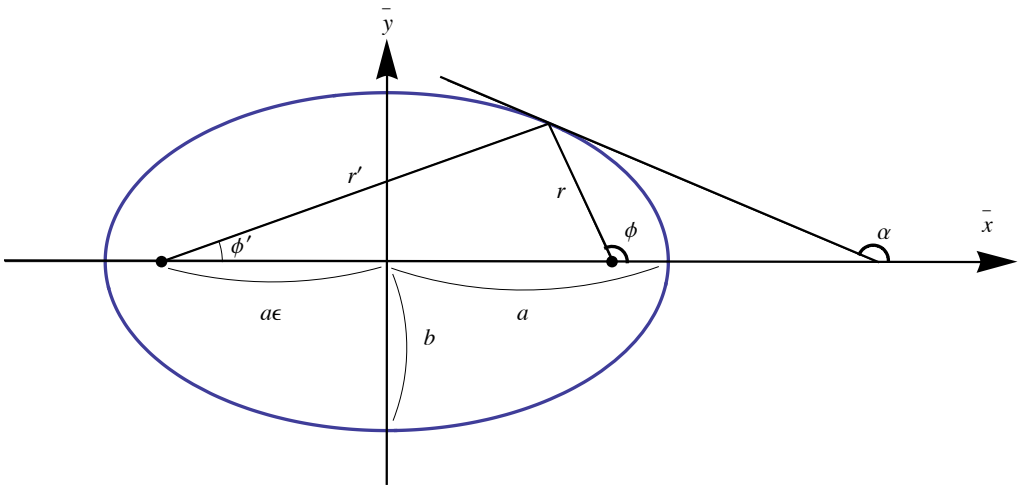


Рис. 5.1: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом α, полуоси a и b, расстояние сдвига фокуса от центра эллипса $a\epsilon$, а также полярные углы в фокусах ϕ и ϕ'.

определяющая линию зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу частицы в поле притяжения кулоновского типа, разложим радиус-вектор частицы, началом находящийся в правом фокусе эллипса, на ортогональную к импульсу компоненту $\boldsymbol{r}_\perp$ и параллельную $\boldsymbol{r}_\parallel$:

$$\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{p}^2}, \qquad \boldsymbol{r}_\parallel = \frac{\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{p}^2}. \tag{V.1.1}$$

[1]В данной главе при описании параметров движения в кулоновском поле притяжения и в потенциале изотропного гармонического осциллятора мы полагаем, что читатель уже довольно подробно разбирал траектории в этих двух случаях, например, в объеме книги [1]. Поэтому мы пользуемся результатами такого изучения, рассматривая некоторые положения как уже доказанные.

Построим другой вектор $\boldsymbol{r}''$, у которого поперечная часть сменит знак как результат зеркального отражения, а продольный вклад не изменится, т. е. мы получим вектор той же длины r

$$\boldsymbol{r}'' = -\boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel = \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{r}_\perp.$$

Тогда согласно свойствам эллипса единичный вектор, полученный при отражении радиус-вектора, исходящего из правого фокуса в точку на траектории,

$$\frac{\boldsymbol{r}''}{r}$$

направлен от точки на траектории во второй фокус эллипса. Значит, если умножить этот единичный вектор на величину $2a - r$, то получится вектор

$$\boldsymbol{r}' = (2a - r)\,\frac{\boldsymbol{r}''}{r} = \frac{2a - r}{r}\,(\boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{r}_\perp)\,.$$

Сумма длин $r + r' = 2a$, как это должно быть для суммы длин от точки на траектории до двух фокусов эллипса. Следовательно, вектор $\boldsymbol{r}'$ соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса. Поэтому суммарный вектор

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\,\frac{2a}{r} + 2\boldsymbol{r}_\perp\,\left(1 - \frac{2a}{r}\right) \tag{V.1.2}$$

соединяет правый фокус эллипса с левым (см. рис. 5.1)и имеет длину $2a\epsilon$. Безразмерный вектор

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{1}{2a}\,(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{a}\,\left(1 - \frac{2a}{r}\right) \tag{V.1.3}$$

смотрит из центра потенциала во второй фокус эллипса, имеет длину, равную эксцентриситету, и называется вектором Рунге–Ленца–Лапласа. Он сохраняется при движении частицы в поле притяжения кулоновского типа, центр которого находится в первом фокусе эллипса.

Сформулируем еще раз, почему очевидно, что этот вектор является интегралом движения. Сначала мы выбрали произвольную точку на эллипсе как траектории движения частицы в задаче Кеплера. Вектор $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ в формуле (V.1.3) выражается через текущее положение частицы, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, и текущий импульс частицы неявно через $\boldsymbol{r}_\perp$ в формуле (V.1.1). С одной стороны вектор $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ является постоянным вектором, соединяющим фокусы эллипса, так как для частицы этот эллипс является замкнутой траекторией движения, а с другой стороны этот вектор является функцией точки фазового пространства этой динамической системы, т. е. интегралом движения.

Покажем, что вектор Рунге–Ленца–Лапласа выражается через гамильтоновы переменные: вектор количества движения и радиус-вектор. Для этого проведем преобразования, заметив, что

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядом $Q = -|Z|e$ потенциал равен

$$V = \frac{Qe}{r} = -\frac{|Z|e^2}{r} = -\frac{\Lambda}{r},$$

где мы ввели обозначение $\Lambda = |Z|e^2 > 0$. Энергия частицы приведенной массы m в этом потенциале равна

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\Lambda}{r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}^2 = -2m|E|\left(1 - \frac{\Lambda}{|E|r}\right), \tag{V.1.4}$$

так как $E = -|E| < 0$, и полуось

$$a = \frac{\Lambda}{2|E|}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}_\perp = -\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}\,\frac{a}{\Lambda m}\,\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1},$$

и это выражение мы подставим теперь в формулу (V.1.2). В итоге, сохраняющийся вектор Рунге–Ленца–Лапласа принимает стандартный вид

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}\,\frac{1}{\Lambda m}. \tag{V.1.5}$$

Согласно связи параметров эллипса, по которому движется частица в поле притяжения $V = -\Lambda/r$ (см. рис. 5.1), длина вектора $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ равна эксцентриситету ϵ, поскольку расстояние между фокусами эллипса равно $2a\epsilon$, а $|\boldsymbol{\mathcal{B}}| = |\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}'|/(2a) = 2a\epsilon/(2a)$. Умножим $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ скалярно на себя в стандартной форме (V.1.5) и учтем закон сохранения энергии, принимающей отрицательные значения на замкнутой орбите $E = -|E|$ (см. связь (V.1.4)). Получаем:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^2 \equiv \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = \epsilon^2 = 1 - \frac{2|E|}{\Lambda^2 m}\, L^2.$$

Если в лагранжевой механике действие S с функцией Лагранжа L инвариантно относительно однопараметрического преобразования координат q_a и времени t_a, то согласно теореме Нётер имеет место закон сохранения наблюдаемой величины

$$\Gamma = L\,\frac{\partial t_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a\,\frac{\partial t_a}{\partial a}\right),$$

где a — параметр преобразования траектории, удовлетворяющей уравнениям Эйлера–Лагранжа. В гамильтоновой механике после перехода к переменным фазового пространства эта величина принимает вид

$$\Gamma = p\,\frac{\partial q_a}{\partial a} - H\,\frac{\partial t_a}{\partial a},$$

где H — функция Гамильтона. Тогда Γ — это генератор бесконечно малых канонических преобразований переменных фазового пространства, и эти преобразования оставляют инвариантным действие в форме Гамильтона

$$S = \int \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - H\,\mathrm{d}t,$$

в то время как преобразования координат и времени совпадают с исходными однопараметрическими преобразованиями. Таким образом, имеет место симметрия действия физической системы, при которой экстремуму действия отвечает целое однопараметрическое семейство траекторий системы. Если сохраняющихся величин несколько, то и симметрия действия становится многопараметрической, а множество генераторов симметрии — интегралов движения в рамках формализма скобки Пуассона может образовывать алгебру Ли, отвечающую группе симметрии. Важно установить, какая алгебра Ли связана с такими преобразованиями симметрии. Если это удастся сделать, то теория представлений групп Ли позволит определить характеристики физической системы, которые следуют из симметрии.

1.2 Скобки Пуассона и симметрия SO(4)

Опишем, как величины классической механики связаны с операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний частицы. Для этого мы покажем, что соотношения гамильтоновой механики в виде скобок Пуассона для сохраняющихся классических величин связаны с коммутаторами генераторов группы симметрии квантовых состояний системы при движении частицы, а именно, установим алгебру и группу Ли, отвечающую сохранению момента количества движения и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче о замкнутых орбитах финитного движения в кулоновской задаче притяжения. Тогда групповые характеристики неприводимых представлений группы позволят нам вычислить инварианты Казимира и установить их связь с наблюдаемой физической величиной — энергией движения. Дискретный спектр собственных значений операторов Казимира определит характеристики мультиплетов квантовых состояний в задаче об атоме водорода. Отметим здесь, что собственное значение оператора Казимира является идентификатором пространства неприводимого представления группы, а мультиплетом принято называть базис состояний – векторов пространства неприводимого представления.

Генераторы группы трансляций $\hat{\boldsymbol{k}} = -\mathrm{i}\nabla$ и поворотов $\hat{\boldsymbol{l}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{r}\times\nabla$, действующие на поля и Ψ-функции квантовых состояний, пропорциональны импульсу и моменту вращения. Коэффициент пропорциональности $\hbar$ имеет размерность действия, так что

$$\hbar\,\hat{\boldsymbol{k}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla \mapsto \hat{\boldsymbol{p}}, \qquad \hbar\,\hat{\boldsymbol{l}} = -\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{r}\times\nabla \mapsto \hat{\boldsymbol{L}}.$$

Численное значение постоянной Планка с чертой фиксировано в зависимости от выбора единиц измерения физических величин (см. изложение фейнмановской формулировки механики в книге [1], которому следуем в этой главе). В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории

$$\Psi(t,\boldsymbol{r}) = \exp\left\{\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,S\right\}$$

в случае, когда заданы сохраняющиеся импульс $\boldsymbol{p}$ и энергия E, а

$$\Psi_{t,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \exp\left\{\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,E\,t\right\},$$

дает эти наблюдаемые как собственные значения на этой амплитуде

$$-\mathrm{i}\hbar\nabla\,\Psi_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}\,\Psi_{\boldsymbol{p}}, \qquad -\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{r}\times\nabla\,\Psi_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{L}\,\Psi_{\boldsymbol{p}},$$

в силу уравнений Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p}, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -E.$$

Подчеркнем, что амплитуда вероятности обнаружить частицу с определенным значением импульса $\boldsymbol{p}$ в точке с координатами $\boldsymbol{r}$, т. е. $\Psi_{t,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ — это волна де Бройля.

Дирак обратил внимание на то, что, если физические величины F и G, которые определены в фазовом пространстве гамильтоновой механики, являются генераторами канонических преобразований[2], то эти классические величины связаны с операторами, которые действуют на зависящую от координат Ψ-функцию и являются генераторами $\hat f$ и $\hat g$ групповых преобразований так, что действие операторных преобразований при квантовом описании физической системы совпадает с каноническими преобразованиями величин при классическом описании. Например, классический импульс $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}$ является генератором канонических преобразований — сдвигов координат $\boldsymbol{r}$, а в квантовом случае генератором сдвига координат является оператор $\hat{\boldsymbol{f}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$. Можно ввести оператор физической величины $\hat{\boldsymbol{F}} = \hbar\hat{\boldsymbol{f}} = \hat{\boldsymbol{p}}$ — оператор квантового импульса. Для координат оператор совпадает с классической величиной: $\hat{\boldsymbol{r}} \cong \boldsymbol{r}$. Для операторных величин $\hat F$ и $\hat G$ Дирак предложил следующее утверждение: скобки Пуассона классических величин в гамильтоновой механике[3] и коммутаторы квантовых операторов связаны соотношением, которое называется каноническим квантованием,

$$\mathrm{i}\hbar\,\widehat{\{F,G\}}_{\mathrm{P}} = [\hat F, \hat G]. \tag{V.1.6}$$

В этом соотношении справа стоят квантовые операторы величин, а слева вычисляется скобка Пуассона классических величин, что также дает классическую величину, после чего эта величина преобразуется в квантовый оператор по правилам, заданным для координат и генераторов канонических преобразований, которые в гамильтоновой механике выражаются через переменные фазового пространства, т. е. через координаты и импульсы.

Такое правило канонического квантования может быть легко проверено для канонических переменных гамильтоновой механики. В самом деле,

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_{\mathrm{P}} = \delta^\alpha_\beta, \qquad [\hat r^\alpha, -\mathrm{i}\nabla_\beta]\,\Psi = \mathrm{i}\delta^\alpha_\beta\,\Psi, \quad \forall\Psi \quad \Rightarrow \quad [\hat r^\alpha, \hat p_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\delta^\alpha_\beta.$$

В декартовых координатах верхние, контравариантные и нижние, ковариантные индексы тензорных величин не отличаются, так что здесь мы будем записывать все тензорные индексы как нижние. Вычислим скобки Пуассона для компонент момента количества движения

$$\begin{aligned}
\{L_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}} &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\mu\nu}\epsilon_{\beta\mu'\nu'}\{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\mathrm{P}} = \\
&= \epsilon_{\alpha\mu\nu}\epsilon_{\beta\mu'\nu'}\left\{\frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma}\,\frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma}\,\frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma}\right\} = \\
&= \epsilon_{\alpha\mu\nu}\epsilon_{\beta\mu'\nu'}\left\{\delta_{\mu\gamma} p_\nu\, r_{\mu'}\delta_{\nu'\gamma} - r_\mu\delta_{\nu\gamma}\,\delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'}\right\} = \\
&= \epsilon_{\alpha\gamma\nu}\epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu\, r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma}\epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu p_{\nu'} = \\
&= -\delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) - r_\beta p_\alpha = \\
&= r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,L_\gamma,
\end{aligned} \tag{V.1.7}$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов группы поворотов

$$[\hat l_\alpha, \hat l_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat l_\gamma \qquad \text{или} \quad [L_\alpha, L_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma.$$

[2]Под каноническими преобразованиями подразумевают такие обратимые преобразования гамильтоновых переменных физической системы, при которых описание системы остается гамильтоновым: экстремальность действия физической системы в исходных переменных эквивалентна экстремальности действия в преобразованных гамильтоновых переменных.

[3]Приведем определение скобки Пуассона для $F = F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ и $G = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$:

$$\{F,G\}_{\mathrm{P}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha}\,\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial G}{\partial r^\alpha}.$$

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы согласно каноническому квантованию и формуле (V.1.6) определяем коммутационные соотношения для соответствующих операторов, которые связанны с классическими генераторами канонических преобразований и в то же время преобразований, являющихся симметриями системы: при этих канонических преобразованиях остаются неизменными интегралы движения. При квантовом описании генераторы симметрии задаются операторами, а коммутаторы этих операторов определяют алгебру Ли для генераторов симметрии квантовой системы. Квантовая система описывается неприводимым представлением группы симметрии. Собственные значения операторов Казимира определены неприводимым представлением группы симметрий системы при квантовом описании, и эти значения сохраняются в ходе эволюции, т. е. являются интегралами движения.

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется вектор момента количества движения $\boldsymbol{L}$, компоненты которого как генераторы задают канонические преобразования — повороты относительно центра потенциала, т. е. преобразования, образующие симметрию системы. Скобки Пуассона компонент вектора $\boldsymbol{L}$ при каноническом квантовании задают коммутаторы операторов-генераторов группы поворотов для квантовых состояний, т. е. алгебра операторов–генераторов является алгеброй группы симметрии системы.

Найдем скобки Пуассона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т. е. для момента импульса и вектора Рунге–Ленца–Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами пар физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю[4]:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})\;\frac{1}{\Lambda m}. \tag{V.1.8}$$

При переходе от классических величин к операторам эта процедура необходима, поскольку коммутатор компонент векторов количества движения и момента врещения не равен нулю

$$\{p_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma.$$

Такая симметризация композиции операторов называется упорядочением по Вейлю. Скобка Пуассона

$$\{\mathcal{B}_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{B}_\gamma, \tag{V.1.9}$$

так как $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ — вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Задача 49. Вычисите скобки Пуассона $\{\mathcal{B}_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}}$ и $\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_{\mathrm{P}}$.

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_{\mathrm{P}} = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma\,\frac{E}{\Lambda^2 m}, \tag{V.1.10}$$

где в силу закона сохранения энергии

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\Lambda}{r} = \mathrm{const}.$$

Значит, если с учетом выражения для полуоси эллипса $a = \Lambda/(2|E|)$ ввести векторы

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\sqrt{\frac{\Lambda^2 m}{2|E|}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\sqrt{ma\Lambda}, \tag{V.1.11}$$

то их скобки Пуассона равны

$$\{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma, \qquad \{\mathcal{U}_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{U}_\gamma. \tag{V.1.12}$$

[4]При переходе от классических величин к операторам необходимо сопоставлять составным физическим величинам операторы с исключительно вещественными собственными значениями, т. е. эрмитово самосопряженные операторы. В данном случае это легко достигается простой перестановкой величин, скобка Пуассона которых отлична от нуля:

$$p_\beta L_\gamma \mapsto \tfrac{1}{2}(p_\beta L_\gamma + L_\gamma p_\beta).$$

При свертке с полностью антисимметричным символом Леви-Чивиты это дает выражение, которое записано в (V.1.8),

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\beta L_\gamma \mapsto \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tfrac{1}{2}(p_\beta L_\gamma + L_\gamma p_\beta) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_\alpha.$$

Введем векторы

$$\boldsymbol{J}^{(\pm)} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{L} \pm \boldsymbol{\mathcal{U}}),$$

и вычислим скобки Пуассона для компонент

$$\{J_\alpha^{(+)}, J_\beta^{(+)}\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^{(+)}, \qquad \{J_\alpha^{(-)}, J_\beta^{(-)}\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^{(-)}, \qquad \{J_\alpha^{(+)}, J_\beta^{(-)}\}_{\mathrm{P}} = 0. \tag{V.1.13}$$

Перейдем от классических величин $\boldsymbol{J}^{(\pm)}$ к операторам $\hat{\boldsymbol{J}}^{(\pm)}$ и от скобок Пуассона (V.1.13) к коммутаторам операторов с помощью канонического квантования (V.1.6)

$$[\hat{J}_\alpha^{(+)}, \hat{J}_\beta^{(+)}] = \mathrm{i}\hbar\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{J}_\gamma^{(+)}, \qquad [\hat{J}_\alpha^{(-)}, \hat{J}_\beta^{(-)}] = \mathrm{i}\hbar\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{J}_\gamma^{(-)}, \qquad [\hat{J}_\alpha^{(+)}, \hat{J}_\beta^{(-)}] = 0. \tag{V.1.14}$$

Эти коммутационные соотношения — алгебра Ли, причем эта алгебра представляет из себя прямую сумму двух алгебр Ли: алгебра Ли для трех генераторов $\hat{J}_\alpha^{(+)}$ и алгебра Ли для трех генераторов $\hat{J}_\beta^{(-)}$, так как перекрёстные коммутаторы генераторов из двух этих алгебр равны нулю. Прямая сумма неабелевых алгебр Ли задает алгебру полупростой группы. А именно, коммутаторы генераторов каждой алгебры Ли в прямой сумме тождественны коммутаторам алгебры $\mathfrak{su}(2)$, т. е. алгебра симметрии системы — это $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$.

Покажем, что алгебра генераторов изоморфна алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(4)$. В пространстве размерности больше трех естественно описывать поворот не в терминах оси поворота, которая ортогональна плоскости поворота, а в терминах самой плоскости поворота, когда индексом генератора поворота выступает не номер оси поворота, а две оси, задающие плоскость, например, повороту от оси x к оси y в плоскости (x, y) соответствует генератор $\mathtt{L}_{xy}$. Сделаем это сначала для алгебры поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов

$$\mathtt{L}_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \qquad \mathtt{L}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \overline{\{1,3\}},$$

в точном соответствии с описанной процедурой: генератор поворота вокруг оси z — это генератор поворота от оси x к оси y, $\mathtt{L}_{xy} = \epsilon_{xyz} L_z = L_z$.

Скобка Пуассона генераторов $\mathtt{L}_{\alpha\beta}$ легко вычисляется

$$\{\mathtt{L}_{\alpha\beta}, \mathtt{L}_{\alpha'\beta'}\}_{\mathrm{P}} = g_{\alpha\alpha'}\mathtt{L}_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'}\mathtt{L}_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'}\mathtt{L}_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'}\mathtt{L}_{\alpha\beta'}, \tag{V.1.15}$$

где $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (V.1.15) эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента $\boldsymbol{L}$ [см. (V.1.7)]. Теперь можно записать обобщение генераторов поворотов на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$\mathtt{L}_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \overline{\{1,4\}}, \tag{V.1.16}$$

с такими же выражениями для скобок Пуассона:

$$\{\mathtt{L}_{\mu\nu}, \mathtt{L}_{\mu'\nu'}\}_{\mathrm{P}} = g_{\mu\mu'}\mathtt{L}_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'}\mathtt{L}_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu'}\mathtt{L}_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'}\mathtt{L}_{\mu\nu'}. \tag{V.1.17}$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины $\mathtt{L}_{\alpha\beta}$, что эквивалентно L_γ, и в дополнение к ним трехмерный вектор $\mathcal{U}_\alpha = \mathtt{L}_{\alpha 4}$, то из (V.1.17) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma, \quad \{L_\alpha, \mathcal{U}_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{U}_\gamma, \quad \{L_\alpha, L_\beta\}_{\mathrm{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma, \tag{V.1.18}$$

что совпадает с выражениями (V.1.7) и (V.1.12), которые были получены чуть выше для орбитального момента и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче финитного движения в кулоновском потенциале. Это значит, что построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о финитных траекториях в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы $\mathrm{SO}(4)$, группы поворотов в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости любой орбиты отвечает группе симметрии $\mathrm{SO}(4)$.

1.3 Представления алгебры $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и уровни энергии атома водорода

Замкнутые траектории движения в кулоновском поле притяжения, которые отвечают финитному движению, реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают $(\boldsymbol{J}^{(+)})^2 = (\boldsymbol{J}^{(-)})^2$, поскольку движение — плоское, а значит, $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$ и $(\boldsymbol{L} \pm \boldsymbol{\mathcal{U}})^2 = \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{\mathcal{U}}^2$. Покажем, что собственные

значения операторов Казимира группы симметрии, которые ограничены допустимыми дискретными значениями, отражающими выбор неприводимого представления, задают и энергию на траектории, а значит, энергия принимает дискретный набор значений, который называют спектром энергии.

Переход к представлению алгебры генераторов, т. е. к матрицам в векторном пространстве представления, осуществляется прежде всего путем введения операторов, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, полученным из скобок Пуассона. В случае финитного движения в кулоновском поле притяжения речь идет о (V.1.13) и, следовательно, о коммутаторах

$$[\hat{J}^{(+)}_\alpha, \hat{J}^{(+)}_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}^{(+)}_\gamma, \qquad [\hat{J}^{(-)}_\alpha, \hat{J}^{(-)}_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}^{(-)}_\gamma, \qquad [\hat{J}^{(+)}_\alpha, J^{(-)}_\beta] = 0. \tag{V.1.19}$$

Спектр собственных значений для полного набора наблюдаемых $\widehat{\boldsymbol{J}^2}$ и $\hat{J}_z$ в алгебре $\mathfrak{su}(2)$ нам хорошо известен:

$$\widehat{\boldsymbol{J}^2} \mapsto \hbar^2 j(j+1), \qquad \hat{J}_z \mapsto \hbar m, \quad m \in \overline{\{-j, j\}}.$$

При этом, как мы уже подчеркнули, для нашего случая реализуются только представления

$$\left(\hat{\boldsymbol{J}}^{(+)}\right)^2 = \left(\hat{\boldsymbol{J}}^{(-)}\right)^2 \mapsto \hbar^2 j(j+1), \qquad j = \frac{1}{2}\,k, \quad k \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

Покажем, как собственное значение j связано с собственным значением гамильтониана. Запишем оператор $\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ в виде

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}\right)\frac{1}{\Lambda m} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}\right)\frac{1}{\Lambda m}, \tag{V.1.20}$$

где мы воспользовались значением коммутатора количества движения с моментом вращения

$$[\hat{p}_\gamma, \hat{L}_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\beta\gamma\alpha_1}\hat{p}_{\alpha_1}$$

и связью

$$(\hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\beta\hat{p}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\hat{p}_\gamma\hat{L}_\beta + \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\beta\gamma\alpha_1}\hat{p}_{\alpha_1}) = -(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}})_\alpha + 2\mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}_\alpha.$$

При вычислении «квадрата векторного оператора» $\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^2 = \hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ возникнут отличные от классических вклады. Поэтому аккуратно учтем все члены. Например,

$$(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}})^2 \equiv (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) = (\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta)\,(\epsilon_{\gamma\alpha'\beta'}\hat{p}_{\alpha'}\hat{L}_{\beta'}) = \hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta\hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta - \hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta\hat{p}_\beta\hat{L}_\alpha = \hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta\hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta$$

с учетом того, что движение происходит в плоскости, ортогональной орбитальному моменту, а это значит, что $\hat{L}_\beta\hat{p}_\beta = \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = 0$. Далее,

$$\hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta\hat{p}_\alpha\hat{L}_\beta = \hat{\boldsymbol{p}}^2\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hat{p}_\alpha\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\hat{p}_\gamma\hat{L}_\beta = \hat{\boldsymbol{p}}^2\hat{\boldsymbol{L}}^2,$$

и мы приходим к классическому выражению. Однако, перекрестный член со смешанным произведением

$$(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) = (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \cdot \hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}$$

содержит вклады

$$(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{p}_\alpha(\hat{p}_\gamma\hat{L}_\beta + \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{\beta\gamma\alpha_1}\hat{p}_{\alpha_1}) = 2\mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}^2.$$

Следовательно,

$$\left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}\right)^2 \equiv \left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}\right) = \hat{\boldsymbol{p}}^2\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hbar^2\hat{\boldsymbol{p}}^2.$$

Аналогично можно найти, что

$$\frac{1}{r}\,(\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) + (\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{r})\,\frac{1}{r} = \frac{2}{r}\,(\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) + \frac{1}{r}(-\mathrm{i}\hbar)(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\frac{1}{r} = \frac{2}{r}\,(\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) - 2\mathrm{i}\hbar\,\frac{1}{r},$$

а

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{r} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) + (\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}}) \cdot \boldsymbol{r}\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r}(\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \cdot \hat{\boldsymbol{L}} + \left\{ -\hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}} + 2\mathrm{i}\hbar\,\hat{\boldsymbol{p}}\right\} \cdot \boldsymbol{r}\,\frac{1}{r} = \frac{2}{r}\,\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \mathrm{i}\hbar\,\frac{2}{r}\,(\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) + \frac{4\hbar^2}{r}.$$

Приводя подобные слагаемые, находим

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^2 = 1 + \frac{2}{\Lambda^2 m}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} - \frac{\Lambda}{r}\right)\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \frac{\hbar^2}{\Lambda^2 m^2}\left(\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \frac{2\Lambda m}{r}\right) = 1 + \frac{2E}{\Lambda^2 m}\,\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \frac{2\hbar^2 E}{\Lambda^2 m}. \tag{V.1.21}$$

В (V.1.21) можно выделить классический и квантовый вклады в явном виде по наличию фактора $\hbar^2$.

В итоге мы вычислили квадрат оператора

$$\hat{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}^2 = \hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^2 \frac{\Lambda^2 m}{2|E|} = \frac{\Lambda^2 m}{2|E|} - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hbar^2, \tag{V.1.22}$$

а значит,

$$\frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hat{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\Lambda^2 m}{2|E|} - \hbar^2\right).$$

Но поскольку

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hat{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}^2) = \left(\hat{\boldsymbol{J}}^{(+)}\right)^2 = \left(\hat{\boldsymbol{J}}^{(-)}\right)^2,$$

находим, что

$$E = -\frac{\Lambda^2 m}{2\hbar^2}\,\frac{1}{(2j+1)^2}. \tag{V.1.23}$$

Введем «главное квантовое число» как $n = 2j + 1$ (см. [10]) и постоянную тонкой структуры

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{\hbar c},$$

где c — скорость света, и тогда спектр водородоподобного атома с ядром, которое имеет заряд $-Z$ в единицах заряда электрона e, задается формулой

$$E = -\frac{Z^2}{2n^2}\, mc^2 \alpha_{\text{em}}^2. \tag{V.1.24}$$

Выражение (V.1.24) было получено Вольфгангом Паули в рамках матричной квантовой механики и опубликовано за 10 дней до выхода в свет статьи Эрвина Шредингера с тем же результатом, полученным уже в волновой механике из уравнения Шрёдингера.

Мы показали, что дискретная часть спектра энергии в атоме водорода может быть установлена в результате рассмотрения группы симметрии финитного движения в кулоновском поле притяжения.

Укажем также допустимые значения орбитального момента. Поскольку

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{J}}^{(+)} + \hat{\boldsymbol{J}}^{(-)},$$

орбитальный момент вычисляется как сумма двух моментов. Поэтому орбитальный момент как индекс L собственных значений квадрата момента вращения $L(L+1)$ может принимать значения в пределах[5]

$$L \in [|J^{(+)} - J^{(-)}|, J^{(+)} + J^{(-)}]$$

с шагом, равным единице, $\Delta L/\hbar = 1$. Но так как реализуются только представления с $J^{(+)} = J^{(-)} = \hbar j$, а $2j = n - 1$, находим, что

$$\frac{1}{\hbar}\,L = \ell \in [0, n-1], \qquad \frac{1}{\hbar}\Delta L = 1.$$

При этом энергия уровней зависит только от главного квантового числа, и, следовательно, можно вычислить вырождение уровня энергии по проекциям орбитального момента как сумму арифметической прогрессии для $2\ell + 1$ возможных проекций при заданном $\ell = L/\hbar$,

$$K = \sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = \frac{1}{2}\,n(1 + 2(n-1) + 1) = n^2.$$

Интересно, что такой групповой вывод спектра атома водорода поднимает вопрос о природе пространства представлений группы симметрии. На этот вопрос дал ответ Э.Шредингер, а именно, он установил соответствие матричной квантовой механики и волновой механики: матричные представления действуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний, которые можно описывать и волновыми функциями. До появления волновой механики авторы матричной квантовой механики Вернер Гейзенберг, Макс Борн и Паскуаль Йордан обратились к Давиду Гильберту с вопросом, в каких обстоятельствах могут появляться матрицы операторов, на что Гильберт сказал, что для этого нужно иметь

[5]Решите эту задачу самостоятельно методом построения схем Юнга в группе SU(2). .

волновое уравнение, имеющее дискретный базис решений, которые и будут определять действие операторов в подобном базисе. Однако такой ответ поставил в тупик создателей матричной механики, поскольку они полагали, что квантовые скачки с уровня на уровень, которые наблюдались экспериментально в виде спектров излучения и поглощения в парах водорода и других газов, никак не могут описываться непрерывным волновым уравнением. Как видим, недоверие к рекомендации Гильберта лишило их возможности найти решение вопроса о пространстве представлений матричной механики. Подчеркнем, что и сам создатель волновой квантовой механики Э.Шредингер весьма скептически относился к описанию квантовых скачков своим волновым уравнением, в чем находил поддержку у основоположников квантовой физики, таких как Макс Планк и Альберт Эйнштейн. Только идея Макса Борна о том, что волновое уравнение описывает не материальное поле, а амплитуду вероятности обнаружить физическую систему в квантовом состоянии, позволяет разрешить логические проблемы волнового уравнения в квантовой механике, но именно эту интерпретацию не принимали ни Шредингер, ни Планк, ни Эйнштейн, что весьма удручало Нильса Бора.

§2. Изотропный гармонический осциллятор в 3D

Эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа SU(3) как матричная группа преобразований трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна. Сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, трехмерный вектор и квинтет по группе поворотов, разложение тензора на синглет и октет по группе SU(3). Переход от скобок Пуассона к коммутаторам наблюдаемых, вычисление квадратичного инварианта Казимира и спектр энергии изотропного осциллятора, число состояний и невырожденность вакуума, действие операторов амплитуды колебаний на состояние с наименьшей энергией, ограничение на неприводимые представления группы симметрии изотропного осциллятора в пространстве, четность главного квантового числа и допустимые значения орбитального момента в неприводимом представлении.

2.1 Комплексная амплитуда колебаний и группа SU(3)

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой ω, массой m и функцией Гамильтона

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \boldsymbol{r}^2}{2} \tag{V.2.1}$$

принято вводить комплексный вектор амплитуды (3-столбец)

$$\boldsymbol{A} = m\omega\, \boldsymbol{r} + \mathrm{i}\, \boldsymbol{p}. \tag{V.2.2}$$

Уравнения эволюции этих векторов с учетом силы упругости $\boldsymbol{F} = -\nabla(m\omega^2\boldsymbol{r}^2/2) = -m\omega^2\boldsymbol{r}$ могут быть выведены из уравнений Гамильтона

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}, \tag{V.2.3}$$

так что

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}.$$

Уравнение для амплитуды принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = m\omega\, \frac{\boldsymbol{p}}{m} - \mathrm{i}\, m\omega^2 \boldsymbol{r} = -\mathrm{i}\,\omega\, \boldsymbol{A}$$

и легко интегрируются

$$\boldsymbol{A}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \boldsymbol{A}_0. \tag{V.2.4}$$

При этом введение комплексно сопряженной величины

$$\boldsymbol{A}^* = m\omega\, \boldsymbol{r} - \mathrm{i}\, \boldsymbol{p} \tag{V.2.5}$$

позволяет записать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2m}\, \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}, \tag{V.2.6}$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов

$$\boldsymbol{A}' = U \cdot \boldsymbol{A}, \qquad A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha,$$

с матрицами U, которые сохраняют вещественный квадрат длины вектора

$$(\boldsymbol{A}')^* \cdot \boldsymbol{A}' = \left(U_{\beta\alpha_1} A_{\alpha_1}\right)^* U_{\beta\alpha_2} A_{\alpha_2} = \left(U^{\mathrm{T}}_{\alpha_1\beta} A_{\alpha_1}\right)^* U_{\beta\alpha_2} A_{\alpha_2} = \boldsymbol{A}^*\, U^\dagger \cdot U\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A} \tag{V.2.7}$$

при условии

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}. \tag{V.2.8}$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (V.2.8), найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1.$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора $\boldsymbol{A}$, что согласно (V.2.4) отвечает смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице U, потребовав

$$\det U = 1. \tag{V.2.9}$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матриц, что обозначают символом группы SU(3).

Проиллюстрируем ситуацию на более простом примере группы SU(2). Элементы группы SU(2) при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\right\},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а $\boldsymbol{\phi}$ — вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц Паули следует из требования унитарности $g^\dagger \cdot g = \mathbb{1}$. Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия

$$\det g = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{tr}\;\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\right\} = 1.$$

При этом параметры $\boldsymbol{\phi}$ имеют физический смысл углов поворота в трехмерном евклидовом пространстве координат, если матрицы Паули нормированы так, что

$$\mathrm{tr}\;\sigma_a\sigma_b = 2\delta_{ab}. \tag{V.2.10}$$

Число параметров группы SU(3), u^a в полной аналогии с рассуждениями для группы SU(2) определяется числом эрмитовых бесследовых матриц 3×3, которое равно 8. Базис таких матриц можно выбирать в виде матриц Гелл-Манна λ_a, $a \in \left\{\overline{1,8}\right\}$, так что

$$U = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{u}\right\},$$

причем

$$\mathrm{tr}\;\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab} \tag{V.2.11}$$

так же, как у матриц Паули, а это значит, что параметры $\boldsymbol{u}$ также имеют смысл «углов поворота» в пространстве комплексных трехмерных векторов. Более развернутое изложение построения фундаментальных представлений групп SU(2) и SU(3) проведено в главе 3.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя миноры в форме недиагональных матриц σ_1 и σ_2 по парам значений индексов (в декартовых координатах евклидова пространства не делаем различия между верхними и нижними индексами):
по значениям 1 и 2

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

по значениям 1 и 3

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

по значениям 2 и 3

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Плюс две диагональные матрицы:
минор σ_3 по значениям 1 и 2

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

и диагональная эрмитова матрица с нулевым следом

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

которая удовлетворяет условию ортонормированности (V.2.11) вместе с предыдущими семью матрицами $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$.

Как и следовало ожидать для простой компактной группы второго ранга[6] SU(3), лишь две матрицы, λ_3 и λ_8 принадлежат подалгебре Картана и представлены в диагональном виде в совместном для этих матриц базисе собственных векторов, а другие шесть матриц задают генераторы корневого дополнения алгебры $\mathfrak{su}(3)$. Старший вектор всякого неприводимого представления этой группы характеризуется двумя независимыми числами, которые определяют и два независимых оператора Казимира: однородные полиномы по генераторам, коммутирующие со всеми генераторами группы. Собственные значения генераторов подалгебры Картана составляют дискретный набор вещественных чисел, который определяется представлением группы. Отметим, что по аналогии с матрицами спина можно построить из шести генераторов корневого дополнения подалгебры Картана три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим понижающих матрицы. Корневое дополнение подалгебры Картана состоит из шести недиагональных матриц Гелл-Манна.

Коммутационные соотношения для генераторов группы SU(3) можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[\tfrac{1}{2}\,\lambda_a, \tfrac{1}{2}\,\lambda_b\right] = \mathrm{i}\, f_{abc}\, \tfrac{1}{2}\,\lambda_c. \tag{V.2.12}$$

Константы f_{abc} приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов $\boldsymbol{A}$:

$$A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha, \qquad U \in \mathrm{SU}(3). \tag{V.2.13}$$

Это означает, что компоненты трехмерного комплексного вектора A_α преобразуется как компоненты триплетого фундаментального представления 3 по группе SU(3), а комплексно сопряженные компоненты A^*_α как компоненты второго фундаментального представления этой же группы — антитриплета $\bar{3}$ по SU(3), что заметно упрощает понимание последующих построений неприводимых представлений состояний гармонического осциллятора по общему формализму тензорных произведений фундаментальных представлений группы с использованием схем Юнга, если перейти от классических величин $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^*$ к операторам, действующим в пространстве состояний гармонического осциллятора. Соответствующий оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ будем называть триплетным оператором, а $\hat{\boldsymbol{A}}^\dagger$ — антитриплетным.

2.2 Тензор Фрадкина

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения — эллипс, но в отличие от кулоновского случая центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак, у нас есть пара векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица, которая переводит вектор в вектор, т. е. сохраняющаяся матрица — это тензор второго ранга.

[6] Понятие ранга вводится в основной части курса алгебр Ли.

Такой тензор можно построить в терминах векторов $\boldsymbol{A}$: рассмотрим величину

$$F_{\alpha\beta} = A^*_\alpha A_\beta$$

которая является тензором при действии группы поворотов в трехмерном пространстве, когда величина $F_{\alpha\beta}$ по каждому из индексов «альфа» и «бета» преобразуется матрицами поворотов. Более того, эта же величина $F_{\alpha\beta}$ по каждому из индексов «альфа» и «бета» преобразуется как тензор другими матрицами — матрицами преобразований триплетного и антитриплетного представлений по группе SU(3), т. е. как тензор, построенный при тензорном произведении комплексного вектора и комплексносопряженного вектора. При этом в силу уравнений движения $A_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}A_\alpha(0)$ и $A^*_\alpha(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}A^*_\alpha(0)$ значение тензора не зависит от времени, он сохраняется. По построению в виде тензорного произведения триплета на антитриплет в группе SU(3) величина $F_{\alpha\beta}$ имеет девять независимых компонент, свойства которых относительно преобразований группы SU(3) легко описать в терминах схем Юнга, которые мы детально рассмотрели в главе 3, **§ 6. Тензорный метод и схемы Юнга**: $F_{\alpha\beta} \mapsto \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ по SU(3), где указана мультиплетность неприводимых представлений по группе SU(3): прямая сумма синглета и октета. Первое слагаемое в прямой сумме — это инвариант группы SU(3): след тензора — синглет,

$$\operatorname{tr} F = F_{\alpha\alpha} = 2mE \quad \text{согласно (V.2.6).}$$

Таким образом, энергия пропорциональна инварианту, который задается следом тензора $F_{\alpha\beta}$. Интересно, что след инвариантен как относительно преобразований группы SU(3), так и относительно группы поворотов в пространстве.

Рассмотрим теперь свойства $F_{\alpha\beta}$ относительно группы поворотов и запишем его, выделив антисимметричный вклад,

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = \mathrm{i}\, m\omega\{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = \mathrm{i}\, m\omega\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$$

и симметричный бесследовый вклад — бесследовая часть тензора Фрадкина,

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\, 2mE = p_\alpha p_\beta + m^2\omega^2 r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\, 2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\, 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}.$$

Мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов SO(3), разложение тензорного произведения двух триплетов в прямую сумму неприводимых пространств размерности $2s+1$: 1 (синглет, спин $s=0$), 3 (триплет или вектор, спин $s=1$) и 5 (квинтет, спин $s=2$), т. е.

$$\mathrm{SO}(3): \qquad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Мультиплетность равна числу базисных собственных векторов проекции спина на выбранную ось для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет — сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того, чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} \equiv p_\alpha p_\beta + m^2\omega^2 r_\alpha r_\beta.$$

Заметим сначала, что движение плоское

$$S_{\alpha\beta} L_\beta = 0.$$

Такой тензор принято называть поперечным: если выбрать оси координат так, что отличный от нуля вектор момента вращения $\boldsymbol{L}$ направлен вдоль оси z, $\boldsymbol{L} \uparrow\uparrow z$, то все отличные от нуля компоненты поперечного тензора $S_{\alpha\beta}$ несут индексы x или y в плоскости, ортогональной оси z, заданной направлением вектора момента вращения. При таком выборе осей координат тензор Фрадкина, если его записать в виде квадратной матрицы размером 3×3 в декартовых координатах, вырождается в тензор 2×2 на плоскости декартовых координат (x,y), так как все его компоненты с индексом z обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \hat{S} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2\omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2\omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2\omega^2 xy & p_y p_y + m^2\omega^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку секулярное уравнение на собственные значения[7] матрицы Σ имеет вид

$$\det(\Sigma - \lambda\cdot\mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda(\boldsymbol{p}^2 + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2) + m^2\omega^2(xp_y - yp_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2\omega^2L^2 = 0,$$

то собственные значения этой матрицы

$$\lambda_\pm = mE\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2L^2}{E^2}}\right) \quad\Rightarrow\quad \lambda_+ = \frac{L^2}{a^2}, \qquad \lambda_- = \frac{L^2}{b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса, который задает траекторию движения изотропного осциллятора[8]. Тогда собственные векторы можно найти в явном виде при выборе начальных данных движения с учетом того, что матрица Σ сохраняется по времени, поскольку она была построена нами из сохраняющегося тензора $F_{\alpha\beta}$ вычитанием антисимметричной части $a_{\alpha\beta}$, которая построена из символа Леви-Чивиты и компонент момента вращения, которые также сохраняются. Так, если выбрать в исходный момент времени положение осциллятора так, что $y = 0$, $p_x = 0$, т. е. частица находится на оси x и движется ортогонально этой оси, а $p_y = p$, и положить координату x равной значению полуоси $x = a$ и $L = ap$, т. е. выбрать эллипс с полуосями по x и y, то

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m^2\omega^2a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}.$$

Однако в силу установленной нами связи собственных значений и полуосей

$$\lambda_+\cdot\lambda_- = \frac{L^4}{a^2b^2} = m^2\omega^2L^2$$

найдем, что

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{a^2} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \Sigma - \lambda_+\cdot\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{b^2} - \frac{L^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{a^2} - \frac{L^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{b^2} - \frac{L^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также в силу $L = ab\,m\,\omega$

$$\Sigma - \lambda_-\cdot\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{b^2} - \frac{L^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{a^2} - \frac{L^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{a^2} - \frac{L^2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения – эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей. В силу сохранения тензора Фрадкина остаются неизменными по времени и собственные векторы — направления полуосей эллипса, образованного траекторией движения осциллятора, а также и собственные значения собственных векторов, выраженных через полуоси эллипса, как и следовало ожидать для кривой траектории, которая является замкнутой и неизменной по времени для потенциала изотропного трехмерного осциллятора.

Теперь рассмотрим тензор F относительно преобразований группы SU(3), а именно, как прямую сумму неприводимых представлений группы SU(3): синглета и октета. Вектор A_α реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы SO(3) или SU(2), для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны $(2s+1)^* \cong (2s+1)$, в группе SU(3) комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например, $3^* = \bar{3} \ncong 3$, т. е. вектор A^*_β реализует независимое представление[9]. При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$\mathrm{SU}(3): \qquad \bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{8},$$

[7] Собственные значения традиционно обозначены буквой λ, которую следует отличать по смыслу от такого же символа для матриц Гелл-Манна.

[8] Мы полагаем, что параметры такого движения были детально рассмотрены ранее в курсах механики, где определены связи полуосей эллипса с интегралами движения: энергией и моментом вращения частицы.

[9] Речь идет о двух фундаментальных представлениях группы SU(3), которые являются комплексно сопряженными, а именно, $\mathtt{T}^{(1,0)}$ и $\mathtt{T}^{(0,1)}$.

т. е. тензор F раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы SU(3). Очевидно, что синглет, т. е. инвариант, пропорционален единичной матрице, и это след тензора, т. е. фактически энергия с точностью до постоянных множителей. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F_a = \frac{1}{4m\omega}\,(\lambda_a)_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4m\omega}\,(\lambda_a)_{\alpha\beta}\Big(F_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,F_{\gamma\gamma}\Big). \tag{V.2.14}$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна $(\lambda_a)_{\alpha\beta}$ бесследовые, след тензора $F = F_{\gamma\gamma}$ не дает вклада в вектор F_a. Введенный вектор имеет размерность действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F_a, F_b\}_{\mathrm{P}} = f_{abc}\,F_c, \tag{V.2.15}$$

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие F_a, реализуют присоединенное, октетное представление генераторов группы SU(3).

Задача 50. Вычислите скобки Пуассона $\{F_a, F_b\}_{\mathrm{P}}$.

Итак, Замкнутость эллиптических орбит осциллятора при любых начальных данных обусловлена наличием симметрии SU(3).

2.3 Представления $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора

Не все представления группы SU(3) реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской: $L_\alpha s_{\alpha\beta} \equiv 0$. Докажем, что состояния изотропного гармонического 3-мерного осциллятора принадлежат исключительно представлениям типа $\mathtt{T}^{(n,0)}$ или $\mathtt{T}^{(0,n)}$.

Перейдем к деталям. Вычисленные скобки Пуассона для F_a задают коммутаторы соответствующих операторов

$$[\hat{F}_a, \hat{F}_b] = \mathrm{i}\hbar\, f_{abc}\hat{F}_c.$$

Поэтому введем генераторы SU(3)-симметрии

$$\Gamma_a = \frac{1}{\hbar}\,\hat{F}_a = \frac{1}{4m\hbar\omega}\,\hat{A}^\dagger_\alpha(\lambda_a)_{\alpha\beta}\hat{A}_\beta, \tag{V.2.16}$$

которые уже удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям группы SU(3).

Затем вычислим квадратичный оператор Казимира — инвариант

$$C_2 = \Gamma_a\Gamma_a,$$

используя коммутационные соотношения для ключевых операторов $\hat{A}_\alpha = m\omega r_\alpha + \mathrm{i}\hat{p}_\alpha$, а именно,

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta] = \mathrm{i}m\omega([r_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) \equiv 0, \qquad [\hat{A}^\dagger_\alpha, \hat{A}^\dagger_\beta] = -\mathrm{i}m\omega([r_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) \equiv 0, \tag{V.2.17}$$

в силу $[r_\alpha, \hat{p}_\beta] = \mathrm{i}\hbar\,\delta_{\alpha\beta}$, а также

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}^\dagger_\beta] = -\mathrm{i}m\omega([r_\alpha, \hat{p}_\beta] - [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) = 2m\,\hbar\omega\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{V.2.18}$$

Тогда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_{\alpha'}\hat{A}_{\beta'}(\lambda_a)_{\alpha\beta}(\lambda_a)_{\alpha'\beta'} = \hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_{\alpha'}\hat{A}_{\beta'}\left(2\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta} - \frac{2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}\right),$$

где мы воспользовались тождеством Фирца для матриц Гелл-Манна (III.4.54). Отсюда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = 2\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_\beta\hat{A}_\alpha - \frac{2}{3}\,\left(\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha\right)\cdot\left(\hat{A}^\dagger_{\alpha'}\hat{A}_{\alpha'}\right) \equiv 2\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_\beta\hat{A}_\alpha - \frac{2}{3}\,\left(\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha\right)^2.$$

Далее,

$$\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_\beta\hat{A}_\alpha = \hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\beta(\hat{A}_\alpha\hat{A}^\dagger_\beta - 2m\,\hbar\omega\,\delta_{\alpha\beta}) = (\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha)\hat{A}_\beta\hat{A}^\dagger_\beta - 2m\,\hbar\omega\,(\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha) = (\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha)\left(\hat{A}^\dagger_\beta\hat{A}_\beta + 4m\,\hbar\omega\right).$$

Суммируя, найдем

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \frac{4}{3}\,\left(\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha\right)^2 + 8m\,\hbar\omega\left(\hat{A}^\dagger_\alpha\hat{A}_\alpha\right).$$

Величина $\hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\alpha$ связана с энергией, как собственным значением гамильтониана на его собственных состояниях

$$\hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\alpha = m^2\omega^2 r^2 + \hat{p}^2 + \mathrm{i}m\omega\{\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r}\} = 2m\hat{H} - 3m\,\hbar\omega \;\mapsto\; 2mE - 3m\,\hbar\omega.$$

Значит, квадратичный инвариант Казимира на собственных состояниях гамильтониана принимает значения

$$C_2 = \frac{1}{\hbar^2\omega^2}\frac{1}{3}\left(E - \frac{3}{2}\,\hbar\omega\right)^2 + \frac{1}{\hbar\omega}\left(E - \frac{3}{2}\,\hbar\omega\right), \tag{V.2.19}$$

что следует сравнить с допустимыми значениями этого инварианта для представления $\mathtt{T}^{(\tilde{n},n)}$ согласно (III.4.66)

$$C_2 = \frac{1}{3}(n^2 + \tilde{n}^2 + n\tilde{n}) + n + \tilde{n}.$$

Но это значит, что либо $\tilde{n} = 0$, либо $n = 0$, а спектр является эквидистантным и зависит от единственного квантового числа,

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right). \tag{V.2.20}$$

Состояние с минимальной энергией принято называть вакуумом $|0\rangle$. Вакуум согласно своему значению квадратичного оператора Казимира C_2, приведенному выше, может отвечать представлению $\mathtt{T}^{(\tilde{n},n)}$ группы SU(3), в котором $n = \tilde{n} = 0$. При этом вакуум является инвариантным синглетным представлением.

Согласно общей процедуре описания неприводимых представлений группы SU(3) состояния с определенным значением квадратичного оператора Казимимра C_2, и, следовательно, энергии осциллятора E изоморфны компонентам тензора[10] $\mathcal{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots;\beta_1\ldots\beta_i\ldots}$, симмметричного по триплетным индексам β_i и антитриплетным индесам α_j, а также с равным нулю следом по любой паре триплетного и антитриплетного индексов. Симметризацию по каждому сорту индексов можно получить в силу того, что операторы $\hat{A}_\alpha$ коммутируют между собой, как и операторы $\hat{A}^\dagger_\alpha$. Число триплетных индексов неприводимого представления $\mathtt{T}^{(\tilde{n},n)}$ группы SU(3) равно $\tilde{n}$, а антитриплетных — n. Состояния мультиплета неприводимого представления получаются действием триплетных и антитриплетных операторов на вакуум (см. обсуждение на стр. 284 после формулы (V.2.13) и операторные соотношения в (V.2.17))), поскольку тогда такие состояния относительно преобразований группы SU(3) изоморфны компонентам мультиплета, которые мы отождествляем с компонентами тензора $\mathcal{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots;\beta_1\ldots\beta_i\ldots}$. Подчеркнем, что триплетные и антитриплетные операторы действуют не внутри мультиплета (неприводимого представления), а между разными неприводимыми представлениями. В то время как генераторы группы Γ_a согласно (V.2.16) составлены из композиций триплетных и антитриплетных операторов. В рамках такой связи неприводимых представлений с действием триплетных и антитриплетных операторов на вакуум рассмотрим вопрос о том, какие представления реализуются в случае изотропного осциллятора.

По общей формуле для неприводимых представлений, скажем, $\mathtt{T}^{(0,n)}$ группы SU(3) число состояний

$$k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

и вакуум, в котором $n = 0$, описывается единственным состоянием $|0\rangle$, а также имеет место соотношение

$$\left(E_{\mathrm{vac}} - \frac{3}{2}\,\hbar\omega\right)|0\rangle = \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\alpha |0\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0|\hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\alpha|0\rangle = (\hat{A}_\alpha|0\rangle)^\dagger \hat{A}_\alpha|0\rangle = \langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = 0,$$

а значит, норма вектора $|\psi_\alpha\rangle \equiv \hat{A}_\alpha|0\rangle$ тождественно равна нулю для любого «альфа» потому, что сумма положительных квадратов длины всех трех $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ и $|\psi_3\rangle$ равна нулю, т. е. для любого «альфа»

$$\hat{A}_\alpha|0\rangle \equiv 0. \tag{V.2.21}$$

Это нетривиальное (простое и важное) тождество позволяет однозначно определить неприводимое представление в пространстве, содержащем $|0\rangle$, а также допустимые значения орбитального момента в этих

[10] В этом параграфе триплетные и антитриплетные индексы по группе SU(3) мы записываем снизу, поскольку они являются еще и тензорными индексами группы SO(3) в базисе декартовых координат, когда верхние и нижние индексы эквивалентны.

представлениях. Например, мультиплет триплетного представления $\mathtt{T}^{(\tilde{1},0)}$ изоморфен результату действия триплетного оператора $\hat{A}_\alpha$ на синглетное состояние $|0\rangle$, но согласно (V.2.21) все базисные состояния этого представления в случае изотропного осциллятора равны нулю. Аналогично мультиплет неприводимого представления $\mathtt{T}^{(\tilde{2},0)}$ изоморфен результату действия произведения триплетных операторов $\hat{A}_\alpha$ и $\hat{A}_\beta$ на синглетное состояние $|0\rangle$, но

$$\mathtt{T}^{(\tilde{2},0)} \cong T_{\alpha\beta} \cong \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta |0\rangle \equiv 0,$$

и все базисные состояния этого представления в случае изотропного осциллятора равны нулю.

Отсюда следует, что в пространстве состояний изотропного осциллятора с вакуумом $|0\rangle$ представление $\mathtt{T}^{(\tilde{n},0)}$ не реализуется при $n > 0$, поскольку оно получается действием на вакуум симметричным по перестановкам индексов произведением коммутирующих друг с другом триплетных операторов $\hat{A}_\alpha$, что дает тождественный нуль.

Симметризованные бесследовые произведения вида

$$\hat{\mathcal{O}}_{\alpha\beta} \equiv \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\beta + \hat{A}_\beta \hat{A}^\dagger_\alpha - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}(\hat{A}^\dagger_\gamma \hat{A}_\gamma + \hat{A}_\gamma \hat{A}^\dagger_\gamma),$$

которые могли бы давать вклад в $\mathtt{T}^{(1,1)}$ при действии на $|0\rangle$, тоже исключены. С помощью коммутационных соотношений

$$\hat{A}_\beta \hat{A}^\dagger_\alpha = \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\beta + \delta_{\alpha\beta} 2m\,\hbar\omega, \qquad \hat{A}_\gamma \hat{A}^\dagger_\gamma = \hat{A}^\dagger_\gamma \hat{A}_\gamma + 3 \cdot 2m\,\hbar\omega$$

триплетные операторы можно разместить справа, что занулит их действие на вакуумное состояние,

$$\Big(2\hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}_\beta - \tfrac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\hat{A}^\dagger_\gamma \hat{A}_\gamma\Big)|0\rangle \equiv 0,$$

а разница, которая возникнет при такой коммутации является синглетом, и в силу нулевого следа оператора $\hat{\mathcal{O}}_{\alpha\beta}$ также не даст вклада, так как все члены с $\delta_{\alpha\beta}$ сократятся:

$$\hat{\mathcal{O}}_{\alpha\beta}|0\rangle = \delta_{\alpha\beta}\Big(2m\,\hbar\omega - \frac{1}{3}\,3 \cdot 2m\,\hbar\omega\Big)|0\rangle \equiv 0.$$

Значит, в пространстве кет-векторов остаются только представления $\mathtt{T}^{(0,n)}$, которые получаются действием симметризованных по индексам произведений антитриплетных операторов $\hat{A}^\dagger_\alpha$ на кет-вакуум $|0\rangle$. Это согласуется с вычислением квадратичного инварианта Казимира, которое мы провели выше. Например, неприводимое представление $\mathtt{T}^{(0,1)}$ — векторное пространство суперпозиций антитриплета $|\psi_\alpha\rangle = \hat{A}^\dagger_\alpha|0\rangle$. Неприводимое представление $\mathtt{T}^{(0,2)}$ — векторное пространство суперпозиций симметричного тензора второго ранга, полученного как $|\psi_{\alpha\beta}\rangle = \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}^\dagger_\beta|0\rangle$.

В этой же логике становится совершенно ясно, что представления $\mathtt{T}^{(n,0)}$ описывают ровно те же состояния в сопряженном пространстве, которое содержит сопряженный вакуум $\langle 0|$: неприводимые представления $\mathtt{T}^{(n,0)}$ реализуются в пространстве бра-векторов. Например, неприводимое представление $\mathtt{T}^{(1,0)}$ образовано суперпозициями триплета $\langle\psi_\alpha| = \langle 0|\hat{A}_\alpha$, который эрмитово сопряжен антитриплету $|\psi_\alpha\rangle = \hat{A}^\dagger_\alpha|0\rangle$,

$$\langle\psi_\alpha| = \langle 0|\hat{A}_\alpha = \big(A^\dagger_\alpha|0\rangle\big)^\dagger.$$

Неприводимое представление $\mathtt{T}^{(2,0)}$ образовано суперпозициями

$$\langle\psi_{\alpha\beta}| = \langle 0|\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta = \big(\hat{A}^\dagger_\beta \hat{A}^\dagger_\alpha|0\rangle\big).$$

Условие плоского движения $\hat{L}_\alpha \hat{A}^\dagger_\alpha = \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{L}_\alpha = 0$ выполняется для представлений $\mathtt{T}^{(0,n)}$, поскольку антитриплетные операторы коммутируют между собой, так что оператор с нужным индексом может быть перемещен влево и его свертка с орбитальным моментом даст нуль. Например,

$$\hat{L}_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \hat{L}_\alpha \hat{A}^\dagger_\alpha|0\rangle = 0,$$

и

$$\hat{L}_\alpha|\psi_{\alpha\beta}\rangle = \hat{L}_\alpha \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}^\dagger_\beta|0\rangle = 0, \qquad \hat{L}_\beta|\psi_{\alpha\beta}\rangle = \hat{L}_\beta \hat{A}^\dagger_\alpha \hat{A}^\dagger_\beta|0\rangle = \hat{L}_\beta \hat{A}^\dagger_\beta \hat{A}^\dagger_\alpha|0\rangle = 0.$$

Наконец установим допустимые значения орбитального момента в представлении $\mathtt{T}^{(0,n)}$. Для этого подчеркнем, что $\hat{A}^\dagger_\alpha$ — это не только антитриплет в группе SU(3), но и триплет в группе SO(3): закон матричного преобразования по индексу в каждой из этих групп записывается с разными матрицами размера 3×3. Но тогда симметризованные по индексам произведения этих операторов, что, как мы объяснили в абзаце после формулы (V.2.20), необходимо для неприводимости представления $\mathtt{T}^{(0,n)}$, одновременно включают в себя только представления, симметризованные и в группе SO(3). Компоненты симметричного тензора ранга n в группе SO(3) изоморфны неприводимому представлению с моментом вращения, равным n, если след тензора по любой паре индексов равен нулю. Но из симметричного тензора ранга n можно построить симметричный тензор ранга n с нулевым следом, а также при свертке по двум индексам получить симметричные бесследовые тензоры ранга $n-2$, ранга $n-4$ и т. д. Каждый такой симметричный тензор изоморфен неприводимому представлению группы поворотов с моментом вращения, равным рангу тензора. Поэтому при четном n допустимы только четные значения орбитального момента $\ell = L/\hbar$ от 0 до n, а при нечетном n — только нечетные значения ℓ от 1 до n.

Факт совпадения четности главного квантового числа n с четностью допустимых значений орбитального квантового числа имеет вполне ясный физический смысл. Во-первых, гамильтониан инвариантен относительно зеркальной инверсии пространства

$$\boldsymbol{r} \overset{\mathbb{P}}{\mapsto} -\boldsymbol{r}.$$

Неприводимое представление группы SU(3) с заданным значением квадратичного оператора Казимира, а значит, и с заданным значением энергии имеет вполне определенное значение $\mathbb{P}$-четности, равное $(-1)^\ell$, где орбитальный момент ℓ принимает либо только четные, либо только нечетные значения, в зависимости от четности максимального значения $\ell_{\max} = n$. А так как гамильтониан и оператор зеркальной инверсии коммутируют, зеркальная инверсия сохраняет собственное значение гамильтониана и у всех состояний мультиплета SU(3) одно и то же значение $\mathbb{P}$-четности.

Во-вторых, операторы $\hat{A}^\dagger_\alpha = m\omega r_\alpha - \mathrm{i}\hat{p}_\alpha$ меняют знак при зеркальной инверсии пространства

$$\hat{A}^\dagger_\alpha \overset{\mathbb{P}}{\mapsto} -\hat{A}^\dagger_\alpha,$$

поскольку

$$\boldsymbol{r} \overset{\mathbb{P}}{\mapsto} -\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{p} \overset{\mathbb{P}}{\mapsto} -\boldsymbol{p}.$$

Представление $\mathtt{T}^{(0,n)}$ изоморфно состояниям, которые получаются действием на вакуум симметризованным по индексам произведением n антитриплетных операторов $\hat{A}^\dagger_\alpha$. Поскольку при зеркальной инверсии это произведение приобретает множитель $(-1)^n$, а вакуум инвариантен, неприводимое представление $\mathtt{T}^{(0,n)}$ имеет $\mathbb{P}$-четность, равную $(-1)^n$. Это значит, что допустимы только такие значения орбитального момента, $\mathbb{P}$-четность которых также равна $(-1)^n$. Из приведенных выше рассуждений о том, что $\hat{A}^\dagger_\alpha$ — это не только антитриплет в группе SU(3), но и триплет в группе SO(3), сразу следует, что четность состояний с орбитальным моментом ℓ равна $(-1)^\ell$. А это значит, что четности n и ℓ совпадают.

Например, для неприводимого представления $\mathtt{T}^{(0,n)}$ при $n=2$ рассмотрим, какие в $\mathtt{T}^{(0,2)}$ реализуются неприводимые представления группы поворотов. Это представление строится при действии на вакуум симметризованного по индексам произведения двух операторов $\hat{A}^\dagger_\alpha$. Такое произведение по отношению к преобразованию группы поворотов ведет себя как тензорное произведение двух векторов. Это тензорное произведение можно исследовать с помощью схем Юнга для группы SU(2), так как ее алгебра изоморфна алгебре группы поворотов. Покажем, что в представлении $\mathtt{T}^{(0,2)}$ исключен момент вращения $\ell = 1$. Действительно, спин, равный единице, т.е. трехкомпонентный оператор $\hat{A}^\dagger_\alpha$ в алгебре $\mathfrak{su}(2)$, изоморфной алгебре $\mathfrak{so}(3)$, описывается схемой Юнга

$$\mathrm{SU}(2): \quad \mathbf{3} = \square\square,$$

что эквивалентно симметризованной спинорной записи

$$\psi_{a_1}\chi_{a_2} + \psi_{a_2}\chi_{a_1},$$

где a_1 и a_2 — это спинорные индексы двумерных спиноров. Синглет

$$\mathrm{SU}(2): \quad \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}$$

изоморфен антисимметризованной спинорной записи

$$\psi_{a_1}\chi_{a_2} - \psi_{a_2}\chi_{a_1},$$

Тензорное произведение двух векторов отвечает диаграмме Юнга

$$\mathrm{SU}(2):\quad \mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \square\square \otimes \boxed{a}\boxed{a} = \Big(\square\square\boxed{a} \oplus \begin{array}{|c|}\hline a\\\hline\end{array}\!\!\square\Big) \otimes \boxed{a} = \square\square\boxed{a}\boxed{a} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline a & a\\\hline\end{array}\!\!\square \oplus \begin{array}{|c|}\hline a\\\hline\end{array}\!\!\square\!\!\boxed{a}\,.$$

Из этих выкладок следует, что разложение тензорного произведения состояний двух подсистем с моментами вращения, равными 1, в прямую сумму состояний с суммарным моментом вращения дает пространства состояний с моментами вращения, равными 2, 0 и 1. Однако последняя схема, для которой момент равен единице, запрещена в группе SU(3). Исходно клетки с именем «a» располагались в строке, их перестановка приводила к той же схеме Юнга со знаком плюс, образуя вектор. В третьем члене эти же клетки расположены в разных строках, т. е. антисимметризованы, и не могут составлять векторный оператор группы SU(3). В итоге, в разложении тензорного произведения в прямую сумму остаются только первый член — квинтет ($\ell = 2$) и второй член — синглет ($\ell = 0$).

Из этого примера ясно, что парные клетки с именным индикатором необходимо присоединять только парами в одну из строк! А это и означает, что инкремент по орбитальному моменту равен $\Delta\ell = \pm 2$, а максимальный ℓ всегда совпадает с n.

Наконец вычислим размерность представления $\mathtt{T}^{(0,n)}$, суммируя число проекций $2\ell + 1$ для всех допустимых значений ℓ при заданном n. Для четных n сумма членов арифметической прогрессии равна

$$k = \sum_{\ell=2k,\,k=0}^{k=n/2} (2l+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(1+2n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Для нечетных n получим тот же результат

$$k = \sum_{\ell=2k+1,\,k=0}^{k=(n-1)/2} (2l+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)(3+2n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Итак, мы убедились, что из группы симметрии изотропного гармонического осциллятора в пространстве кет-векторов реализуются не все представления, а только $\mathtt{T}^{(0,n)}$, причем в этом представлении присутствуют все состояния с орбитальным моментом $\ell \leqslant n$ той же четности, что и n.

Приложение

§1. Квантовые понятия и обозначения

Бра- и кет-векторы гильбертова пространства квантовых состояний, эрмитово сопряжение, проектор и полнота базиса, запись операторов физических величин в формализме Дирака, коммутатор, полный набор наблюдаемых, каноническое квантование, соотношение неопределенностей.

В этом параграфе мы кратко излагаем принципы описания физических систем в квантовых обозначениях, отсылая читателя за пониманием и подробностями к полноценному построению механики как науки о движении в фейнмановской формулировке [1] с вытекающими из этого подхода основами представлений о квантовых и классических системах. При этом мы не предполагаем, что читатель имел время, чтобы погрузиться в детали квантовой механики, характерные при изучении годового курса в таком университете, как МФТИ, например. Напротив, наша рекомендация состоит в том, чтобы, опираясь на механику в фейнмановской формулировке, сначала изучить теорию групп и алгебр Ли и их неприводимых представлений на пространствах состояний с примерами симметрийных свойств физических систем в рамках квантового описания, а потом с более глубоким пониманием приступить к подробному изучению богатого культурного слоя квантовой механики и квантовой теории поля в современном изложении.

1.1 Частица, траектория, амплитуда вероятности

В этом разделе мы вкратце излагаем тезисы спецкурса [1].

Под частицей мы понимаем *квант локального поля* в отличие от составных частиц, представляющих собой физические системы из связанных в ограниченной области пространства других частиц: составные частицы имеют внутреннюю структуру. Например, электроны, нейтрино, кварки и их античастицы, а также фотоны мы рассматриваем на доступном в настоящее время уровне знаний как частицы, а протоны, нейтроны, атомные ядра и сами атомы как составные частицы. Локальное поле — это физическая система, обладающая объективными характеристиками, которые проявляют себя при взаимодействии с измеряющими эти характеристики приборами, занимающими сколь угодно малый объем, т. е. локально. Характеристики разных полей, наблюдаемые в точке пространства, могут зависеть друг от друга, и эта зависимость называется взаимодействием. Пример взаимодействия — это измерение характеристик локального поля локальным прибором. Характеристика поля — это наблюдаемая величина физической системы, существующая объективно и проявляющая себя во взаимодействиях, в том числе при взаимодействии с измерительными приборами. Наблюдаемые величины доступны для измерений так, что результаты измерения, т. е. характеристики измерительного прибора показывают значение наблюдаемой величины, которое полагается равным вещественному числу: это число называют собственным значением наблюдаемой. Наблюдаемыми мы полагаем энергию, импульс, координаты и т.п. При этом мы трактуем частицы как порции локального поля, т. е. как материальные точки, обладающие всеми физическими характеристиками поля, включая координаты, импульс, энергию и т.п. В нерелятивистском описании число квантов поля считается неизменным, а скорости движения частиц v ограничены областью $v/c \ll 1$, где c — максимальная скорость распространения взаимодействий, которая совпадает со скоростью света в вакууме.

Физическая реальность — это объективные характеристики, которые не зависят от того, считают ли эти характеристики параметрами измерений или нет, т. е. познает их кто-либо или нет, и не зависят от того, кто думает что-либо о реальности или не думает о ней вовсе. Но именно потому, что эти характеристики физической реальности объективны, они измеримы, т. е. могут служить *данными для познания* законов природы. Поэтому для объективных характеристик физической реальности используют термин «наблюдаемые величины», что, конечно, привносит в это понятие элемент субъективности восприятия. Тем не менее, несмотря на эту семантическую и гносеологическую субъективность происхождения термина «наблюдаемая величина», сам термин следует понимать так, как он только что был описан: наблюдаемая как следствие объективности физических характеристик реальности, а не как причина реальности.

Физическая реальность, которая выражается в виде собственных значений наблюдаемой величины, может описываться не одним, а несколькими альтернативными вариантами[1] собственных значений при заданных условиях, которые называются состоянием системы, например, состоянием частицы. Если наблюдаемая величина в данном состоянии принимает единственное значение из допустимого набора, то такое состояние называется собственным для наблюдаемой величины, причем говорят, что в собственном состоянии нет флуктуаций наблюдаемой величины и она известна точно. В собственном состоянии наблюдаемая величина имеет по определению только один вариант собственного значения. Если альтернативных вариантов собственных значений наблюдаемой величины в состоянии больше одного, то говорят, что состояние является несобственным, а разные значения наблюдаемой величины, получаемые при проведении нескольких измерений, когда физическая система

[1] Альтернативность означает, что вариантов несколько, но они взаимоисключающие.

находится в несобственном состоянии, возникают по причине, которая связана с движением этой наблюдаемой величины.

Например, в состоянии, в котором свободная частица имеет точное значение скорости вдоль заданного направления, т. е. в состоянии, которое является собственным для скорости, координата частицы вдоль направления скорости изменяется, так как *частица движется и координата принимает различные собственные значения.* Заметим однако, что собственное состояние с точным значением скорости, т. е. состояние, заданное тем, что изменение координаты за определенный момент времени является одним и тем же, никак не фиксирует траекторию, для которой в таком состоянии может быть несколько альтернативных вариантов[2] с одним и тем же значением скорости, т. е. несколько альтернативных вариантов реальности, если характеризовать эту же реальность в каждый момент времени собственными значениями не только скорости, но и координаты. Но тогда собственное состояние с определенным собственным значением скорости в данный момент времени при измерении может показать несколько альтернативных вариантов значений координаты, поскольку это координаты на разных траекториях движения при заданной скорости. Итак, собственное состояние скорости движения вдоль заданного направления, вообще говоря, не исключает того, что это состояние не является собственным для координаты вдоль того же направления, и, более того, альтернативные варианты измеренных значений координаты в собственном состоянии скорости обусловлены фактом движения по координате по альтернативным траекториям. Собственное состояние скорости не является собственным состоянием соответствующей координаты: возможны альтернативные значения координаты.

В другом примере пусть задано собственное состояние координаты, т. е. состояние с единственным собственным значением координаты как проявлением части характеристик частицы в реальности. Но в этой точке пространства частица может оказаться *при движении по разным траекториям*, а это значит, что у скорости частицы есть более одного варианта собственного значения, т. е. несколько альтернативных значений скорости в данной точке пространства. Собственное состояние координаты не является собственным состоянием соответствующей скорости: возможны альтернативные значения скорости.

На этих примерах с координатой и скоростью, которые в гамильтоновой механике заменены на канонически сопряженные друг другу наблюдаемые величины координаты и количества движения, мы видим, что собственное состояние для одной из них не является собственным для другой, так как движение происходит в этом случае не по одной, а по нескольким альтернативным траекториям, что и обусловливает альтернативные собственные значения в несобственном состоянии. Несобственные состояния наблюдаемой величины указывают на то, что имеет место движение этой наблюдаемой в этом состоянии. Поэтому многократные измерения такой наблюдаемой величины каждый раз дают одно из возможных при движении значений наблюдаемой. Подчеркнем, что в такой логике собственное состояние наблюдаемой величины также описывает особую форму движения, когда величина, например количество движения принимает одно и то же значение в данный момент времени.

В гамильтоновой механике координата и количество движения, которое выражается через скорость и массу частицы, — это канонически сопряженные переменные фазового пространства, а единственное собственное значение одной из этих переменных, например импульса, означает, что имеет место движение канонически сопряженной переменной фазового пространства, координаты. Отметим, что координата и импульс в гамильтоновой механике в фазовом пространстве выступают взаимозаменяемым образом. С точки зрения описания реальности в терминах состояний движение наблюдаемой величины связано с наличием в состоянии системы нескольких альтернативных вариантов значений этой наблюдаемой величины.

Альтернативность вариантов собственных значений наблюдаемой величины в несобственном состоянии означает, что измерение наблюдаемой величины в таком состоянии от раза к разу приводит к разным результатам, так что исходы измерений необходимо описывать в терминах распределения вероятности по собственным значениям при переборе всех возможных значений наблюдаемой в состоянии при измерениях.

Принципиальное открытие квантовой механики состоит в том, что описание состояния только в терминах вероятности для каждого из собственных значений наблюдаемой величины не является полным, и необходимо ввести амплитуды вероятности каждого из допустимых собственных значений наблюдаемой величины. Физическая система как объективная реальность характеризуется значениями наблюдаемых величин. С течением времени характеристики системы, вообще говоря, изменяются вследствие движения, а значит, и амплитуды вероятности разных значений характеристик системы также изменяются, т. е. испытывают движение или, как говорят, эволюцию по времени: наряду с уравнениями движения наблюдаемых величин имеет место уравнение движения для амплитуд вероятности. Поэтому в квантовой механике необходимо отличать два типа этих уравнений движения, которые связаны друг с другом: реальное движение каждой из наблюдаемых величин влечет за собой и изменение амплитуд вероятности.

Специально отметим, что амплитуда вероятности не несет на себе (не обладает в качестве своих реальных свойств) ни энергию, ни импульс, ни какую-либо иную характеристику физической системы, заданную как одно из возможных собственных значений наблюдаемой величины. Напротив, все объективные характеристики физической системы в каждый момент времени — это допустимые, т. е. лежащие во множестве собственных, значения наблюдаемых величин, а амплитуда вероятности задает распределение вероятностей этих значений при многократных измерениях. Амплитуда вероятности имеет в качестве своих аргументов базисную часть реальных характеристик физической системы.

Уравнение движения наблюдаемой величины в классической механике, т. е. уравнение изменения значения наблюдаемой величины со временем — это уравнения лагранжевой или гамильтоновой механики, которые в фейнмановской формулировке в классическом пределе возникают как уравнения на экстремум вещественного

[2]Альтернативные варианты взаимно исключают друг друга. Альтернативные варианты могут быть объединены в одно событие операцией логического «или», и в теории вероятностей вероятность такого объединенного события равна сумме вероятностей альтернатив, а в квантовой механике амплитуда вероятности объединенного события равна сумме комплекснозначных амплитуд вероятностей каждой альтернативы.

функционала действия S на траектории при вариации траектории с фиксированными граничными данными. Под траекторией между граничными точками мы подразумеваем зависимость наблюдаемых величин от времени. «Прямая» траектория — это экстремальная траектория, на которой вариация действие равно нулю, $\delta S = 0$. В исходной фейнмановской формулировке действие S на траектории связано с другим функционалом — амплитудой вероятности Ψ этой траектории посредством экспоненциального преобразования

$$A = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S} \in \mathbb{C}, \qquad S \in \mathbb{R},$$

а амплитуда вероятности Ψ при движении системы с заданными граничными данными по альтернативным траекториям — это сумма амплитуд вероятности по всем возможным траекториям с фиксированными граничными данными

$$\Psi = \sum_k A_k = \sum_k \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_k}.$$

Если действие на экстремальной траектории S_{ext} существенно больше постоянной Планка $\hbar$, т. е. $S_{\text{ext}} \gg \hbar$, то сумма амплитуд вероятности по траекториям, как говорят, локализуется, т. е. сводится к амплитуде вероятности для экстремальной траектории с точностью до несущественного в этом случае множителя. Это происходит вследствие того, что все траектории, которые существенно отличны от экстремальной траектории, дают в сумму вклад, стремящийся к нулю, как это имеет место при усреднении косинуса и синуса по углу в интервале, существенно превышающем период синуса и косинуса [обратите внимание на то, что экспонента в формуле для амплитуды вероятности может быть записана как сумма вещественной части (косинус) и чисто мнимой части (синус)]. Исключение составляет именно вклад вблизи экстремальной траектории, поскольку вариация $\delta S_{\text{ext}} = 0$, и отклонения от экстремальной траектории не изменяют аргумент косинуса и синуса. Существенным отклонением траектории от экстремальной считаются такие, при которых действие меняется на $\delta S \gg \hbar$. Амплитуда вероятности Ψ, например, в случае, когда задана конечная точка траектории x, а начальные условия представлены в виде амплитуд вероятности для каждой из исходных точек траекторий $\Psi_0(x_0)$,

$$\Psi(x) = \sum_k \sum_{x_0} \Psi_0(x_0)\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_k(x,x_0)}$$

задает плотность распределения вероятности W по значениям координат конечной точки x согласно формуле для интенсивности волны в волновой теории распространения колебаний

$$W = |\Psi|^2.$$

Действие на экстремальной траектории удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{H}(p_x, x, t), \tag{VI.1.1}$$

что эквивалентно уравнению Шрёдингера для амплитуды вероятности на этой траектории,

$$\hat{p}_x \Psi = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\big(\hat{p}_x, x, t\big)\Psi, \tag{VI.1.2}$$

причем импульс записывается в виде оператора, действующего на амплитуду вероятности с результатом, равным этой же амплитуде, умноженной на значение импульса на траектории в момент времени t.

Если приборные погрешности так велики, что точность определения действия на траектории $\delta S \gg \hbar$, то отклонения траектории от экстремальной детектируются с вероятностью, равной нулю, а траектории, близкие к экстремальной, у которых $\delta S \sim \hbar$, неотличимы от экстремальной.

В уравнениях Гамильтона–Якоби дифференцирование производится по координатам и времени на конце траектории. Используем этот факт и проведем следующее построение. Разобьем интервал временной эволюции на несколько последовательных интервалов и на концах всех последовательных промежуточных интервалов времени зададим граничные условия, а потом на каждом из промежуточных интервалов найдем экстремальную для этого промежуточного интервала и для заданных на нем граничных условий траекторию. Тогда на каждом интервале эволюции, и на начальном, и на промежуточном, и на финальном, амплитуда вероятности будет удовлетворять уравнению Шрёдингера, поскольку амплитуда любого из промежуточных звеньев траектории построена на экстремальном действии, удовлетворяющем уравнениям Гамильтона–Якоби на своем промежуточном интервале.

Амплитуда вероятности траектории, разбитой на промежуточные интервалы эволюции, — это произведение амплитуд вероятности траекторий на всех промежуточных, начальном и конечном этапах эволюции. Полученная таким образом амплитуда вероятности составной траектории будет удовлетворять уравнению Шрёдингера, как и все другие амплитуды вероятности, полученные произвольным разбиением интервала эволюции на промежуточные этапы, включая и амплитуду вероятности на экстремальной, классической траектории на всем интервале эволюции в целом, когда число промежуточных этапов равно нулю. Экстремальная на всем интервале эволюции траектория является лишь одним из вариантов альтернативных траекторий. Амплитуды альтернативных вариантов траектории складываются, т. е. образуют суперпозицию, которая учитывает интерференцию амплитуд альтернативных траекторий.

Ясно, что траектория с последовательными промежуточными интервалами эволюции, вообще говоря, отличается от экстремальной, классической траектории без разбиений интервала эволюции и только с двумя изначально заданными граничными точками. Для примера, у свободной нерелятивистской частицы экстремальная

траектория в декартовых координатах — это прямая линия от начальной координаты к конечной, а траектория на двух последовательных интервалах — это ломаная из двух звеньев с началом первого звена в исходной и концом второго звена в конечной точке эволюции.

Сумма амплитуд вероятности альтернативных траекторий (напомним, что амплитуда альтернативной траектории построена как произведение амплитуд для всех последовательных звеньев траектории при произвольном разбиении интервала эволюции и произвольных граничных условиях на промежуточных интервалах) удовлетворяет уравнению Шрёдингера в силу его линейности по амплитуде вероятности, и называется интегралом Фейнмана по траекториям. Эта сумма представляет из себя инструмент реализации принципа суперпозиции Гюйгенса для итоговой, суммарной амплитуды вероятности.

Сумма амплитуд вероятности имеет физический смысл, если решение уравнения Шрёдингера имеет конечную норму при заданных граничных условиях: квадрат модуля амплитуды задает распределение вероятности детектировать частицу возле конечной точки эволюции, а сумма вероятностей по всем точкам пространства равна единице, так как эта сумма — вероятность того, что физическая система реализуется в природе во всех доступных альтернативных вариантах движения при заданных условиях, определяющих состояние физической системы. Под заданными условиями в рассматриваемом случае мы подразумеваем фиксированными начальную и конечную точку движения частицы, а под вариантом движения — траекторию.

То, что частица на каждом промежуточном интервале времени движется по экстремальной траектории, а на концах каждого интервала может происходить излом траектории, неотъемлемая часть принципа Гюйгенса и квантового описания амплитуды вероятности. Подчеркнем, что фейнмановский интеграл определяет сумму амплитуд вероятности на всевозможных траекториях, включая ломаные, а результат возникающей в интеграле интерференции вкладов от альтернативных траекторий задает распределение вероятностей при многократном повторении измерений наблюдаемых характеристик физической системы.

Описанная конструкция фейнмановского интеграла — суперпозиция амплитуд вероятности как элементов векторного пространства с коэффициентами в виде комплексных чисел и с конечной нормой в виде суммы квадратов модулей амплитуд вероятности для распределения вероятностей по множеству конечных точек эволюции — это гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}$: основное открытие квантового способа описания физических систем.

1.2 Наблюдаемые и состояния

Пространство состояний физической системы, рассматриваемой как квантовый объект, — это векторное пространство $\mathcal{H}$ над полем комплексных чисел со счетным ортонормированным базисом и элементами конечной нормы[3]. Наблюдаемая физическая характеристика системы измеряется детектором и имеет прямое отношение к базису состояний, так как в базисном состоянии наблюдаемая величина имеет одно значение при любом количестве повторных измерений. А именно, если наблюдаемая величина имеет заданное собственное значение в собственном квантовом состоянии, то амплитуда вероятности измерить в этом состоянии другое значение наблюдаемой величины равна нулю. В математическом формализме квантового описания системы вводят обозначение собственного квантового состояния в виде кет-вектора состояния $|f\rangle$, где f указывает на собственный кет-вектор наблюдаемой величины F с этим собственным значением. Самой величине сопоставляется оператор $\hat{F}$, называемый *наблюдаемой*, так что действие оператора в пространстве кет-состояний задается по определению виде

$$\hat{F}|f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} f|f\rangle. \tag{VI.1.3}$$

Действие оператора наблюдаемой величины на состояние, в котором эта величина имеет точное значение, сводится к тому, что это состояние умножается на точное значение наблюдаемой в этом состоянии. Уравнение (VI.1.3) называется уравнением на собственные значения величины F, а состояние $|f\rangle$ — собственным состоянием величины F с собственным значением f. Нормированные на единицу собственные состояния называют базисными состояниями наблюдаемой $\hat{F}$.

Действие оператора наблюдаемой $\hat{F}$ определено и на кет-состояниях, которые представимы в виде суперпозиции собственных состояний этой наблюдаемой.

Действие оператора на квантовое состояние идентично измерению наблюдаемой детектором: детектор показывает объективную характеристику собственного квантового состояния — собственное значение наблюдаемой. По построению детектор показывает только собственные значения наблюдаемой величины, которыми может обладать физическая система, и эти собственные значения — вещественные числа из множества допустимых значений наблюдаемой величины.

Число собственных квантовых состояний наблюдаемой величины может быть только счетным: любой элемент множества вещественных значений наблюдаемой величины может быть получен с любой сколь угодно малой погрешностью как предел последовательности счетных рациональных чисел. Это означает, что базис собственных состояний физической величины счетный. В таком случае для полного описания физической системы достаточно и того, чтобы число измерений тоже было счетным: в рамках

[3]Более формализованное математическое определение свойств гильбертова пространства $\mathcal{H}$ приводится в учебниках по квантовой механике, см., например, [10]

теории познания только измерения позволяют полностью описать все возможные собственные значения наблюдаемой величины. Поэтому полагают, что число возможных исходов измерений может быть только счетным, а гильбертово пространство состояний физической системы является сепарабельным, т. е. оно имеет счетный базис. Значит, все собственные векторы наблюдаемой можно пронумеровать индексом n

$$\hat{F}|n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} f_n|n\rangle, \tag{VI.1.4}$$

а квантовые состояния физической системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ строить как нормируемую суперпозицию по базису состояний $|n\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle, \qquad |\Psi \in \mathcal{H}. \tag{VI.1.5}$$

Индекс n в обозначении состояния $|n\rangle$ называют квантовым числом, собственное значение f_n также часто называют квантовым числом, но в последнем случае возникает тонкость: у одного и того же собственного значения могут быть несколько собственных состояний, и тогда между номерами состояний и собственными значениями нельзя построить взаимнооднозначного соответствия. Например, у единичного оператора все векторы любого базиса будут собственными с собственным значением единица. Индекс базисного состояния n можно назвать невырожденным квантовым числом. Но если у оператора есть хотя бы одно собственное значение, которому соответствует более одного собственного вектора, то его собственное значение не будет невырожденным квантовым числом. Такие операторы мы рассмотрим подробнее в следующем пункте.

1.3 Эрмитово сопряжение состояний и операторов наблюдаемых

Введем стандартное для векторного пространства обозначение для базисного вектора ортонормированного базиса в виде вектора-столбца $\boldsymbol{v}$ так, что при нумерации собственных состояний наблюдаемой натуральными числами состояние $|n\rangle$ — это столбец $\boldsymbol{e}_n$ с единицей на n-ом месте и остальными нулями:

$$|n\rangle \equiv \boldsymbol{e}_n : \ (\boldsymbol{e}_n)_m = \delta_{nm}, \qquad \boldsymbol{e}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots \tag{VI.1.6}$$

Тогда суперпозиция базисных векторов $|\Psi\rangle$ запишется как вектор-столбец

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle \equiv \sum_n c_n\boldsymbol{e}_n \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{VI.1.7}$$

Вектор состояния $|\Psi\rangle$ в квантовой механике принято называть кет-вектором в отличие от эрмитово сопряженного ему вектора-строки, или бра-вектора, полученного в результате транспонирования и комплексного сопряжения кет-вектора:

$$\langle\Psi| \stackrel{\text{def}}{=} \big(|\Psi\rangle\big)^\dagger = \sum_n c_n^*\langle n| \equiv \sum_n c_n^*\big(\boldsymbol{e}_n\big)^\dagger \equiv (c_1^*,\, c_2^*,\, c_3^*,\, \dots)\,. \tag{VI.1.8}$$

В этих обозначениях скалярное произведение базисных векторов, которое строится как матричное умножение строки бра-вектора на столбец кет-вектора, ортонормировано

$$\langle n|m\rangle \equiv \big(\boldsymbol{e}_n\big)^\dagger\boldsymbol{e}_m = \delta_{nm}, \tag{VI.1.9}$$

а

$$c_n = \langle n|\Psi\rangle, \quad c_n^* = \langle\Psi|n\rangle,$$

так что с учетом того, что транспонирование числа как матрицы размером 1×1 дает само это число, находим

$$\big(\langle n|\Psi\rangle\big)^* = \big(\langle n|\Psi\rangle\big)^\dagger = \langle\Psi|n\rangle$$

в полном согласии с определением эрмитова сопряжения как композиции транспонирования и комплексного сопряжения в матричных обозначениях.

Тогда разложение кет-вектора по базисным состояниям запишется в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \langle n|\Psi\rangle\, |n\rangle. \tag{VI.1.10}$$

Число $\langle n|\Psi\rangle$ можно записать справа от базисного кет-вектора и получить операторное выражение

$$|\Psi\rangle = \sum_n |n\rangle\, \langle n|\Psi\rangle = \Big(\sum_n |n\rangle\, \langle n|\Big)|\Psi\rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{VI.1.11}$$

Это значит, что множество собственных состояний образует базис пространства состояний: вычисление проекций исходного квантового состояния $|\Psi\rangle$ на единичный базисный вектор, $\langle n|\Psi\rangle$ и суммирование базисных векторов с коэффициентами, равными этим проекциям, дает исходный вектор состояния $|\Psi\rangle$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а

$$\sum_n |n\rangle\, \langle n| = \mathbb{1}. \tag{VI.1.12}$$

Последнее выражение в терминах умножения кет- и бра-векторов, которые могут быть записаны как столбцы и строки, дает пример записи матрицы через сумму произведений столбцов на строки. В самом деле,

$$|1\rangle\, \langle 1| \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (1,0,0,\ldots) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \text{ и т.п.}$$

Заметим, что оператор

$$\hat{P}_n = |n\rangle\, \langle n| \tag{VI.1.13}$$

по своему смыслу является проектором на n-е базисное квантовое состояние и обладает двумя свойствами

$$\hat{P}_n^2 = |n\rangle\, \langle n|n\rangle\, \langle n| = |n\rangle\, \langle n| = \hat{P}_n, \qquad \big(\hat{P}_n\big)^\dagger = \big(|n\rangle\, \langle n|\big)^\dagger = |n\rangle\, \langle n| = \hat{P}_n, \tag{VI.1.14}$$

т. е. двукратное проецирование дает тот же результат, что и однократное, а матрица проектора является эрмитово самосопряженной: транспонирование и комплексное сопряжение матрицы приводит к той же матрице.

Использование введенных правил эрмитова сопряжения кет- и бра-векторов и вещественность собственного значения наблюдаемой величины дает

$$\big(|m\rangle \ldots\big)^\dagger = (\ldots)^\dagger \langle m|, \quad \big(\ldots \langle m|\big)^\dagger = |m\rangle (\ldots)^\dagger, \quad \big(\ldots f_m \ldots{}'\big)^\dagger = (\ldots{}')^\dagger f_m^* (\ldots)^\dagger = (\ldots{}')^\dagger f_m (\ldots)^\dagger,$$

Оператор наблюдаемой величины $\hat{F}$ в ортонормированном базисе своих собственных состояний выражается в формализме кет- и бра-состояний в виде матрицы[4]

$$\hat{F} = \sum_m |m\rangle f_m \langle m|, \tag{VI.1.15}$$

которая является эрмитово самосопряженной

$$\hat{F}^\dagger = \Big(\sum_m |m\rangle f_m \langle m|\Big)^\dagger = \sum_m |m\rangle f_m \langle m| = \hat{F}.$$

[4]Отметим, что собственные значения наблюдаемой должны быть действительными числами, так как это значения измеряемой величины. Все собственные векторы наблюдаемой образуют базис в пространстве состояний, так как предполагается, что наблюдаемую величину всегда можно измерить. Формула (VI.1.15) может быть использована и для описания другого типа операторов, у которого собственные значения могут быть не вещественными, а комплексными, а сам оператор — не эрмитов. Но тогда множество собственных векторов такого оператора должно быть полным, т. е. образовывать базис в пространстве состояний. Для неэрмитова оператора это не всегда выполнено. В действительности, любой оператор $\hat{A}$, действующий на пространстве состояний квантовой системы, может быть представлен в виде суммы

$$\hat{A} = \mathbb{1} \cdot \big(\hat{A} \cdot \mathbb{1}\big) = \sum_{n,m} |n\rangle\, \langle n|\big(\hat{A}|m\rangle\big) \langle m| = \sum_{n,m} |n\rangle\, A_{nm} \langle m|,$$

где матричный элемент $A_{nm} = \langle n|\big(\hat{A}|m\rangle\big) \equiv \langle n|A\, m\rangle$, а система $|n\rangle$ полна и ортонормирована.

Для доказательства справедливости записи наблюдаемой величины в терминах суммы тензорных произведений кет- и бра-векторов достаточно убедиться в том, что на любом базисном квантовом состоянии гильбертова пространства верно уравнение на собственные значения, которое и определяло сам оператор наблюдаемой:

$$\hat{F}|n\rangle = \sum_m |m\rangle f_m \langle m|n\rangle = \sum_m |m\rangle f_m \, \delta_{mn} = f_n|n\rangle.$$

Итак, по построению оператор наблюдаемой величины является эрмитово самосопряженным, и он представим в виде суммы тензорных произведений собственных кет- и бра-векторов (VI.1.15), т. е. диагональной матрицы с собственными значениями наблюдаемой на диагонали, если использован ортонормированный базис собственных векторов этой наблюдаемой величины.

Заметим, что собственные состояния наблюдаемой с разными собственными значениями ортогональны, так как запись оператора наблюдаемой в терминах кет- и бра-состояний дает

$$\begin{array}{l} \hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle, \\ \langle n'|\hat{F} = \langle n'|f_{n'} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \langle n'|\hat{F}|n\rangle = f_n\langle n'|n\rangle, \\ \langle n'|\hat{F}|n\rangle = \langle n'|n\rangle \, f_{n'}. \end{array}$$

При $f_n \neq f_{n'}$ равенство $\langle n'|\hat{F}|n\rangle = f_n\langle n'|n\rangle = \langle n'|n\rangle \, f_{n'}$ возможно только при

$$\langle n'|n\rangle = 0.$$

Это замечание позволяет убедиться в том, что введенное нами ранее обозначение базисных состояний как базисных столбцов (VI.1.6) верно, если считать, что все базисные состояния являются собственными состояниями некоторого набора наблюдаемых. Вопрос об условиях существования совместных собственных состояний для двух и более наблюдаемых необходимо рассмотреть более детально.

1.4 Коммутатор и совместный базис из собственных векторов набора наблюдаемых

Физическая система может характеризоваться не одной, а несколькими наблюдаемыми величинами и их собственными значениями. При этом действие оператора наблюдаемой на суперпозицию базисных состояний переводит ее в суперпозицию образов базисных состояний с теми же коэффициентами

$$\hat{F}|\Psi\rangle = \hat{F}\Big(\sum_n c_n|n\rangle\Big) = \sum_n c_n \, \hat{F}|n\rangle.$$

Это значит, что операторы наблюдаемых величин — линейные операторы: порядок действия линейного оператора на состояние и умножение состояния на число можно поменять местами,

$$\hat{F}\, c = c\, \hat{F}.$$

Определим коммутатор двух операторов

$$[\hat{F}, \hat{G}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}. \tag{VI.1.16}$$

Тогда можно сказать, что коммутатор линейного оператора $\hat{F}$ с оператором, который задается умножением состояния на число c, равен нулю.

Пусть теперь система характеризуется двумя наблюдаемыми (операторами, отличными от умножения на число) $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$ и $\hat{G} = \hat{G}^\dagger$, которые имеют совместный базис:

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle, \qquad \hat{G}|n\rangle = g_n|n\rangle. \tag{VI.1.17}$$

Тогда последовательное действие этих операторов на базисные собственные состояния не зависит от порядка действия операторов

$$\begin{aligned} \hat{G}\big(\hat{F}|n\rangle\big) = \hat{G}\big(f_n|n\rangle\big) = f_n\hat{G}|n\rangle = f_n g_n|n\rangle, \\ \hat{F}\big(\hat{G}|n\rangle\big) = \hat{F}\big(g_n|n\rangle\big) = g_n\hat{F}|n\rangle = g_n f_n|n\rangle. \end{aligned}$$

Но это значит, что на любом базисном квантовом состоянии коммутатор этих наблюдаемых равен нулю:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = 0.$$

Мы показали, что для существования у двух наблюдаемых физической системы совместного базиса собственных состояний необходимо, чтобы операторы этих наблюдаемых коммутировали.

Верно и обратное, если наблюдаемые коммутируют, то базис пространства квантовых состояний может быть построен из совместных собственных состояний этих наблюдаемых. Докажем это утверждение.

Пусть у наблюдаемой $\hat{F}$, как мы обсуждали раньше, есть базис собственных векторов с действительными собственными значениями

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle.$$

Рассмотрим свойства состояния, которое получается действием оператора наблюдаемой $\hat{G}$ на собственное состояние оператора $\hat{F}$,

$$|\phi_n\rangle \equiv \hat{G}|n\rangle.$$

Найдем, какие собственные векторы оператора $\hat{F}$ присутствуют в разложении состояния $|\phi_n\rangle$ по базису $|n\rangle$. Для этого подействуем на состояние $|\phi_n\rangle$ оператором $\hat{F}$ и учтем, что по условию операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ коммутируют:

$$\hat{F}|\phi_n\rangle = \hat{F}\hat{G}|n\rangle = \hat{G}\hat{F}|n\rangle = \hat{G}\, f_n|n\rangle = f_n\,\hat{G}|n\rangle = f_n|\phi_n\rangle.$$

Мы получили, что, если наблюдаемые $\hat{F}$ и $\hat{G}$ коммутируют, то действие наблюдаемой $\hat{G}$ на собственное состояние наблюдаемой $\hat{F}$ не выводит это состояние за пределы собственного подпространства наблюдаемой $\hat{F}$ с тем же собственным значением.

Возможны два случая. В первом собственное значение f_n соответствует единственному собственному состоянию $|n\rangle$, т. е. это собственное значение невырождено. Тогда состояние $|\phi_n\rangle$ с тем же собственным значением пропорционально состоянию $|n\rangle$, так как $|\phi_n\rangle$ имеет то же собственное значение наблюдаемой $\hat{F}$,

$$|\phi_n\rangle = \hat{G}|n\rangle = g_n|n\rangle.$$

а коэффициент пропорциональности g_n оказывается собственным значением эрмитово самосопряженного оператора $\hat{G}$, т. е. g_n обязан быть вещественным числом. Таким образом в случае, когда собственному значению наблюдаемой F соответствует одномерное подпространство собственных состояний, собственное состояние наблюдаемой $\hat{F}$ является собственным и для наблюдаемой $\hat{G}$, которая коммутирует с наблюдаемой $\hat{F}$.

Во втором случае, который называют вырожденным, собственные состояния с собственным значением f_n наблюдаемой $\hat{F}$ образуют подпространство состояний размерности $K > 1$, которая называется кратностью вырождения собственного значения f_n,

$$\hat{F}|n,a\rangle = f_n|n,a\rangle, \quad a \in \overline{\{1,K\}}.$$

Будем считать, что состояния $|n,a\rangle$ являются ортонормированными.

Состояние $|\phi_n\rangle$, которое обладает собственным значением f_n величины $\hat{F}$, принадлежит подпространству собственных состояний с этим собственным значением,

$$|\phi_n\rangle = \hat{G}|n,a\rangle = \sum_{b=1}^{K} c_{ab}|n,b\rangle. \tag{VI.1.18}$$

Таким образом действие оператора $\hat{G}$ на собственном подпространстве оператора $\hat{F}$ не выводит состояние за пределы этого подпространства. Т. е. мы можем рассмотреть ограничение оператора $\hat{G}$ на это подпространство. И такое ограничение также будет эрмитово самосопряженным оператором. Это значит, что на этом подпространстве оператор $\hat{G}$ будет иметь собственный базис, элементы которого можно считать частью базиса оператора $\hat{F}$ на всем пространстве, так как любая линейная комбинация собственных векторов будет собственным вектором тогда и только тогда, когда линейная комбинация состоит из векторов с одинаковым собственным значением. В результате[5] мы получаем общий собственный базис двух этих операторов и в случае вырождения собственного значения f_n.

Другими словами, после замены базиса в подпространстве собственных состояний с собственным значением f_n наблюдаемой $\hat{F}$ найдем, что в этом базисе для выбранного значения n

$$\hat{G}|\nu_n\rangle = g_\nu|\nu_n\rangle, \qquad \hat{F}|\nu_n\rangle = f_n|\nu_n\rangle.$$

[5]Для читателя, которого интересуют подробности вывода, приведем следующие выкладки.
В формуле (VI.1.18) величина c_{ab} — это элемент квадратной матрицы $K \times K$. Покажем, что эта матрица эрмитово самосопряженная, т. е.

$$c^*_{ba} = c_{ab}.$$

Итак, если две наблюдаемых коммутируют, то можно построить базис их совместных собственных состояний.

Теперь можно дать *определение полного набора наблюдаемых физической системы.* Наблюдаемые в полном наборе попарно коммутируют. Если каждое собственное состояние базиса обладает уникальным набором собственных значений, т. е. у каждого отличного от других набора собственных значений есть единственное нормированное на единицу собственное состояние, то набор наблюдаемых называется полным.

1.5 Среднее значение, дисперсия и критерий вырождения

Если нормированное на единицу состояние является собственным для наблюдаемой, то среднее значение этой наблюдаемой равно собственному значению, а среднеквадратичное отклонение от среднего, т. е. дисперсия, равно нулю,

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle F\rangle = \langle n|\hat{F}|n\rangle = f_n, \quad (\Delta F)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle n|\big(\hat{F} - \langle F\rangle\big)^2|n\rangle = 0.$$

Такое определение среднего значения естественно, так как для произвольного квантового состояния, нормированного на единицу,

$$\langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle = \sum_{n,n'} c^*_{n'} c_n \langle n'|\hat{F}|n\rangle = \sum_{n,n'} c^*_{n'} c_n f_n \langle n'|n\rangle = \sum_{n,n'} c^*_{n'} c_n f_n \delta_{n'n} = \sum_n w_n f_n = \langle F\rangle,$$

поскольку

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{n,n'} c^*_{n'} c_n \delta_{n'n} = \sum_n w_n = 1.$$

Величину $w_n = |c_n|^2$ принято называть вероятностью базисного квантового состояния $|n\rangle$ с собственным значением f_n в квантовом состоянии $|\Psi\rangle$, которое является нормированной на единицу суперпозицией собственных квантовых состояний, образующих базис, с амплитудами вероятности c_n.

Обратное утверждение: если дисперсия равна нулю, то состояние является собственным, — тоже верно. Составим состояние

$$|\phi\rangle = \big(\hat{F} - \langle F\rangle\big)|\psi\rangle.$$

Для этого вычислим

$$\langle n, b'|\phi_n\rangle = \langle n, b'|\Big(\hat{G}|n, a\rangle\Big) = \langle n, b'|\Big(\sum_{b=1}^{K} c_{ab}|n, b\rangle\Big) = \sum_{b=1}^{K} c_{ab}\,\langle n, b'|n, b\rangle = \sum_{b=1}^{K} c_{ab}\,\delta_{b'b} = c_{ab'},$$

где мы использовали условие ортонормированности базиса в подпространстве. Затем учтем, что оператор наблюдаемой эрмитово самосопряжен, а значит, в базисе своих собственных состояний

$$\langle n, b'|\Big(\hat{G}|n, a\rangle\Big) = \langle n, b'|\Big(\sum_\mu |\mu\rangle g_\mu \langle\mu|n, a\rangle\Big) = \sum_\mu \langle n, b'|\mu\rangle g_\mu \langle\mu|n, a\rangle =$$
$$= \Big(\sum_\mu \langle n, b'|\mu\rangle g_\mu \langle\mu|\Big)|n, a\rangle = \Big(\sum_\mu |\mu\rangle g_\mu \langle\mu|n, b'\rangle\Big)^\dagger |n, a\rangle = \Big(\hat{G}|n, b'\rangle\Big)^\dagger |n, a\rangle. \qquad \text{(VI.1.19)}$$

Эта формула устанавливает, что *при вычислении матричных элементов эрмитово самосопряженного оператора действие этого оператор на кет-состояние эквивалентно действию оператора на бра-состояние* в матричном элементе:

$$\langle\Phi|\Big(\hat{G}|\Psi\rangle\Big) = \Big(\hat{G}|\Phi\rangle\Big)^\dagger |\Psi\rangle. \qquad \text{(VI.1.20)}$$

Если ввести обозначение $\hat{G}|\Psi\rangle \equiv |G\Psi\rangle$, то с учетом эрмитова сопряжения предыдущая формула примет вид

$$\langle\Phi|G\Psi\rangle = \langle G\Phi|\Psi\rangle = \big(\langle\Psi|G\Phi\rangle\big)^\dagger = \langle\Psi|G\Phi\rangle^*. \qquad \text{(VI.1.21)}$$

Теперь запишем

$$\langle n, b'|\phi_n\rangle = \langle n, b'|\Big(\hat{G}|n, a\rangle\Big) = \Big(\hat{G}|n, b'\rangle\Big)^\dagger |n, a\rangle = \Big(\sum_{a'=1}^{K} c_{b'a'}|n, a'\rangle\Big)^\dagger |n, a\rangle = \sum_{a'=1}^{K} c^*_{b'a'}\langle n, a'|n, a\rangle = \sum_{a'=1}^{K} c^*_{b'a'}\delta_{a'a} = c^*_{b'a}.$$

Следовательно, квадратная матрица $\hat{C}$, которая действует на подпространстве собственных состояний с собственным значением f_n наблюдаемой $\hat{F}$ и составлена из элементов c_{ab}, является эрмитово самосопряженной. Это значит, что от исходного базиса в K-мерном подпространстве $|n, a\rangle$ можно перейти к базису собственных векторов $|\nu_n\rangle$ матрицы $\hat{C}$, в котором эта матрица диагональна

$$\hat{C}|\nu_n\rangle = g_\nu|\nu_n\rangle, \quad g_\nu \in \mathbb{R}, \quad \nu_n \in \{\overline{1, K}\}.$$

Норма этого состояния совпадает с дисперсией наблюдаемой в состоянии $|\psi\rangle$

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|\big(\hat{F} - \langle F\rangle\big)^{\dagger}\big(\hat{F} - \langle F\rangle\big)|\psi\rangle = \big(\Delta F\big)^2 = 0.$$

Но норма обращается в нуль, только если само состояние есть нуль пространства состояний:

$$\big(\hat{F} - \langle F\rangle\big)|\psi\rangle = \mathbf{0},$$

т. е. состояние $|\psi\rangle$ является собственным с собственным значением $\langle F\rangle$.

Таким образом верно как прямое утверждение, что если задано собственное состояние наблюдаемой, то среднее значение на состоянии равно собственному значению, а дисперсия равна нулю, так и обратное, что если задано состояние, в котором дисперсия равна нулю, то состояние является собственным для наблюдаемой, а среднее значение наблюдаемой в этом состоянии равно собственному значению наблюдаемой.

Пусть теперь наблюдаемые $\hat{H}$ и $\hat{F}$ входят в полный набор коммутирующих наблюдаемых физической системы, т. е. базис собственных состояний — это $|h, f, a\rangle$, где символ a обозначает набор собственных значений других наблюдаемых из полного набора, и

$$\hat{H}|h, f, a\rangle = h|h, f, a\rangle, \qquad \hat{F}|h, f, a\rangle = f|h, f, a\rangle.$$

Рассмотрим набор состояний $|h, f, a\rangle$, в котором значения h и f зафиксированы, а a пробегает все возможные значения при выбранных h и f. Если a нумерует состояния выбранного набора, то собственное значение $\hat{H}$ называется вырожденным по квантовому числу (числам) a с кратностью, равной мощности множества значений a.

Пусть в физической системе есть наблюдаемая $\hat{G}$, которая коммутирует с $\hat{H}$, но не коммутирует с $\hat{F}$ на любом состоянии $|h, f, a\rangle$ с зафиксированными собственными значениями h и f. Тогда состояние $\hat{G}|h, f, a\rangle$ для любого a является собственным для $\hat{H}$ с тем же собственным значением,

$$\hat{H}\hat{G}|h, f, a\rangle = \hat{G}\hat{H}|h, f, a\rangle = h\hat{G}|h, f, a\rangle.$$

Но если предположить, что состояние $\hat{G}|h, f, a\rangle$ является собственным и для $\hat{F}$ с тем же собственным значением f, то имеет место цепочка равенств

$$\hat{F}\hat{G}|h, f, a\rangle = f\hat{G}|h, f, a\rangle = \hat{G}\hat{F}|h, f, a\rangle.$$

Это значит, что коммутатор на любом состоянии из набора обращается в нуль,

$$[\hat{F}, \hat{G}]|h, f, a\rangle = 0,$$

что противоречит условию, что этот коммутатор отличен от нуля на рассматриваемом собственном подпространстве $\hat{H}$ и $\hat{F}$ с зафиксированными собственными значениями h и f. Поэтому заключаем, что действие наблюдаемой $\hat{G}$ на собственное базисное состояние $|h, f, a\rangle$ должно включать в себя суперпозицию состояний с тем же собственным значением h, но с разными собственными значениями наблюдаемой $\hat{F}$, такими, что $f' \neq f$:

$$\hat{G}|h, f, a\rangle = \sum_{a'} c'_a(a')|h, f, a'\rangle + \sum_{a', f' \neq f} c_{fa}(a', f')|h, f', a'\rangle. \tag{VI.1.22}$$

Допустим случай, когда в формуле (VI.1.22) для каждого значения a коэффициенты c'_a равны нулю, и хотя бы один из коэффициентов c_{fa} отличен от нуля, так как в противном случае состояние $\hat{G}|h, f, a\rangle$ равно нулю, и мы опять получаем состояние, на котором коммутатор $\hat{F}$ и $\hat{G}$ обращается в нуль, что противоречит условию отличия от нуля коммутатора $\hat{F}$ и $\hat{G}$ на любом элементе рассматриваемого подпространства. Итак, чтобы исключить противоречие с исходным положением о том, что коммутатор $\hat{F}$ и $\hat{G}$ отличен от нуля на каждом элементе выбранного подпространства, необходимо, чтобы в собственном подпространстве оператора $\hat{H}$ с собственным значением h было несколько собственных состояний с разными собственными значениями f и f' оператора $\hat{F}$. Определим, что вырождением собственного значения оператора $\hat{H}$ по собственным значениям оператора $\hat{F}$ как квантовому числу называется ситуация, когда собственное подпространство $\hat{H}$ разбивается на собственные подпространства оператора $\hat{F}$ с разными собственными значениями f. Мы доказали, что имеет место критерий вырождения: если

наблюдаемая $\hat{H}$ коммутирует с наблюдаемыми $\hat{F}$ и $\hat{G}$, но наблюдаемые $\hat{F}$ и $\hat{G}$ не коммутируют, то любое собственное состояние наблюдаемой $\hat{H}$ с собственным значением h является линейной комбинацией нескольких собственных состояний наблюдаемой $\hat{F}$ с разными собственными значениями.

Критерий вырождения имеет важное значение в теории простых компактных групп Ли и их точных представлений[6]. А именно, в качестве оператора $\hat{H}$, который коммутирует с двумя другими наблюдаемыми, рассматривают инвариантный оператор Казимира, который коммутирует со всеми генераторами Г алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом генераторы простой компактной алгебры Ли образуют два класса: линейная оболочка эрмитово самосопряженных генераторов Γ_l подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ и линейная оболочка $\mathfrak{g}_a$ корневого дополнения генераторов Γ_α. В корневом дополнении $\mathfrak{g}_a$ простой компактной алгебры Ли с необходимостью есть генератор $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}_m}$, который не коммутирует с генератором Γ_l из подалгебры Картана $\mathfrak{h}$. Отсюда следует, что выполнены условия критерия вырождения собственного значения оператора Казимира по собственным значениям генератора Γ_l из подалгебры Картана $\mathfrak{h}$. Это означает, что любое собственное подпространство оператора Казимира простой компактной алгебры Ли является линейной оболочкой мультиплета базисных собственных состояний генераторов подалгебры Картана этой алгебры с разными собственными значениями генераторов подалгебры Картана. Этот факт позволяет строить мультиплет неприводимого представления простой компактной группы Ли как базис пространства с заданным собственным значением оператора Казимира.

1.6 Каноническое квантование

Для определения значения коммутаторов наблюдаемых величин вводят *правило канонического квантования для гамильтоновой системы без связей*: коммутатор наблюдаемых величин равен скобе Пуассона этих величин, умноженной на $\mathrm{i}\hbar$,

$$[\hat{F},\hat{G}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}\hbar\widehat{\{F,G\}}_{\mathrm{P}}, \tag{VI.1.23}$$

где шляпка над скобкой Пуассона означает, что скобка Пуассона сама может быть не просто числом. а динамической переменной на фазовом пространстве гамильтоновой системы, так что эта динамическая переменная также должна трактоваться как оператор на пространстве квантовых состояний.

Правило канонического квантования для гамильтоновых систем установлено Дираком, поскольку в силу уравнений Гамильтона–Якоби в фейнмановской формулировке механики для амплитуды вероятности траекторий

$$\psi = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)}$$

оператор импульса действует как

$$\hat{p}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} = -\mathrm{i}\hbar\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} = \tfrac{\partial S}{\partial x}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} = p(t)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)},$$

а коммутатор координаты и импульса равен

$$[x,\hat{p}]\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} = x\big(-\mathrm{i}\hbar\tfrac{\partial}{\partial x}\big)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} - \big(-\mathrm{i}\hbar\tfrac{\partial}{\partial x}\big)\Big(x\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)}\Big) = (xp - xp + \mathrm{i}\hbar)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)} = \mathrm{i}\hbar\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)}.$$

Это верно и для любой суммы амплитуд вероятности по траекториям, так что

$$[x,\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar. \tag{VI.1.24}$$

Этот результат вычисления коммутатора согласуется с правилом канонического квантования, так как скобка Пуассона канонически сопряженных координаты и импульса равна единице,

$$\{x,p\}_{\mathrm{P}} = \frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.$$

Таким образом, *правило канонического квантования для гамильтоновых систем без связей является прямым следствием введения амплитуды вероятности траектории*[7].

Наконец, приведем общее определение эрмитово сопряженного линейного оператора $\hat{A}^\dagger$, которое согласуется с матричным определением эрмитова сопряжения как композиции транспонирования и комплексного сопряжения:

$$\big(\hat{A}^\dagger\big)_{nm} = \langle n|\big(\hat{A}^\dagger|m\rangle\big) = \langle n|A^\dagger m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\,n|m\rangle = \big(\langle m|A\,n\rangle\big)^\dagger = \big(A_{mn}\big)^*. \tag{VI.1.27}$$

[6]Полупростые компактные группы Ли — это прямые произведения простых компактных групп Ли. Поэтому действие операторов полупростой группы на состояния представления может описываться по отдельности для каждой простой группы в прямом произведении.

[7]В курсах квантовой механики доказывается соотношение неопределенностей для двух наблюдаемых $\hat{F}$ и $\hat{G}$, коммутатор которых отличен от нуля: произведение дисперсий ΔF и ΔG ограничено средним значением их коммутатора так, что

$$\Delta F\,\Delta G \geqslant \frac{1}{2}|\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle|. \tag{VI.1.25}$$

С этим определением связано и операторное уравнение на унитарный линейный оператор $\hat{U}$

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}, \tag{VI.1.28}$$

следующее из определения унитарного оператора: $\langle \hat{U}\Phi | \hat{U}\Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle$ для любых $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$. Унитарные линейные операторы переводят ортонормированный базис в ортонормированный базис и сохраняют скалярное произведение бра- и кет-векторов, т. е. являются комплекснозначным аналогом ортогональных преобразований на пространстве с действительным скалярным произведением.

Постулаты квантовой механики и система понятий, связанная с ее математическим аппаратом, приводятся в учебниках по квантовой механике, например, в [10].

Для пары наблюдаемых координата–импульс $\hat{F} = \hat{x}$ и $\hat{G} = \hat{p}$ с учетом $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ эта формула дает

$$\Delta x \, \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Соотношение неопределенностей мы приводим здесь лишь для полноты общей квантовой картины, а поскольку при каноническом квантовании коммутатор выражается через классическую скобу Пуассона, в правой части соотношений неопределенностей всегда присутствует постоянная Планка с чертой:

$$\Delta F \, \Delta G \geqslant \frac{1}{2}\,\hbar \left| \left\langle \widehat{\{F, G\}_{\mathrm{P}}} \right\rangle \right|. \tag{VI.1.26}$$

Конечное значение постоянной Планка задает пределы применимости понятий классической механики, в которой нет концептуальных ограничений на точность измерения наблюдаемых величин, а это значит, что все наблюдаемые величины системы могут быть известны с абсолютной точностью., т. е. с равными нулю дисперсиями, а это не всегда верно в квантовой механике.

§2. Формулы тензорного анализа

Однородность и изотропность евклидова пространства, векторы, базис, метрика, длина, декартовы и сферические координаты, инвариантные линейные функции на векторах и ковекторы, инвариантные полилинейные функции на векторах и тензоры, дифференциал инвариантной функции и законы преобразования векторов и ковекторов, символ Кронекера как инвариантный тензор второго ранга, метрика как ковариантный тензор второго ранга, обратная метрика, поднимание и опускание индексов. Смешанное произведение трех векторов, ориентированный объем, тензор Леви-Чивиты, векторное произведение в тензорных обозначениях, детерминант, минор, обратная матрица, дифференциал детерминанта, вектор и тензор площади, зеркальные отражения и пространственная четность. Преобразования, сохраняющие тензор евклидовой метрики, ортогональные, собственные повороты, трансляции. Ковектор ∇, градиент, производная скаляра по направлению, дивергенция, ротор, лапласиан в декартовых и сферических координатах, наглядное вычисление изменения базиса сферических координат при малом смещении, оператор сдвига вдоль радиуса.

2.1 Евклидово пространство

• Координатный подход

В векторном анализе мы используем так называемый *координатный подход*, что обусловлено постановкой задач в физике. Для примера, если 3-мерному вектору координат частицы $\boldsymbol{r}$ ставится в соответствие вещественное число $f(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R}$, то в математике говорят, что задана скалярная функция, которую называют также инвариантом. В физике эту функцию называют скалярным полем и ставят вопрос о его измерении. Для этого необходимо, во-первых, задать базис в векторном пространстве для наблюдателя, так что поле становится функцией координат точки в этом базисе $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, а измерения дают $f(x, y, z) = f(\boldsymbol{r})$, и, во-вторых, задать другой, штрихованный базис другого наблюдателя, который получает данные измерения в виде $f'(x', y', z')$. Скалярная функция отвечает равенству этих измерений: $f(x, y, z) = f'(x', y', z')$. Эту связь мы будем записывать в координатной форме $f(\boldsymbol{r}) = f'(\boldsymbol{r}')$, хотя в бескоординатном подходе следовало бы писать тавтологию: скалярная функция объекта по имени «вектор» не зависит от выбора базиса вектора $f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})$, т. е. значение функции не зависит от характеристик наблюдателя[8].

• Векторы, ковекторы, тензоры

Классическая механика частиц формулируется в евклидовом пространстве. Инструментом для описания в этом случае является векторный анализ.

Векторное пространство определяется как множество, в котором заданы сложение двух элементов и умножение элементов на число[9] [5]. Числа могут быть вещественными или комплексными, а векторное пространство, соответственно, является вещественным или комплексным. Далее будем строить изложение для вещественного векторного пространства.

Векторное пространство конечной размерности можно представить себе как линейную оболочку, натянутую на конечное число независимых базисных векторов. В трехмерном случае в декартовом базисе произвольный вектор координатного пространства

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = \sum_{\substack{\alpha= \\ \{x,y,z\}}} r^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha .$$

В такой записи вводят отзличие верхних индексов от нижних, подчеркивая этим, что свертка (суммирование) по паре таких индексов является инвариантом. Под инвариантностью понимают независимость объекта рассмотрения — вектора $\boldsymbol{r}$ как элемента векторного пространства от выбора базиса в векторном пространстве. При обратимой замене базиса от исходного к новому, шрихованому, которую можно записать в виде линейной операции

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \sum_\beta \boldsymbol{e}'_\beta \, \Lambda^\beta_{\bullet\alpha},$$

элемент векторного пространства запишется уже в шрихованых компонентах r'^β, так как

$$\boldsymbol{r} = \sum_\alpha r^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} r^\alpha \boldsymbol{e}'_\beta \, \Lambda^\beta_{\bullet\alpha} = \sum_\beta r'^\beta \boldsymbol{e}'_\beta \quad \Rightarrow \quad r'^\beta = \sum_\alpha \Lambda^\beta_{\bullet\alpha} r^\alpha .$$

[8] Иными словами, физической реальностью являются показания прибора, которые определяют и положение детектора и реакцию детектора на величину поля. Именно эти показания приборов и соответствуют вектору координат, т. е. определяют понятие точки в пространстве. Эта же точка для другого прибора будет отвечать, вообще говоря, другим показаниям компонент вектора координат, но эти показания связаны определенным законом. Эти же рассуждения справедливы и для показаний, которые задают величину поля (функции от точки в пространстве).

[9] Мы полагаем, что читатель знаком со всеми постулатами для операций в векторном пространстве, включая дистрибутивные законы, т. е. обычные правила раскрытия скобок.

Поэтому при выборе разных базисов описания величин по компонентам, обозначенным индексами двух типов, величина с верхним индексом преобразуется по закону перехода от исходных значений к штрихованым

$$r'^{\beta} = \sum_{\alpha} \Lambda^{\beta}_{\bullet\,\alpha} r^{\alpha},$$

а величина с нижним по обратному:

$$\mathfrak{e}'_{\beta} = \sum_{\alpha} \mathfrak{e}_{\alpha} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}_{\bullet\,\beta}.$$

Поскольку базис в разных точках пространства можно выбирать различным способом[10], принято записывать разложение векторов в бесконечно малой окрестности точки пространства. Поэтому, согласно *правилу Эйнштейна для суммирования по паре «немых» индексов*, запись для бесконечно малых векторов принимает вид

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r^{\alpha}\mathfrak{e}_{\alpha},$$

где $\mathrm{d}r^{\alpha}$, как и прежде, можно представлять себе как трехмерный столбец:

$$\mathrm{d}r^{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}.$$

В сферических координатах (см. рис. 6.1) базис зависит от точки в пространстве, а дифференциал

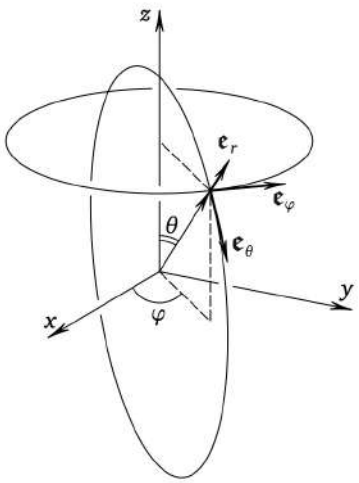


Рис. 6.1: Базис в сферических координатах.

координат имеет вид

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\mathfrak{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\mathfrak{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\mathfrak{e}_\phi = \mathrm{d}\mathcal{C}^{\alpha}\mathfrak{e}_{\alpha}. \qquad \text{(VI.2.1)}$$

В (VI.2.1) мы разложили вектор по единичным векторам базиса, умноженным на длину бесконечно малого смещения, которое получается при малом сдвиге по координатам сферического базиса:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix}.$$

Безусловно, можно построить не только бесконечно малые векторы в локальном базисе $\mathfrak{e}_{\alpha}$. Тогда говорят, что такие *векторы лежат в касательном пространстве* того базиса, который задан в рассматриваемой точке исходного пространства.

Векторное пространство называется евклидовым, если

- пространство является *метрическим*, т. е. для него определен квадрат *длины* вектора — инвариантная, т. е. не зависящая от выбора базиса в векторном пространстве, положительно определенная квадратичная функция вектора,

[10]Такой локальный базис называется базисом касательного пространства в данной точке. Дифференциал вектора записывается в локальном базисе.

- оно *однородно*,
- *изотропно*,
- базис является *глобальным*.

Квадрат длины в декартовых координатах задается выражением

$$\mathrm{d}\mathcal{C}^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}r^\alpha \mathrm{d}r^\beta = g(\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r}),$$

где $g_{\alpha\beta}$ является единичной матрицей согласно определению декартовых координат. Если положительно определенная симметричная квадратичная форма $g_{\alpha\beta}$, которую называют метрикой, зависит от положения точки в пространстве, то говорят о метрическом пространстве Римана [6]. Однородность и изотропность евклидова пространства глобально означает, что эта квадратичная форма в некотором базисе, который называют декартовым, может быть приведена к главным осям[11] $||g|| = \mathrm{diag}(1,1,1)$ во всем пространстве. Подчеркнем, что именно в декартовых координатах метрика — единичная матрица 3×3:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

Метрика задает скалярное произведение двух векторов, поскольку по построению квадрат длины — линейная симметричная функция по каждому из аргументов:

$$g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + g(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \tag{VI.2.2}$$

откуда всегда можно найти $g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ по заданным длинам векторов.[12]

Задача 51. Запишите элемент объема d^3V в сферических координатах как функцию сферических компонент вектора координат, пользуясь ортогональностью рёбер кубика, построенного по ортам локального базиса в терминах $\mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha$.

Задача 52. Пользуясь положительной определенностью квадратичной формы метрики $g(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) \geqslant 0$, введите понятие нормы — длины вектора $||\boldsymbol{c}|| = \sqrt{g(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})}$ и сделайте в (VI.2.2) подстановку $\boldsymbol{b} \mapsto \xi\boldsymbol{b}$, $\xi \in \mathbb{R}$, а затем рассмотрите равенство как квадратичный трехчлен по ξ. Какое условие следует из положительной определенности трехчлена? Докажите неравенство треугольника,

$$||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| \leqslant ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||. \tag{VI.2.3}$$

По определению декартов базис является ортонормированным:

$$g(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha, \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta) = g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

В сферических координатах базис также ортогональный, и квадрат длины легко вычисляется в виде

$$\mathrm{d}\mathcal{C}^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2, \tag{VI.2.4}$$

т. е. метрика по-прежнему диагональна, как во всяком ортогональном базисе, с ненулевыми элементами[13]

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta.$$

Метрика в сферических координатах зависит от точки, в которую помещен вектор, длину которого мы вычисляем с помощью метрики. Кроме того, направление ортов меняется в сферических координатах в зависимости от точки. С точки зрения математики говорят, что эта метрика применяется в касательном к выбранной точке векторном пространстве. Так как в декартовых координатах нет зависимости метрики от точки пространства, то на отличия касательных пространств в разных точках не обращают внимания.

Пусть функция f в векторном пространстве задает вещественное число $f(\boldsymbol{r})$. Это число зависит от вектора, но не зависит от того, в каком базисе мы запишем сам этот вектор, т. е. значение функции инвариантно относительно замен базиса в векторном пространстве. Такая функция называется скаляром. Примером скаляра служит действие на траектории, которое зависит от конечной точки траектории, но не зависит от того, в какой системе координат описывается эта точка. Время как величина вообще не зависящая от системы координат в нерелятивистской физике также является скаляром в евклидовом пространстве.

Среди скаляров выделяют линейные функции:

[11] Набор знаков вещественных диагональных элементов метрики в базисе главных осей называют сигнатурой. В частности, сигнатура евклидовой 3-мерной метрики — это $(+,+,+)$.

[12] По сути мы восстановили симметричную билинейную форму по квадратичной, доказав теорему линейной алгебры.

[13] Условие приводимости тензора метрики к единичному сразу во всем пространстве сводится к тождественному нулю тензора Римана, который вводится в рамках дифференциальной геометрии вне рамок рассматриваемого нами изложения.

- $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a}), \qquad c \in \mathbb{R},$
- $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}).$

Линейная функция полностью задается значениями на базисных векторах векторного пространства

$$f(\boldsymbol{a}) = f\Big(\sum_\alpha a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha\Big) = \sum_\alpha f(a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha) = \sum_\alpha a^\alpha f(\boldsymbol{e}_\alpha) = a^\alpha f(\boldsymbol{e}_\alpha),$$

где для наглядности мы сначала в явном виде указали суммирование по компонентам вектора, а потом записали окончательную формулу по правилу Эйнштейна для суммирования по «немым» индексам, т. е. повторяющимся не более двух раз.

Поскольку значение скалярной функции — *инвариант*, а a^α можно представлять себе как трехмерный столбец, то удобно ввести обозначения для значения линейной функции на базисном векторе $f(\boldsymbol{e}_\alpha) = f_\alpha$, что можно представлять себе как трехмерную строку, так что

$$f_\alpha a^\alpha = f(\boldsymbol{a}) \tag{VI.2.5}$$

— число, не зависящее от выбора базиса. В формуле (VI.2.5) использованы тензорные обозначения в индексах с правилом суммирования Эйнштейна по «немым» индексам. При этом, a^α — это координаты вектора в заданном базисе, а $f(\boldsymbol{e}_\alpha) = f_\alpha$ — это координаты линейной функции f на том же базисе векторного пространства. В тензорных обозначениях важно следить за тем, какие индексы являются верхними, а какие нижними, а представление о том, какой объект является столбцом, а какой строкой в терминах матричного умножения, становится вспомогательным и в ряде простых случаев служит лишь для наглядности восприятия формул тензорного анализа. Для тензорных обозначений важным становится то, как координаты объектов преобразуются при смене базиса в векторном пространстве.

Сумма линейных функций является линейной функцией, а линейная функция, умноженная на число, также является линейной функцией. Отсюда следует, что линейные функции на векторном пространстве сами образуют векторное пространство: в нем есть сложение и умножение на число со всеми законами дистрибутивности, т. е. с «правилами раскрытия скобок». Такое пространство линейных функций $\tilde{V}$ на векторном пространстве V обычно называют ковариантным или ко-сопряженным (двойственным) к самому векторному пространству, выступающему в качестве аргумента таких функций. Как мы только что видели, размерность ковариантного пространства совпадает с размерностью исходного векторного пространства, которое также называют контравариантным,

$$\dim \tilde{V} = \dim V.$$

Дифференциал скалярной функции $\mathrm{d}f = f(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r})$ является линейной скалярной функцией над векторным пространством дифференциалов координат $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha}\,\mathrm{d}r^\alpha = \partial_\alpha f\,\mathrm{d}r^\alpha \Rightarrow \mathrm{d}f(\boldsymbol{e}_\alpha) = \partial_\alpha f.$$

При замене координат $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r})$ имеет место замена базиса в каждой точке пространства, причем дифференциалы $\mathrm{d}r^\alpha$ преобразуются согласно

$$\mathrm{d}r'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta}\,\mathrm{d}r^\beta,$$

т. е. в терминах матричного умножения как столбец матрицей 3×3: $\Lambda^\alpha_{\bullet\beta} = \partial r'^\alpha/\partial r^\beta$. Таким образом имеет место *закон преобразования векторов*[14]

$$a'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta}\,a^\beta. \tag{VI.2.6}$$

А частные производные скалярной функции преобразуются согласно

$$\partial'_\alpha f = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha}\,\partial_\beta f, \tag{VI.2.7}$$

т. е. в терминах матричного умножения как строка обратной матрицей $(\Lambda^{-1})^\beta_{\bullet\alpha} = \partial r^\beta/\partial r'^\alpha$. Действительно,

$$\big(\Lambda^{-1}\cdot\Lambda\big)^\beta_{\bullet\alpha} = (\Lambda^{-1})^\beta_{\bullet\gamma}\Lambda^\gamma_{\bullet\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\gamma}\frac{\partial r'^\gamma}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha}.$$

[14] Говорят также о законе преобразования контравариантных векторов.

Производная $\partial r^\beta/\partial r^\alpha$ называется символом Кронекера

$$\delta^\beta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha} = \partial_\alpha r^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{VI.2.8}$$

Это не что иное, как элементы единичной матрицы $\delta^\beta_\alpha = \mathbb{1}^\beta_\alpha$, так что $\Lambda^{-1}\cdot\Lambda = \mathbb{1}$. У символа Кронекера при использовании матричного умножения обычно опускают указание на порядок следования индексов, так как отличны от нуля только диагональные элементы и

$$\delta^\alpha_{\bullet\beta} = \delta^{\bullet\alpha}_\beta \equiv \delta^\alpha_\beta. \tag{VI.2.9}$$

Итак, частные производные скалярной функции преобразуются при замене координат, т. е. при замене базиса в векторном пространстве, согласно (VI.2.7) или при использовании матричных обозначений как строки, которые умножаются на обратную матрицу преобразования компонент координат векторов. В общем случае говорят, что линейные скалярные функции на векторном пространстве образуют ковекторное пространство, а их значения на базисных векторах преобразуются по *закону преобразования ковекторов,*[15] т. е. как частные производные скалярной функции:

$$b'_\alpha = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha}\, b_\beta. \tag{VI.2.10}$$

Мнемоническое правило для запоминания законов преобразования простое: вектор — верхний индекс, в матрице преобразований штрих у координат сверху, ковектор — нижний индекс, в матрице преобразований штрих у координат снизу.

Ковариантным тензором ранга k называется инвариантная функция от k векторов, линейная по каждому из аргументов. Тогда в индексных обозначениях тензор задается своими значениями на базисных векторах:

$$T(\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\alpha_k}) = T_{\alpha_1\ldots\alpha_k},$$

т. е. тензор задается своими проекциями на базисные векторы по каждому аргументу полилинейной функции. Смешанные тензоры ранга $k_1 + k_2$ определяются как линейные функции на k_1 векторах и k_2 ковекторах и имеют k_1 нижних и k_2 верхних индексов. По каждому нижнему индексу тензор преобразуется по закону ковектора, а по верхнему — по закону вектора. Верхние индексы определяются как проекции тензора на базисные векторы $\mathfrak{h}^\beta$ в ковариантном пространстве, дуальном к векторному.

Например, билинейная инвариантная функция на векторах $T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ задает компоненты ковариантного тензора второго ранга $T_{\alpha_1\alpha_2} = T(\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \mathfrak{e}_{\alpha_2})$. В силу инвариантности значение этой функции не зависят от выбора базиса:

$$\begin{aligned} T(a^{\alpha_1}\mathfrak{e}_{\alpha_1}, b^{\alpha_2}\mathfrak{e}_{\alpha_2}) = T(a'^{\alpha'_1}\mathfrak{e}'_{\alpha'_1}, b'^{\alpha'_2}\mathfrak{e}'_{\alpha'_2}) \quad &\Rightarrow \quad T(\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \mathfrak{e}_{\alpha_2})\, a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} = T(\mathfrak{e}'_{\alpha'_1}, \mathfrak{e}'_{\alpha'_2})\, a'^{\alpha'_1} b'^{\alpha'_2} \quad \Rightarrow \\ T_{\alpha_1\alpha_2}\, a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} = T'_{\alpha'_1\alpha'_2}\, a'^{\alpha'_1} b'^{\alpha'_2} \quad &\Rightarrow \quad T_{\alpha_1\alpha_2}\, \frac{\partial r^{\alpha_1}}{\partial r'^{\alpha'_1}} a'^{\alpha'_1}\, \frac{\partial r^{\alpha_2}}{\partial r'^{\alpha'_2}} b'^{\alpha'_2} = T'_{\alpha'_1\alpha'_2}\, a'^{\alpha'_1} b'^{\alpha'_2}. \end{aligned} \tag{VI.2.11}$$

Поскольку эти соотношения верны на любых векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заключаем, что для компонент ковариантного тензора второго ранга закон преобразования компонент имеет вид

$$T'_{\alpha'_1\alpha'_2} = \frac{\partial r^{\alpha_1}}{\partial r'^{\alpha'_1}}\, \frac{\partial r^{\alpha_2}}{\partial r'^{\alpha'_2}}\, T_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Символ Кронекера — смешанный тензор второго ранга. Он является инвариантным тензором, поскольку в любых новых координатах принимает те же значения единичной матрицы. Действительно,

$$\begin{aligned} \delta(a^{\alpha_1}\mathfrak{e}_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}\mathfrak{h}^{\alpha_2}) = \delta(a'^{\alpha'_1}\mathfrak{e}'_{\alpha'_1}, b'_{\alpha'_2}\mathfrak{h}'^{\alpha'_2}) \quad &\Rightarrow \quad \delta(\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \mathfrak{h}^{\alpha_2})\, a^{\alpha_1} b_{\alpha_2} = \delta(\mathfrak{e}'_{\alpha'_1}, \mathfrak{h}'^{\alpha'_2})\, a'^{\alpha'_1} b'_{\alpha'_2} \quad \Rightarrow \\ \delta^{\alpha_2}_{\alpha_1}\, a^{\alpha_1} b_{\alpha_2} = \delta^{\alpha'_2}_{\alpha'_1}\, a'^{\alpha'_1} b'_{\alpha'_2} \quad &\Rightarrow \quad \delta^{\alpha_2}_{\alpha_1}\, \frac{\partial r^{\alpha_1}}{\partial r'^{\alpha'_1}} a'^{\alpha'_1}\, \frac{\partial r'^{\alpha'_2}}{\partial r^{\alpha_2}} b'_{\alpha'_2} = \delta^{\alpha'_2}_{\alpha'_1}\, a'^{\alpha'_1} b'^{\alpha'_2}. \end{aligned} \tag{VI.2.12}$$

Но

$$\delta^{\alpha_2}_{\alpha_1}\, \frac{\partial r^{\alpha_1}}{\partial r'^{\alpha'_1}}\, \frac{\partial r'^{\alpha'_2}}{\partial r^{\alpha_2}} = \frac{\partial r^{\alpha_1}}{\partial r'^{\alpha'_1}}\, \frac{\partial r'^{\alpha'_2}}{\partial r^{\alpha_1}} = \frac{\partial r'^{\alpha'_2}}{\partial r'^{\alpha'_1}} = \delta^{\alpha'_2}_{\alpha'_1}.$$

В итоге,

$$\delta^{\alpha'_2}_{\alpha'_1} = \delta^{\alpha'_2}_{\alpha'_1}.$$

[15] Говорят также о законе преобразования ковариантных векторов.

• Связь координатного и инвариантного подходов

Здесь уместно сделать замечание о соответствии между принятым нами координатным подходом с наглядным представлением базиса в векторном пространстве и инвариантным бескоординатным подходом, который часто используется в научной литературе. В координатном подходе основным объектом являются компоненты тензора. Например, компоненты двухвалентного ковариантного тензора $T_{\alpha\beta}$ действуют как билинейная функция в пространстве тензорного произведения двух векторных пространств $V\otimes V$: элементами тензорного произведения пространств являются классы эквивалентности в прямом произведении этих векторных пространств $V\times V$, так что к классу $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ принадлежат все элементы $V\times V$, на которых билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения. Это значит, что эквивалентными являются элементы с одинаковым множителем, $\lambda\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}\cong\boldsymbol{v}\times\lambda\boldsymbol{u}$, а также элементы, которые отличаются на $\mathbf{0}\times\boldsymbol{u}'$ или $\boldsymbol{v}'\times\mathbf{0}$, поскольку билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения на элементах класса[16].

Компоненты тензоров преобразуются при смене базиса в векторном пространстве, и мы говорим о законе преобразования тензоров. При этом сам тензорный объект записывается в векторном виде в представлении «базиса со стрелками» (жирный шрифт): вектор $\boldsymbol{a}=a^\alpha\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha$, контравариантный тензор второго ранга $\boldsymbol{U}=U^{\alpha\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta$, ковектор $\boldsymbol{b}=b_\beta\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta$, ковариантный тензор второго ранга $\boldsymbol{T}=T_{\alpha\beta}\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta$ и проч. Пространство инвариантных линейных функций является векторным. Его отличают от исходного векторного пространства V и называют двойственным к V ковариантным пространством $\tilde V$. Базис ковекторного пространства задается соотношением[17] $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta\cdot\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha=(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha)^\gamma(\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta)_\gamma=\delta^\beta_\alpha$.

При пассивных преобразованиях векторного пространства происходит одновременный переход от компонент вектора a^α к штрихованным компонентам вектора $a'^\alpha=\Lambda^\alpha_{\bullet\beta}a^\beta$ и от базиса $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha$ к штрихованному базису $\boldsymbol{\mathfrak{e}}'_\alpha=\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta(\Lambda^{-1})^\beta_{\bullet\alpha}$, где действует обратная матрица. Это обеспечивает инвариантность вектора $\boldsymbol{a}=a^\alpha\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha$ при пассивных преобразованиях. Для ковекторов согласованное с векторами преобразование для базиса — $\boldsymbol{\mathfrak{h}}'^\beta=\Lambda^\beta_{\bullet\alpha}\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha$, для ковариантных компонент — $b'_\beta=b_\alpha(\Lambda^{-1})^\alpha_{\bullet\beta}$. Формально закон преобразования базиса векторного пространства $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha$ тождественно совпадает с законом преобразования частных производных ∂_α, а закон преобразования базиса ковариантного векторного пространства $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta$ тождественно совпадает с законом преобразования дифференциалов координат $\mathrm{d}r^\beta$. Поэтому, если нет необходимости в наглядности, то от базисных векторов со стрелками можно избавиться и использовать вместо базисных векторов объекты с идентичными свойствами преобразования: $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha\mapsto\partial_\alpha$ и $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta\mapsto\mathrm{d}r^\beta$. Именно так и поступают в инвариантном подходе. Например, эквивалентными становятся такие записи для контравариантного тензора второго ранга

$$\boldsymbol{U}=U^{\alpha\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta\cong U^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\otimes\partial_\beta,$$

и для ковариантного тензора второго ранга

$$\boldsymbol{T}=T_{\alpha\beta}\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\beta\cong T_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}r^\alpha\otimes\mathrm{d}r^\beta.$$

Если говорят: задан вектор $a=\partial_x+2\partial_y$, то в координатном подходе это либо отвечает инвариантному контравариантному объекту со значениями на базисе в ковариантном пространстве[18] $a(\boldsymbol{\mathfrak{h}}^x)=a^x=1$, $a(\boldsymbol{\mathfrak{h}}^y)=a^y=2$, либо может трактоваться как инвариантный вектор $\boldsymbol{a}$, который в указанном базисе равен $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\mathfrak{e}}_x+2\boldsymbol{\mathfrak{e}}_y$.

[16] По сути для введения тензорного произведения $V\otimes V$ как векторного пространства необходимо определить операции сложения и умножения на число для элементов этого векторного пространства, т. е. те операции, которые не заданы для прямого (декартова) произведения $V\times V$. Поэтому и возникают классы эквивалентности как элементы тензорного произведения векторных пространств. В случае умножения на число λ элемента векторного пространства $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ в тензорном произведении возникает элемент $\lambda(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})$, а при вычислении любой инвариантной линейной функции $T(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\equiv T(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ на тензорном произведении число λ выносится из под знака функции $T(\lambda(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}))=\lambda T(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})=\lambda T(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=T(\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=T(\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{u})$. В итоге, элементы векторного пространства $\lambda(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})-(\lambda\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{u}\cong\lambda(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\otimes(\lambda\boldsymbol{u})\cong\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}$ входят в класс эквивалентности нулевого элемента тензорного произведения. Аналогично при сложении элементов тензорного произведения $(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})+(\mathbf{0}\otimes\boldsymbol{u}')$ или $(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}'\otimes\mathbf{0})$ в силу линейности функции имеем $T(\mathbf{0}\otimes\boldsymbol{u}')=T(\mathbf{0},\boldsymbol{u}')=0=T(\boldsymbol{v}',\mathbf{0})=T(\boldsymbol{v}'\otimes\mathbf{0})=T(\mathbf{0}\otimes\mathbf{0})$, так что сложение с такими «нулевыми» элементами также не изменяет значение инвариантной линейной функции и задает еще одно соотношение для класса эквивалентности $\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}$, а именно, $(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{u}\cong\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}\cong\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_2\cong\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}$. В этих соотношениях сложение определено для базиса тензорного произведения $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta\equiv\boldsymbol{\mathfrak{E}}_{\alpha\beta}$. Подчеркнем, что все соотношения для тензорного произведения имеют упорядоченный вид, т. е. порядок следования сомножителей имеет значение так же, как при вычислении инвариантной линейной функции $T(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ от двух векторов.

[17] Мы задаем базис ковариантного пространства как значение «бетых» функций $\mathfrak{h}^\beta$, равных единице на «бетом» базисном векторе $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta$ и нулю на других базисных векторах. Это определение можно записать в виде суммы произведений по компонентам как функции, так и базисного вектора. В самом деле, $\mathfrak{h}^\beta(\boldsymbol{a})=a^\gamma\mathfrak{h}^\beta(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\gamma)=a^\gamma\mathfrak{h}^\beta_\gamma$, но поскольку компоненты базисного вектора $(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha)^\gamma=\delta^\gamma_\alpha$, то $\mathfrak{h}^\beta(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha)=(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha)^\gamma\mathfrak{h}^\beta_\gamma=\delta^\gamma_\alpha\mathfrak{h}^\beta_\gamma=\mathfrak{h}^\beta_\alpha$.

[18] Контравариантный вектор можно рассматривать как линейную функцию на ковекторах. Компоненты вектора задаются значением линейной функции на базисных векторах ковариантного пространства.

В математической литературе можно столкнуться с процедурой перехода от понятий инвариантного подхода к понятиям координатного подхода. Эта процедура повторяет изложенную выше схему построения тензорного исчисления. Вводят понятие подстановки вектора $\boldsymbol{a}$ в ковариантный тензор (в математике наряду с термином «подстановка» используют понятие «внутреннее дифференцирование»), так что подстановка $i_{\boldsymbol{a}}$ переводит тензор ранга k в тензор ранга $k-1$ за счет свертки по первому индексу, и на примере тензора второго ранга в инвариантном подходе запишем

$$i_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T} \stackrel{\text{def}}{=} i_{\boldsymbol{a}} T_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}r^{\alpha} \otimes \mathrm{d}r^{\beta} = T_{\alpha\beta} a^{\alpha}\, \mathrm{d}r^{\beta}. \tag{VI.2.13}$$

Еще одна подстановка даст

$$i_{\boldsymbol{b}}(i_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T}) = T_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta},$$

но именно это выражение в координатном подходе мы и обозначали как $T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — значение инвариантной билинейной функции на векторах. В частности,

$$i_{\mathfrak{e}_\beta}(i_{\mathfrak{e}_\alpha}\boldsymbol{T}) = T_{\alpha\beta} = T(\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{e}_\beta),$$

с учетом того, что компоненты базисных векторов — это дельта-символы Кронекера: $(\mathfrak{e}_\alpha)^{\alpha'} = \delta_\alpha^{\alpha'}$, так что

$$T_{\alpha'\beta'} (\mathfrak{e}_\alpha)^{\alpha'} (\mathfrak{e}_\beta)^{\beta'} = T_{\alpha\beta}.$$

Если теперь учесть, как базисные векторы преобразуются при пассивных преобразованиях, то мы в точности получим закон преобразования компонент ковариантного тензора. Аналогичные рассуждения можно провести и для тензоров других рангов с различными ковариантными и контравариантными индексами, имея ввиду, что свертка имеет универсальных характер по отношению к векторам и ковекторам.

Таким образом, мы установили эквивалентность описания тензоров в координатном и инвариантном подходах на уровне формул перехода и ясной интерпретации этих формул путем введения сверткиподстановки. Единственный нюанс — подстановка бесконечно малых векторов, которые задают направляющие ориентированных площадей гиперповерхностей: в этом случае надо иметь ввиду, что в координатном подходе дифференциалы координат возникают не как базис в ковариантном пространстве, а как подстановка вполне определенных бесконечно малых элементов ориентированных гиперповерхностей.

В координатном подходе не только есть преимущество наглядности: после определения свойств преобразования компонент объекта формально нет никакого различия в покомпонентной записи так называемых активных и пассивных преобразований. При пассивных преобразованиях происходит смена базиса для описания объекта, а при активных сам объект преобразуется в заданном базисе, но в координатном подходе оба эти варианта приводят просто к функциональной зависимости координат образа от координат оригинала, так что схема никак не сказывается на выкладках. Инвариантные интегралы в координатном подходе — это сумма скаляров, а в инвариантном походе интегралы могут трактоваться как сумма тензоров.

С точки зрения физики базис — это наблюдатель со своими линейками (детектором измерения компонент векторов и тензоров), так что пассивные преобразования — это описание одной и той же физической системы в тензорных обозначениях разными наблюдателями (в разных базисах). Переход от одного наблюдателя физической системы к другому можно описать эквивалентным образом: два наблюдателя — это один и тот же наблюдатель за системой, для которого сама система переместилась по отношению к детекторам наблюдателя. Именно поэтому в координатном подходе формулы активных и пассивных преобразований описываются идентичными преобразованиями тензорных величин[19].

• Метрический тензор

Метрика является ковариантным тензором второго ранга. Она совпадает с единичной матрицей только в декартовых координатах плоского пространства [6], как мы видели это на примере сравнения сферических и декартовых координат. Это замечание тавтологично, поскольку сам декартов базис как раз и определяется как базис, в котором метрика становится единичной во всем евклидовом пространстве.

Для метрики определяют обратную метрику g^{-1} согласно матричному умножению $g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$, записывая индексы обратной матрицы сверху:

$$||g^{-1}||^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{VI.2.14}$$

[19]Результат активного преобразования компонент тензорной величины, который совпадает с результатов пассивного преобразования компонент этой величины при одной и той же замене координат, называется параллельным переносом тензора. Вместе с тем, если тензорная величина задана в новой точке при активном преобразовании координат, то это ее значение можно сравнить с результатом параллельного переноса тензора, так что при бесконечно малых преобразованиях в заданном направлении такое сравнение приводит к введению производной Ли тензора по указанному направлению.

Из инвариантности единичного тензора Кронекера относительно преобразований координат матрицей Λ ввиду $\Lambda\cdot\mathbb{1}\cdot\Lambda^{-1}=\mathbb{1}$ следует, что обратная метрика действительно является тензором второго ранга. Запишем закон преобразования компонент метрического тензора, прямого и обратного

$$\Lambda^{\alpha}_{\bullet\alpha'}\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'}g^{\alpha'\beta'}=g'^{\alpha\beta},\qquad g_{\beta''\gamma''}(\Lambda^{-1})^{\beta''}_{\bullet\beta}(\Lambda^{-1})^{\gamma''}_{\bullet\gamma}=g'_{\beta\gamma},$$

и найдем, чему равно матричное произведение этих тензоров

$$g'^{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}=\Lambda^{\alpha}_{\bullet\alpha'}\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'}g^{\alpha'\beta'}g_{\beta''\gamma''}(\Lambda^{-1})^{\beta''}_{\bullet\beta}(\Lambda^{-1})^{\gamma''}_{\bullet\gamma}.$$

Но поскольку $\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'}(\Lambda^{-1})^{\beta''}_{\bullet\beta}=\delta^{\beta''}_{\beta'}$, то

$$\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'}g^{\alpha'\beta'}g_{\beta''\gamma''}(\Lambda^{-1})^{\beta''}_{\bullet\beta}=g^{\alpha'\beta'}g_{\beta'\gamma''}=\delta^{\alpha'}_{\gamma''},$$

получим

$$g'^{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}=\Lambda^{\alpha}_{\bullet\alpha'}\delta^{\alpha'}_{\gamma''}(\Lambda^{-1})^{\gamma''}_{\bullet\gamma}=\Lambda^{\alpha}_{\bullet\alpha'}(\Lambda^{-1})^{\alpha'}_{\bullet\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma},$$

как это и должно быть.

Метрика используется для получения новых тензорных величин путем *поднимания и опускания индексов*: поднятие индекса с помощью обратной метрики переводит ковекторную величину в векторную, $a_\alpha\mapsto a^\alpha=g^{\alpha\beta}a_\beta$, а опускание индекса метрикой переводит вектор в ковектор, $a^\alpha\mapsto a_\alpha=g_{\alpha\beta}a^\beta$. Последовательное поднимание и опускание индекса не меняет тензорную величину в силу определения тензора обратной метрики как обратной матрицы для ковариантного тензора метрики.

В декартовых координатах метрика евклидова пространства — единичная матрица, так что поднимание или опускание индекса тензорной величины не меняет эту тензорную величину. Поэтому *в декартовых координатах евклидова пространства не различают верхние и нижние индексы.* Однако это различие существенно как в криволинейных координатах евклидова пространства (см. пример сферических координат выше), так и в случае специальной теории относительности (пространство-время Минковского с псевдоевклидовой метрикой).

2.2 Тензор Леви-Чивиты

Рассмотрим ортонормированную правую тройку базисных векторов евклидова пространства, например, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z\equiv\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha=\overline{1,3}$. Смешанное произведение $(\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y)\cdot\mathbf{e}_z=1$ — объем единичного куба. *Линейная по каждому из аргументов величина*

$$(\mathbf{e}_\alpha\times\mathbf{e}_\beta)\cdot\mathbf{e}_\gamma\equiv\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

задает компоненты тензора третьего ранга — символа Леви-Чивиты[20], полностью антисимметричного по перестановкам каждого из двух его аргументов[21]. Как следствие, если хотя бы пара векторов в смешанном произведении совпадает, его значение равно нулю. Физический смысл символа Леви-Чивиты — ориентированный объем куба, натянутого на тройку единичных векторов: на правой тройке объем положительный «+1», на левой — отрицательный «−1», а для плоской или линейной фигуры равен нулю.

Разложение векторов по базису задает смешанное произведение в форме свертки с символом Леви-Чивиты

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(a^\alpha\mathbf{e}_\alpha\times b^\beta\mathbf{e}_\beta)\cdot c^\gamma\mathbf{e}_\gamma=a^\alpha b^\beta c^\gamma(\mathbf{e}_\alpha\times\mathbf{e}_\beta)\cdot\mathbf{e}_\gamma=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Аналогично векторное произведение с компонентой γ

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_\gamma=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{e}_\gamma=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha b^\beta,$$

откуда замечаем, что компоненты единичного вектора $(\mathbf{e}_\gamma)^{\gamma'}=\delta^{\gamma'}_{\gamma}$, т. е. единственная единица у столбца $\mathbf{e}_\gamma$ находится на месте, номер которого равен γ.

Перейдем теперь к рассмотрению операций с матрицами, исключая преобразования матриц при переходе от одного базиса к другому. В рамках такого рассмотрения мы все матричные индексы будем указывать снизу, акцентируя внимание на порядок их следования, что важно при выполнении матричного умножения. В этом случае уместно говорить не о тензоре Леви-Чивиты, а о символе Леви-Чивиты, и не о тензоре Кронекера, а о символе Кронекера с двумя нижними индексами $\delta_{\alpha\alpha'}$.

[20] Леви-Чивита — любимый аспирант профессора Риччи. Оба являются выдающимися математиками своего времени, внесшими вклад в создание тензорного исчисления.

[21] В этом разделе мы проводим рассмотрение для размерности пространства равной трем. В многомерном пространстве аналогичный тензор имеет количество индексов, равное размерности пространства.

Стандартное определение детерминанта квадратной матрицы A размерности 3×3

$$\det A=\sum(-1)^{\sigma(\alpha\beta\gamma)}A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma},$$

где $\sigma(\alpha\beta\gamma)$ — число перестановок отличных друг от друга индексов в упорядоченную последовательность 123, с помощью символа Леви-Чивиты принимает вид

$$\det A=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}. \tag{VI.2.15}$$

Запишем это же выражение для детерминанта в виде

$$\det A=\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}A_{1\alpha_1}A_{2\alpha_2}A_{3\alpha_3}=\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{123}A_{1\alpha_1}A_{2\alpha_2}A_{3\alpha_3}=\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_1}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}.$$

Здесь мы заметили, что и для первого индекса матрицы в произведении необходимо записать упорядоченную правую тройку, причем при перестановке порядка любых двух «бета»-индексов смена знака слагаемого компенсируется сменой знака у символа Леви-Чивиты с индексами «бета», а число одинаковых членов равно числу перестановок последовательности 123, т. е. 3!.

$$\det A=\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_1}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}. \tag{VI.2.16}$$

Из приведенного выше выражения (VI.2.16) сразу следует, что детерминант квадратной матрицы и транспонированной к ней матрицы совпадают, поскольку перестановка «альфа»- и «бета»-символов Леви-Чивиты не изменяет результат и отвечает перестановке «альфа»- и «бета»-индексов матрицы, т. е. транспонированию,

$$\det A=\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_1}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}=\epsilon_{123}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1 1}A_{\beta_2 2}A_{\beta_3 3}=\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1 1}A_{\beta_2 2}A_{\beta_3 3}=\det A^{\mathrm{T}}.$$

Более того, справедливо равенство

$$\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_1}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}=\det A\cdot\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \tag{VI.2.17}$$

поскольку слева в (VI.2.17) стоит тензор антисимметричный по перестановке любых двух «альфа»-индексов, и в частном случае при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_2=3$ равенство сводится к определению детерминанта. В самом деле, перестановка двух первых «альфа»-индексов дает выражение

$$\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_2}A_{\beta_2\alpha_1}A_{\beta_3\alpha_3},$$

в котором мы можем воспользоваться тем, что по немым индексам «бета» идет суммирование, и после переобозначений этих немых индексов получить

$$\begin{aligned}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_2}A_{\beta_2\alpha_1}A_{\beta_3\alpha_3}&=\Big\langle\beta_1\mapsto\beta'_2;\beta_2\mapsto\beta'_1;\beta_3\mapsto\beta'_3\Big\rangle=\epsilon_{\beta'_2\beta'_1\beta'_3}A_{\beta'_2\alpha_2}A_{\beta'_1\alpha_1}A_{\beta'_3\alpha_3}=\\&=\Big\langle\text{перестановка индексов в символе Леви-Чивиты }\beta'_1\leftrightarrow\beta'_2\Big\rangle=-\epsilon_{\beta'_1\beta'_2\beta'_3}A_{\beta'_2\alpha_2}A_{\beta'_1\alpha_1}A_{\beta'_3\alpha_3}=\\&=-\epsilon_{\beta'_1\beta'_2\beta'_3}A_{\beta'_1\alpha_1}A_{\beta'_2\alpha_2}A_{\beta'_3\alpha_3}=\Big\langle\text{сотрем штрихи у немых индексов}\Big\rangle=-\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}A_{\beta_1\alpha_1}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}.\end{aligned}$$

Антисимметричность по перестановкам индексов «альфа» доказана.

Равенство (VI.2.17) позволяет вычислить детерминант произведения двух матриц,

$$\begin{aligned}\det(A\cdot B)&=\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3}(A_{\alpha_1\gamma_1}B_{\gamma_1\beta_1})(A_{\alpha_2\gamma_2}B_{\gamma_2\beta_2})(A_{\alpha_3\gamma_3}B_{\gamma_3\beta_3})\\&=\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}A_{\alpha_1\gamma_1}A_{\alpha_2\gamma_2}A_{\alpha_3\gamma_3}\epsilon_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\det B=\\&=\det A\cdot\det B.\end{aligned}$$

Из определения детерминанта матрицы (VI.2.15), обозначая элементы в трех строчках матрицы как компоненты трех векторов $A_{1\alpha}\mapsto a_\alpha$, $A_{2\beta}\mapsto b_\beta$, $A_{3\gamma}\mapsto c_\gamma$, получаем выражение для смешанного произведения:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,A_{1\alpha}A_{2\beta}A_{3\gamma}=\det\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}\;\mapsto\;\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_\alpha b_\beta c_\gamma=\det\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},$$

и тогда, в частности, для единичных векторов с компонентами $(\mathfrak{e}_\alpha)_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$ найдем выражение для символа Леви-Чивиты в терминах детерминанта матрицы, элементами которой являются символы Кронекера:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = (\mathfrak{e}_\alpha \times \mathfrak{e}_\beta)\cdot\mathfrak{e}_\gamma = \det\begin{pmatrix}(\mathfrak{e}_\alpha)_1 & (\mathfrak{e}_\alpha)_2 & (\mathfrak{e}_\alpha)_3\\ (\mathfrak{e}_\beta)_1 & (\mathfrak{e}_\beta)_2 & (\mathfrak{e}_\beta)_3\\ (\mathfrak{e}_\gamma)_1 & (\mathfrak{e}_\gamma)_2 & (\mathfrak{e}_\gamma)_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\delta_{\alpha1} & \delta_{\alpha2} & \delta_{\alpha3}\\ \delta_{\beta1} & \delta_{\beta2} & \delta_{\beta3}\\ \delta_{\gamma1} & \delta_{\gamma2} & \delta_{\gamma3}\end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить, что произведение тензоров Леви-Чивиты сводится к произведению детерминантов

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det\begin{pmatrix}\delta_{\alpha1} & \delta_{\alpha2} & \delta_{\alpha3}\\ \delta_{\beta1} & \delta_{\beta2} & \delta_{\beta3}\\ \delta_{\gamma1} & \delta_{\gamma2} & \delta_{\gamma3}\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}\delta_{\alpha'1} & \delta_{\beta'1} & \delta_{\gamma'1}\\ \delta_{\alpha'2} & \delta_{\beta'2} & \delta_{\gamma'2}\\ \delta_{\alpha'3} & \delta_{\beta'3} & \delta_{\gamma'3}\end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix}\delta_{\alpha1} & \delta_{\alpha2} & \delta_{\alpha3}\\ \delta_{\beta1} & \delta_{\beta2} & \delta_{\beta3}\\ \delta_{\gamma1} & \delta_{\gamma2} & \delta_{\gamma3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta_{\alpha'1} & \delta_{\beta'1} & \delta_{\gamma'1}\\ \delta_{\alpha'2} & \delta_{\beta'2} & \delta_{\gamma'2}\\ \delta_{\alpha'3} & \delta_{\beta'3} & \delta_{\gamma'3}\end{pmatrix}\right),$$

где в произведении детерминантов во втором множителе мы записали детерминант транспонированной матрицы. Таким образом произведение двух символов Леви-Чивиты свелось к вычислению детерминанта от произведения двух матриц. Рассмотрим это произведение матриц. Например, при умножении первой строчки первой матрицы на первый столбец второй матрицы возникает сумма, равная скалярному произведению двух ортонормированных базисных векторов:

$$\delta_{\alpha1}\delta_{\alpha'1} + \delta_{\alpha2}\delta_{\alpha'2} + \delta_{\alpha3}\delta_{\alpha'3} = \mathfrak{e}_\alpha\cdot\mathfrak{e}_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Обобщая это выражение на произведения других строк и столбцов, находим произведение двух полностью антисимметричных символов Леви-Чивита в виде детерминанта, в котором элементами являются символы Кронекера:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det\begin{pmatrix}\delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} & \delta_{\alpha\gamma'}\\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} & \delta_{\beta\gamma'}\\ \delta_{\gamma\alpha'} & \delta_{\gamma\beta'} & \delta_{\gamma\gamma'}\end{pmatrix}. \tag{VI.2.18}$$

Из этого выражения в качестве упражнения следует получить *формулы свертки произведения символов Леви-Чивиты по одному, двум и трем индексам*:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} &= \det\begin{pmatrix}\delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'}\\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'}\end{pmatrix} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'},\\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\alpha'},\\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 3! = 6.\end{aligned} \tag{VI.2.19}$$

Для нахождения обратной матрицы A^{-1}, введем понятие *минора*

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta\beta_2\beta_3}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}. \tag{VI.2.20}$$

Вычислим

$$M_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha'} = \frac{1}{2!}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta\beta_2\beta_3}A_{\beta\alpha'}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3} = \frac{1}{2!}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\alpha'\alpha_2\alpha_3}\det A = \frac{1}{2!}\,2!\,\delta_{\alpha\alpha'}\det A.$$

Значит, *элементы обратной матрицы* —

$$(A^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\det A}\,M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!\,\det A}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta\beta_2\beta_3}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3}. \tag{VI.2.21}$$

Из проведенных построений видно, что обратная матрица существует, только если $\det A \neq 0$.

Тогда можно легко записать дифференциал детерминанта, вычисляя его как сумму дифференциалов произведения трех элементов матрицы,

$$\mathrm{d}(\det A) = \frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta\beta_2\beta_3}\Big(\big(\mathrm{d}A_{\beta\alpha}\big)A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3} + A_{\beta\alpha}\big(\mathrm{d}A_{\beta_2\alpha_2}\big)A_{\beta_3\alpha_3} + A_{\beta\alpha}A_{\beta_2\alpha_2}\big(\mathrm{d}A_{\beta_3\alpha_3}\big)\Big) =$$
$$= \mathrm{d}A_{\beta\alpha}\cdot 3\,\frac{1}{3!}\,\epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3}\epsilon_{\beta\beta_2\beta_3}A_{\beta_2\alpha_2}A_{\beta_3\alpha_3} = \mathrm{d}A_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta} = \det A\cdot(A^{-1})_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}A_{\beta\alpha}. \quad \text{(VI.2.22)}$$

В итоге,

$$\mathrm{d}(\det A) = \mathrm{d}A_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta} = \det A\cdot(A^{-1})_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}A_{\beta\alpha}. \quad \text{(VI.2.23)}$$

Вернемся к тензорным объектам, для которых необходимо отличать ковариантные и контравариантные индексы. Напомним, что контравариантный метрический тензор (VI.2.14) как матрица является обратным к матрице тензора метрики с двумя ковариантными индексами. Тогда дифференциал детерминанта тензора метрики записывается формулой

$$\mathrm{d}\det g = \det g\cdot g^{\alpha\beta}\,\mathrm{d}g_{\beta\alpha}. \quad \text{(VI.2.24)}$$

Элемент площади $\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}$ с образующими $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{d}\boldsymbol{b}$ — это ковектор, направленный ортогонально плоскости образующих, с длиной, равной площади параллелограмма с образующими ребрами:

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{d}\boldsymbol{a}\times\mathrm{d}\boldsymbol{b}.$$

Наряду с таким вектором площади часто вводят антисимметричный тензор

$$\mathrm{d}^2\sigma^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}^2\Sigma_\gamma = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma}\mathrm{d}a^{\alpha'}\mathrm{d}b^{\beta'} = \mathrm{d}a^\alpha\mathrm{d}b^\beta - \mathrm{d}a^\beta\mathrm{d}b^\alpha,$$

для которого используют обозначение с символом внешнего произведения[22]

$$\mathrm{d}a^\alpha\wedge\mathrm{d}b^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}a^\alpha\mathrm{d}b^\beta - \mathrm{d}a^\beta\mathrm{d}b^\alpha\right).$$

Значит,

$$\mathrm{d}a^\alpha\wedge\mathrm{d}b^\beta = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2\sigma^{\alpha\beta}, \qquad \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}a^\alpha\wedge\mathrm{d}b^\beta.$$

• Зеркальная инверсия пространства

Рассмотрим пару векторных координатных пространств $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$: $V_{\mathbb{E}}$ построено как линейная оболочка на правой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathfrak{e}_1,\,\mathfrak{e}_2,\,\mathfrak{e}_3\}$, а $V_{\mathbb{P}}$ — на левой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathfrak{e}_1^{\mathbb{P}},\,\mathfrak{e}_2^{\mathbb{P}},\,\mathfrak{e}_3^{\mathbb{P}}\}$. Пространство $V_{\mathbb{P}}$ называют зеркальным, потому что левая базисная тройка получается при зеркальной инверсии пространства[23]. Зададим вопрос: как могут быть связаны тензорные величины[24], определенные на векторах этих пространств? Поскольку законы физики формулируются в терминах тензоров, что называют ковариантным описанием физических систем, ответ на этот вопрос позволяет сравнить $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$, зеркально сопряженные друг другу[25]. Итак, нас интересует, как тензоры $T_{\mathbb{E}}$ из $V_{\mathbb{E}}$ могут быть связаны с тензорами $T_{\mathbb{P}}$ из $V_{\mathbb{P}}$. В основу такого сравнения можно положить 4 постулата.

Первый постулат: координаты $r^\alpha_{\mathbb{P}}$ в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ связаны с координатами $r^\alpha_{\mathbb{E}}$ в реальном мире $V_{\mathbb{E}}$ соотношением

$$r^\alpha_{\mathbb{P}} = -r^\alpha_{\mathbb{E}}. \quad \text{(VI.2.25)}$$

Смысл этого постулата становится понятным, если рассмотреть преобразование зеркальной инверсии в реальном мире $V_{\mathbb{E}}$, которое определяется заменой исходного базиса на штрихованный

$$\{\mathfrak{e}_1,\,\mathfrak{e}_2,\,\mathfrak{e}_3\} \stackrel{\mathbb{P}}{\to} \{\mathfrak{e}'_1,\,\mathfrak{e}'_2,\,\mathfrak{e}'_3\} = \{-\mathfrak{e}_1,\,-\mathfrak{e}_2,\,-\mathfrak{e}_3\}. \quad \text{(VI.2.26)}$$

[22] Символ внешнего произведения $\wedge$ очень удобно использовать в координатном подходе для обозначения антисимметризации по индексам. В инвариантном подходе и при разложении тензорных величин по базису в координатном подходе символ внешнего произведения определяет антисимметризованное тензорное произведение базисных векторов. При вычислении интегралов по гиперповерхностям различной размерности в координатном подходе необходимо делать подстановку вместо базисных векторов элементов бесконечно малых направляющих на заданной гиперповерхности, сохраняя при этом символ антисимметризации так, как мы это сделали на примере 2-мерной поверхности.

[23] Если размерность пространства четная, то зеркальная инверсия всех координат сводится к повороту. Тогда рассматривают зеркальную инверсию нечетного числа координатных осей.

[24] Напомним определение тензора: полилинейная, не зависящая от выбора базиса функция на векторах $t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ldots)$ называется тензором с компонентами $t_{\alpha\beta\ldots}$, так что $t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ldots) = t_{\alpha\beta\ldots}a^\alpha b^\beta\ldots$, а при смене базиса компоненты тензора преобразуются, поскольку $t_{\alpha\beta\ldots} = t(\mathfrak{e}_\alpha,\mathfrak{e}_\beta,\ldots)$.

[25] Наше рассмотрение этого вопроса опирается на идеи В.Б. Берестецкого.

При такой инверсии штрихованный базис в $V_{\mathbb{E}}$ становится левым. Ясно, что при операции зеркального отражения пространства $V_{\mathbb{E}}$, которую обозначают символом $\mathbb{P}$, как мы это сделали в (VI.2.26), матрица преобразований координат совпадает со своей обратной и равна

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \tag{VI.2.27}$$

так что в зеркальном, штрихованном базисе пространства $V_{\mathbb{E}}$ согласно общему закону преобразования тензорных величин компоненты координат равны

$$r'^{\alpha}_{\mathbb{E}} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta} r^{\beta}_{\mathbb{E}} = -r^{\alpha}_{\mathbb{E}}. \tag{VI.2.28}$$

Мы определяем координаты точки $r^{\alpha}_{\mathbb{P}}$ в зеркальном базисе $\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_{1,2,3}$ зеркального пространство $V_{\mathbb{P}}$ так, чтобы они совпадали с координатами $r'^{\alpha}_{\mathbb{E}}$, которые получаются после перехода от правой тройки базисных векторов к левой в исходном пространстве $V_{\mathbb{E}}$

$$r^{\alpha}_{\mathbb{P}} = r'^{\alpha}_{\mathbb{E}} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta} r^{\beta}_{\mathbb{E}} = -r^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \tag{VI.2.29}$$

что также записывают в виде связи компонент контрвектора координат в зеркальных пространствах $V_{\mathbb{P}}$ и $V_{\mathbb{E}}$,

$$r^{\alpha}_{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta} r^{\beta}_{\mathbb{E}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)\, r^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \qquad \lambda_{\mathbb{P}} = +1. \tag{VI.2.30}$$

В этом случае говорят, что вектор координат имеет положительную пространственную четность $\lambda_{\mathbb{P}}$, и мы видим, что это значение четности задается по построению.

Второй постулат: ориентированный объем $\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}$ на базисной тройке в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3)$$

связан с ориентированным объемом $\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}$ на зеркально отраженной базисной тройке исходного пространства $V_{\mathbb{E}}$

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3)$$

соотношением

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3) = -\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3). \tag{VI.2.31}$$

Смысл этого постулата легко объяснить из самого определения ориентированного объема в пространствах $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$. Ориентация в пространстве задается по правилу «буравчика»: при повороте первого базисного вектора ко второму буравчик движется по третьему базисному вектору. Таким образом, ориентация в пространстве определяется выбором порядка базисных векторов, а ориентированный объем на упорядоченной ортонормированной базисной тройке принимается равным $+1$,

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3) = \mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3) = +1. \tag{VI.2.32}$$

Ясно, что после зеркальной инверсии в пространстве $V_{\mathbb{E}}$

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3) = \mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(-\mathfrak{e}_1, -\mathfrak{e}_2, -\mathfrak{e}_3) = -\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3) = -1,$$

т. е. на зеркальной ортонормированной тройке векторов в $V_{\mathbb{E}}$ ориентированный объем равен -1. В физике используют понятие буравчика. В нашей трактовке упорядоченная тройка базисных векторов означает, что при повороте от первого вектора ко второму буравчик движется в положительном направлении вдоль третьего вектора. В каждом пространстве свой буравчик, и в исходном, и в зеркальном. Это означает, что в каждом пространстве объем на базисной тройке положителен и равен единице. Поэтому прямое сравнение ориентированных объемов, определенных согласно упорядочению базисов в пространствах $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$, однозначно дает связь (VI.2.31), которую можно переписать в виде

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3) = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3). \qquad \lambda_{\mathbb{P}} = -1. \tag{VI.2.33}$$

В этом случае говорят, что ориентированный объем имеет отрицательную пространственную четность $\lambda_{\mathbb{P}}$ — четность относительно зеркальной инверсии 3-мерного евклидова пространства. Так как ориентированный объем — это число, инвариантное при преобразованиях поворота в пространстве, то он является скаляром, но с отрицательной пространственной четностью, а такой инвариант называют псевдоскаляром.

Третий постулат: полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma}$ в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ задается точно так же, как и тензор Леви-Чивиты $\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}$ в мире $V_{\mathbb{E}}$, т. е. на упорядоченных базисных тройках в обоих пространствах он полагается равным $+1$,

$$\epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{VI.2.34}$$

Раскроем эту формулировку более подробно.

Данное нами чуть выше определение ориентированного объема можно записать с помощью тензора Леви-Чивиты. В пространстве $V_{\mathbb{P}}$

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3) = \epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_1)^\alpha(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_2)^\beta(\mathfrak{e}^{\mathbb{P}}_3)^\gamma = \epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma}\delta^\alpha_1\delta^\beta_2\delta^\gamma_3 = \epsilon^{\mathbb{P}}_{123} = +1. \tag{VI.2.35}$$

Точно также в пространстве $V_{\mathbb{E}}$

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_1, \mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_2, \mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_3) = \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_1)^\alpha(\mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_2)^\beta(\mathfrak{e}^{\mathbb{E}}_3)^\gamma = \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\delta^\alpha_1\delta^\beta_2\delta^\gamma_3 = \epsilon^{\mathbb{E}}_{123} = +1. \tag{VI.2.36}$$

В итоге, (VI.2.35) и (VI.2.36) означают, что имеет место постулированное нами тождество (VI.2.34).

Тензор Леви-Чивиты в пространстве $V_{\mathbb{E}}$ при зеркальной инверсии (VI.2.28) преобразуется как тензор третьего ранга, т.е. свертывается с матрицей преобразования по каждому индексу,

$$\epsilon'^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{P}^{\alpha'}_{\alpha}\mathcal{P}^{\beta'}_{\beta}\mathcal{P}^{\gamma'}_{\gamma}\,\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha'\beta'\gamma'} = (-1)^3\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{VI.2.37}$$

Третий постулат (VI.2.34) означает, что связь тензора Леви-Чивиты $\epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma}$ в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ с тензором Леви-Чивиты $\epsilon'^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}$ после зеркальной инверсии в мире $V_{\mathbb{E}}$ имеет вид

$$\epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \epsilon'^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \lambda_{\mathbb{P}} = -1, \tag{VI.2.38}$$

т. е.

$$\epsilon^{\mathbb{P}}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}^{\alpha'}_{\alpha}\mathcal{P}^{\beta'}_{\beta}\mathcal{P}^{\gamma'}_{\gamma}\,\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha'\beta'\gamma'} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^3\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \lambda_{\mathbb{P}} = -1. \tag{VI.2.39}$$

Таким образом тензор Леви-Чивиты обладает отрицательной пространственной четностью, или, как говорят, он является псевдотензором 3-его ранга.

Из первых трех постулатов логически следует **правило:** из тензоров с определенной пространственной четностью мы можем строить их тензорные произведения, которые также будут обладать определенной пространственной четностью, равной произведению пространственных четностей тензоров в произведении.

Задача 53. Покажите, что частные производные ∂_α обладают положительной пространственной четностью.

Задача 54. Покажите, что символ Кронекера $\delta^\alpha_\beta = \partial_\beta r^\alpha$ — тензор второго ранга с положительной пространственной четностью.

Задача 55. Покажите, что свертка ковариантного индекса тензора с контравариантным индексом этого тензора не меняет пространственную четность.

Например, векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с положительной пространственной четностью будет обладать отрицательной пространственной четностью, поскольку это тензорное произведение включает в себя еще и тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad c^{\mathbb{E}}_\gamma = \epsilon^{\mathbb{E}}_{\gamma\alpha\beta}a^\alpha_{\mathbb{E}}b^\beta_{\mathbb{E}}.$$

Для тензорного произведения множителей с определенной пространственной четностью

$$\lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{c}] = \lambda_{\mathbb{P}}[\epsilon] \cdot \lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{a}] \cdot \lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{b}] = (-1) \cdot (+1) \cdot (+1) = -1,$$

так что $\boldsymbol{c}$ — это псевдовектор, а это значит, что

$$c^{\mathbb{P}}_\gamma = \lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{c}] \cdot \mathcal{P}^{\gamma'}_{\gamma}\,c^{\mathbb{E}}_{\gamma'} = \lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{c}] \cdot (-1)\,c^{\mathbb{E}}_\gamma = +c^{\mathbb{E}}_\gamma, \qquad \lambda_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{c}] = -1.$$

Псевдовектор называют также аксиальным вектором.

Еще пример. Скалярное произведение псевдовектора на вектор — это псевдоскаляр, который в случае, когда он принимает вещественные значения, называют также аксионом.

Приведенное нами наблюдение носит общий характер: если тензор ранга k в зеркальном пространстве $V_{\mathbb{P}}$ связан с исходным тензором в пространстве $V_{\mathbb{E}}$ соотношением

$$T_{\mathbb{P}}^{\alpha_1\cdots\alpha_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}_{\alpha'_k}^{\alpha_k} T_{\mathbb{E}}^{\alpha'_1\cdots\alpha'_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^k T_{\mathbb{E}}^{\alpha_1\cdots\alpha_k}, \tag{VI.2.40}$$

то при $\lambda_{\mathbb{P}} = -1$ говорят, что это — псевдотензор с отрицательной $\mathbb{P}$-четностью, а при $\lambda_{\mathbb{P}} = +1$, что тензор имеет положительную $\mathbb{P}$-четность. При введении новой физической величины, свойства которой относительно зеркальной инверсии пространства не определены по её построению из величин с известными пространственными четностями, необходимо указывать пространственную четность новой величины в качестве гипотезы модельного рассмотрения.

В качестве иллюстрации сделаем здесь ремарки о физически значимых величинах в евклидовом пространстве в случае нерелятивистской динамики. Будем полагать, что в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ время идентично времени в реальном мире $V_{\mathbb{E}}$, $t_{\mathbb{P}} = t$, т. е. время имеет положительную пространственную четность, так как время — скаляр. Отсюда сразу следует, что скорость $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ — вектор с положительной $\mathbb{P}$-четностью, так как скорость построена из дифференциала вектора координат $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ и дифференциала времени $\mathrm{d}t$, каждый из которых обладает положительной четностью относительно зеркальной инверсии пространства. Для определения свойств импульса при переходе в зеркальный мир, постулируем, что масса — это скаляр с положительной четностью. Тогда и импульс $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ — вектор с положительной $\mathbb{P}$–четностью. Наконец, момент импульса $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ включает в свое определение тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью, и, следовательно, момент импульса — псевдовектор.

В электродинамике мы согласуем, например, свойства векторов электрического и магнитного полей с эмпирическими данными о свойствах зеркальной симметрии законов электродинамики. Фактически мы считаем, что электродинамика инвариантна относительного зеркальной инверсии пространства. Два естествоиспытателя, один из пространства $V_{\mathbb{E}}$, а другой из $V_{\mathbb{P}}$, сопоставив законы электродинамики не смогут найти в них различия: уравнения Максвелла и уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле инвариантны относительно зеркальной инверсии пространства[26]. Поэтому описание всех процессов, сделанное наблюдателем в зеркальнном мире $V_{\mathbb{P}}$ и предоставленное наблюдателю в $V_{\mathbb{E}}$, будет признано наблюдателем в $V_{\mathbb{E}}$ абсолютно согласованным с законами, полученными в $V_{\mathbb{E}}$, так как законы электродинамики не позволяют установить какие-либо различия между законами, полученными в зеркальных друг другу мирах.

В теории слабого взаимодействия заряженные токи $\boldsymbol{J}$ устроены как разность вектора и псевдовектора, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{A}$, которая в зеркальном мире будет переходить в сумму вектора и псевдовектора с общим знаком минус, $-\boldsymbol{V} - \boldsymbol{A} \neq \pm\boldsymbol{J}$. Это значит, что реальный мир и его зеркальное отражение обладают разными свойствами, или, как говорят, слабое взаимодействие нарушает пространственную четность.

2.3 Изометрии евклидовой метрики

Найдем преобразования координат, которые не меняют вид метрики, — изометрии, которые оставляют тензор метрики инвариантным. Для этого сначала запишем закон преобразования метрики при произвольных обратимых заменах координат[27]:

$$\mathrm{d}\mathcal{C}^2 = g'_{\alpha'\beta'}\mathrm{d}r'^{\alpha'}\mathrm{d}r'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'}\Lambda_{\bullet\alpha}^{\alpha'}\Lambda_{\bullet\beta}^{\beta'}\mathrm{d}r^{\alpha}\mathrm{d}r^{\beta} = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}r^{\alpha}\mathrm{d}r^{\beta},$$

где матрица преобразований координат задается частными производными $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \partial_\beta r'^{\alpha}$. В этом выражении матрица смешанного типа $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$ имеет один контравариантный индекс α, который в матричной

[26] При зеркальной инверсии в уравнениях Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{H}} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{H}} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} = 4\pi\rho, \end{cases} \tag{VI.2.41}$$

необходимо провести замены в согласии со значениями пространственной четности всех величин:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \mapsto -\boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} \mapsto \boldsymbol{\mathcal{H}}, \quad \boldsymbol{j} \mapsto -\boldsymbol{j}, \quad \rho \mapsto \rho, \quad t \mapsto t, \quad \operatorname{div} \mapsto -\operatorname{div}, \quad \operatorname{rot} \mapsto -\operatorname{rot}.$$

И аналогичные преобразования необходимо провести в уравнениях движения частиц

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{e}{c}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}, \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Здесь $\boldsymbol{p} \mapsto -\boldsymbol{p}$, $E \mapsto E$, $\boldsymbol{v} \mapsto -\boldsymbol{v}$, $e \mapsto e$. Итог — все уравнения электродинамики инвариантны относительно зеркальной инверсии пространства. Другими словами, в каждом уравнении электродинамики тензорные величины обладают одной пространственной четностью.

[27] Заметим, что для определения изометрий метрики мы оперируем билинейной формой, которая дает бесконечно малый квадрат длины при малом изменении координат какого-либо физического объекта. Изменения координатной сетки типа сдвига даже на конечную величину никак не отражаются на значении этой билинейной формы, а матрица преобразования, выражающаяся через частные производные не зависит от величины сдвига. Т.е. сдвиги координатной сетки очевидным образом являются изометриями.

записи мы трактуем как номер строки в столбце, и один ковариантный индекс β, который мы трактуем как номер столбца в строке, так что $\Lambda^{\alpha}_{\bullet\beta}$ — это матрица 3×3, для которой можно пользоваться обычной операцией матричного умножения, и при этом расположение индексов у $\Lambda^{\alpha}_{\bullet\beta}$ однозначно задает законы преобразования тензора по каждому из индексов. Тензор метрики $g_{\alpha\beta}$ имеет 2 ковариантных индекса. Для того, чтобы использовать матричное умножение и при этом однозначно определять закон преобразования при смене базиса в векторном пространстве, введем *операцию транспонирования*. Транспонирование определяется инвариантно в любом базисе как координат, так и представлений группы преобразований. В случае 3-вектора с контравариантным индексом, который в матричных обозначениях нумерует позицию в столбце, транспонирование переводит вектор как набор значений в столбце в транспонированный вектор–строку с контравариантным индексом, который нумерует значения в строке, что мы указываем порядком следования индексов для использования матричного умножения,

$$\mathrm{d}x^{\alpha} \equiv \mathrm{d}x^{\alpha\bullet} \;\mapsto (\mathrm{d}x^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}x^{\alpha\bullet}. \tag{VI.2.42}$$

По построению транспонированный вектор $(\mathrm{d}x^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha}$ преобразуется транспонированной матрицей Λ^{T}: в матричных обозначениях

$$\mathrm{d}x'^{\mathrm{T}} = \mathrm{d}x^{\mathrm{T}}\circ\Lambda^{\mathrm{T}}, \tag{VI.2.43}$$

или в индексных

$$(\mathrm{d}x'^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha} = (\mathrm{d}x')^{\alpha\bullet} = \Lambda^{\alpha}_{\bullet\beta}\mathrm{d}x^{\beta\bullet} = (\mathrm{d}x^{\mathrm{T}})^{\bullet\beta}(\Lambda^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha}_{\beta} = (\mathrm{d}x^{\mathrm{T}}\circ\Lambda^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha}.$$

Из этих выкладок также видно, что переход к матричному умножению с транспонированием сочетается с ковариантными свойствами тензорных величин с соблюдением всех свойств преобразования по ковариантным и контравариантным индексам. Вместе с тем говорят, что транспонированные матричные величины (VI.2.42) преобразуются по транспонированному представлению.

После перехода к записи с привычным матричным умножением квадрат длины можно записать в терминах транспонированного контрвектора и матрицы метрики,

$$\mathrm{d}\mathcal{C}^2 = \mathrm{d}x^{\mathrm{T}}\circ\hat{g}\circ\mathrm{d}x, \qquad \hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \tag{VI.2.44}$$

а преобразование тензора метрики

$$g_{\alpha'\beta'} = g'_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}_{\bullet\alpha'}\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'} = (\Lambda^{\mathrm{T}})^{\bullet\alpha}_{\alpha'}g'_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\bullet\beta'} \tag{VI.2.45}$$

можно переписать в виде умножения матриц,

$$\hat{g} = \Lambda^{\mathrm{T}}\circ\hat{g}'\circ\Lambda. \tag{VI.2.46}$$

Тогда и закон изометрии, когда $\hat{g}' = \hat{g}$, согласно (VI.2.46) можно записать с матричным умножением в следующем виде

$$\hat{g} = \Lambda^{\mathrm{T}}\circ\hat{g}\circ\Lambda, \tag{VI.2.47}$$

откуда сразу следует специальное условие на детерминант матрицы преобразований[28]

$$(\det\Lambda)^2 = 1. \tag{VI.2.48}$$

В декартовых координатах метрика — единичная матрица: $\hat{g} = \mathbb{1}$, а изометрия удовлетворяет условию

$$\Lambda^{T}\circ\Lambda = \mathbb{1}. \tag{VI.2.49}$$

что задает ортогональные преобразования 3-х пространственных координат плоского пространства с евклидовой метрикой[29].

Преобразования, удовлетворяющие условию (VI.2.49), называются ортогональными (символ O), а условию $|\det\Lambda| = 1$ — специальными (символ S), а при $\det\Lambda = 1$ — собственными. Собственные непрерывные изометрии — это повороты и пространственные сдвиги, когда $\Lambda^{\alpha}_{\bullet\beta} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\bullet\beta}$ и $\Lambda^{\alpha}_{\bullet\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, соответственно, причем в группе SO(3) поворотов 3-мерного евклидова пространства $r'^{\alpha} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\bullet\beta}(\boldsymbol{\phi})\, r^{\beta}$ в случае бесконечно малого поворота $\boldsymbol{r}' \approx \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}$ при $\boldsymbol{\phi}\to 0$, а в группе трансляций $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}$, где сдвиг $\boldsymbol{a}$ не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства $\boldsymbol{r}\mapsto -\boldsymbol{r}$ (символ $\mathbb{P}$) при нечетном числе

[28] В обозначениях для матриц символом S указывают на то, что матрица преобразований удовлетворяет специальному условию на значения детерминанта $|\det\Lambda| = 1$.

[29] Это условие символьно обозначают как O(3).

его осей приводит к $\det\Lambda = -1$, а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией поворотов с отражением. В итоге, изометрии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей. Это неоднородная (inhomogeneous, символ I) группа ISO(3), к которой можно добавить дискретное преобразование зеркального отражения $\mathbb{P}$. Преобразования SO(3) вместе с $\mathbb{P}$ образуют группу O(3).

Поскольку законы механики записываются в евклидовом пространстве во всех декартовых системах отсчета одинаково, преобразование координат при переходе из одной декартовой системы в другую должно быть изометрией евклидовой метрики векторных пространств координат и скоростей, а действие должно быть евклидовым скаляром, т. е. инвариантом, так как иначе по значению действия мы могли бы отличить одну декартову систему от другой, что означало бы нарушение принципов однородности и изотропности евклидова пространства для замкнутой физической системы. При этом время, течение которого не зависит от координат, в такой механике также является скаляром. Отсюда следует, что функции Лагранжа и Гамильтона — скаляры, а скорость $\mathrm{d}r^\alpha/\mathrm{d}t = v^\alpha$ и количество движения $p_\alpha = \partial_\alpha S$ — это вектор и ковектор. Скорости и координаты при поворотах преобразуются по одному и тому же закону, только если углы поворотов не зависят от времени и координат. Эта эквивалентность преобразований скоростей и координат нарушалась бы, если бы угол поворота зависел от времени или от координат, т. е. если повороты становились бы локальными.

Что касается трансляций, то зависимость сдвига координат от времени приводит к нарушению эквивалентности преобразований скорости и дифференциалов координат. В частности, специальное преобразование Галилея — это трансляция с параметром сдвига $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}_a\, t$. Допустимость линейной зависимости сдвига координат от времени, как и независимость угла поворота от времени являются следствиями галилевского постулата об инерциальных системах.

В специальной теории относительности, во-первых, зависимость параметра трансляции от времени становится недопустимой, что исключает из числа сдвигов специальные преобразования Галилея, но оставляет в силе все другие перечисленные нами изометрии евклидова пространства как преобразования, которые не изменяют уравнения движения. Во-вторых, само евклидово пространство становится подмножеством более общей структуры — пространства-времени Минковского с более широкой группой изометрий, включающей в себя преобразования Лоренца, которые не только сохраняют уравнения движения, но оставляют инвариантным действие для релятивистских частиц и полей.

2.4 Градиент, дивергенция, ротор

• Ковекторный оператор $\boldsymbol{\nabla}$

Определим ковариантный вектор «набла». Пусть задан базис разложения бесконечно малой вариации координат, т. е., как говорят, базис в касательном пространстве, так что

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha,$$

где $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ или $\mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha$ — инфинитезимальный вектор длины при вариации координат. Тогда в двойственном векторном пространстве линейных функций на векторах касательного векторного пространства для ковекторов вводится базис $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha$, который определяется соотношением

$$\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha \cdot \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\alpha_\beta, \tag{VI.2.50}$$

где произведение ковектора с номером «альфа» $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha$ на вектор с номером «бета» $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta$ понимается как произведение строки $(\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha)_\mu$ на столбец $(\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta)^\mu$, как это и должно быть при вычислении значения линейной функции на векторе, в данном случае функции $\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha$ на векторе $\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta$ (см. сноску 17 на стр. 309). *По определению ковекторный оператор набла задается как*

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}^\alpha}. \tag{VI.2.51}$$

В случае, когда исходный базис ортонормирован

$$\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha \cdot \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \tag{VI.2.52}$$

базис в ковариантном пространстве совпадает с базисом в исходном векторном, контравариантном пространстве

$$\boldsymbol{\mathfrak{h}}^\alpha = \delta^{\alpha\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta,$$

и ковариантный оператор принимает вид

$$\nabla = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\beta \delta^{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathcal{C}^\alpha} = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}^\alpha}. \tag{VI.2.53}$$

В нашем изложении понятий ротора, градиента и дивергенции мы далее будем использовать только ортонормированные базисы, так что везде будет подразумеваться именно (VI.2.53).

Для примера, в декартовых координатах $\mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha = \mathrm{d}r^\alpha = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ и $\nabla_\alpha = \partial/\partial r^\alpha$, т. е.

$$\nabla = \mathfrak{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

а в базисе сферических координат (VI.2.1) инфинитезимальный вектор длины, записанный в компонентах $\mathrm{d}\mathcal{C}^\alpha = (\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\theta, r\sin\theta \mathrm{d}\phi)$, согласно определению (VI.2.51) задает

$$\nabla = \mathfrak{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathfrak{e}_\phi \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}.$$

Действие ковектора набла переводит скаляр f в ковектор, который называют градиентом f:

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{grad} f, \qquad (\nabla f)_\alpha = \nabla_\alpha f. \tag{VI.2.54}$$

Градиент связан с производной функции по направлению $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}^2 = 1$)

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{u}} f \stackrel{\text{def}}{=} f(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\mathcal{C}\,\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}\mathcal{C}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla f,$$

так что этот дифференциал максимален в некотором направлении $\boldsymbol{u}_*$, и, следовательно, градиент указывает направление и скорость максимального роста функции в точке. Направление градиента ортогонально к касательной линии уровня функции $\boldsymbol{u}_\parallel$, т. е. постоянного значения функции, когда $\mathrm{d}_{\boldsymbol{u}_\parallel} f = 0$.

Вычислим grad r^2 в декартовых координатах.

$$\nabla_\alpha r^2 = \partial_\alpha r^\beta r^\beta = 2r^\beta \partial_\alpha r^\beta = 2r^\beta \delta^\beta_\alpha = 2r_\alpha.$$

В векторных обозначениях

$$\mathrm{grad}\ r^2 = 2\boldsymbol{r}.$$

Теперь легко вычислить grad r, пользуясь дифференцированием сложной функции,

$$\nabla_\alpha r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r^2}\partial_\alpha r^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} 2r_\alpha = \frac{1}{2r}\,2r_\alpha = \frac{r_\alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\ r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Скалярное произведение ковектора набла с вектором называется дивергенцией

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\cdot\boldsymbol{a} = \nabla_\alpha a^\alpha. \tag{VI.2.55}$$

Вычислим $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$ в декартовых координатах.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = \partial_\alpha r^\alpha = \delta^\alpha_\alpha = 3.$$

В декартовых координатах евклидова пространства (не различаем верхние и нижние индексы) векторное произведение набла с вектором $\boldsymbol{a}$ образует вектор ротора[30]

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\times\boldsymbol{a}, \qquad (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma. \tag{VI.2.56}$$

Отсюда, например,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{a} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha\nabla_\beta a_\gamma = 0,$$

поскольку свертка антисимметричной матрицы с симметричной тождественно равна нулю.

Задача 56. Докажите, что свертка симметричной матрицы $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ с антисимметричной $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}$ тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

[30] В общем случае ротор определяется для ковектора как преобразование в контрвектор: $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma$, — это пример перехода от антисимметричного ковариантного тензора второго ранга $\frac{1}{2}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta)$ к контрвектору в 3-мерном пространстве, причем такая операция называется дуальным преобразованием.

Вычислим $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$ в декартовых координатах.

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{r})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta r_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\beta\gamma} = 0,$$

поскольку в декартовых координатах мы опять имеем свертку антисимметричного и симметричного тензоров по двум «немым» индексам.

Лапласианом называют скаляр

$$\triangle \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \nabla, \tag{VI.2.57}$$

который в декартовых координатах сводится к $\triangle = \partial_\alpha \partial_\alpha$.

Задача 57. Вычислите в уме, считая вектор $\boldsymbol{k}$ постоянным:

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \qquad \operatorname{div}\{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}, \qquad \operatorname{rot}\{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\}.$$

Задача 58. Вычислить: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор.

Задача 59. Вычислить: $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(r)$, где $r = |\boldsymbol{r}|$.

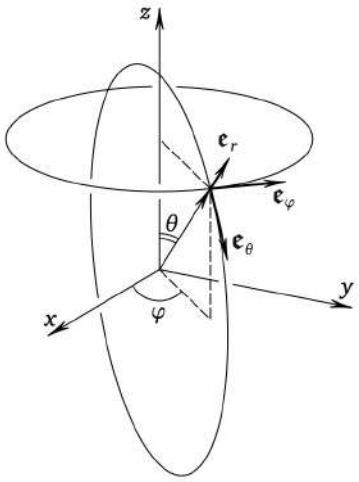


Рис. 6.1. Базис в сферических координатах.

• Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе

В сферических координатах базис касательных к координатной сетке зависит от точки пространства (для наглядности продублируем здесь рис. 6.1). Поэтому необходимо учитывать его изменения, которые легко установить графически, вычисляя изменения проекций базисных векторов при малом смещении точки в сферических координатах на сами базисные орты. Такая операция вычитания двух векторов фактически подразумевает параллельный перенос орт в исходную точку. Докажем, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta \mathrm{d}\theta + \mathbf{e}_\phi \sin\theta\,\mathrm{d}\phi,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r \mathrm{d}\theta + \mathbf{e}_\phi \cos\theta\,\mathrm{d}\phi,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi - \mathbf{e}_\theta \cos\theta\,\mathrm{d}\phi.
\end{aligned} \tag{VI.2.58}$$

■ При изменении радиальной координаты на $\mathrm{d}r$ тройка базисных векторов остается прежней:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} = 0.$$

При изменении полярного угла $\mathrm{d}\theta$ базисный вектор $\mathbf{e}_r$ описывает на единичной сфере дугу длиной $\mathrm{d}\theta$ в направлении $\mathbf{e}_\theta$, где угол в радианах есть длина дуги на единичном радиусе, поэтому коэффициент при $\mathbf{e}_\theta$ равен единице, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta.$$

При изменении полярного угла на $\mathrm{d}\theta$, измеряемого в радианах, базисный вектор $\mathbf{e}_\theta$ движется по касательной к единичной сфере, так что его изменение образует дугу $\mathrm{d}\theta$, но это изменение направлено к центру сферы, т. е. в направлении против $\mathbf{e}_r$, поскольку известно, что при движении по окружности скорость направлена по касательной к окружности, а изменение скорости, ускорение направлено к центру окружности,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r.$$

При таком же изменении полярного угла на $\mathrm{d}\theta$ базисный вектор $\mathbf{e}_\phi$ остается в той же точке на плоскости $(x,\, y)$ под тем же углом ϕ к оси x, т. е. этот базисный вектор не изменяется и

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} = 0.$$

При повороте вокруг оси z на угол $\mathrm{d}\phi$ изменяется проекция вектора $\mathbf{e}_r$ в плоскости $(x,\, y)$, ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна $\sin\theta$, так что изменение $\mathbf{e}_r$ образует дугу $\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ в направлении $\mathbf{e}_\phi$:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin\theta\,\mathbf{e}_\phi.$$

Аналогично, при повороте вокруг оси z на угол $\mathrm{d}\phi$ изменяется проекция вектора $\mathbf{e}_\theta$ в плоскости $(x,\, y)$, ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна $\cos\theta$, так что изменение $\mathbf{e}_\theta$ образует дугу $\cos\theta\,\mathrm{d}\phi$ в направлении $\mathbf{e}_\phi$:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta\,\mathbf{e}_\phi.$$

Длина дуги, которая очерчена концом единичного вектора $\mathbf{e}_\phi$ при повороте вокруг оси z на угол $\mathrm{d}\phi$, составляет величину $\mathrm{d}\phi$. Такое изменение вектора $\mathbf{e}_\phi$ направлено от точки на единичной окружности к её центру в плоскости $(x,\, y)$. В декартовых координатах единичный вектор в направлении радиус-вектора, если он лежит в плоскости $(x,\, y)$ (обозначим его $\mathbf{e}_{xy}$), имеет компоненты $\mathbf{e}_{xy} = (\cos\phi,\, \sin\phi,\, 0)$, так что направление от точки на окружности к центру задается вектором $-\mathbf{e}_{xy}$, а значит,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy},$$

причем $\mathbf{e}_{xy}\cdot\mathbf{e}_\phi = 0$. Очевидно, что скалярные произведения вектора $\mathbf{e}_{xy}$ с базисными векторами сферических координат, которые в декартовых координатах имеют компоненты

$$\mathbf{e}_r = (\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta),$$
$$\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, -\sin\theta),$$
$$\mathbf{e}_\phi = (-\sin\phi,\, \cos\phi,\, 0),$$

легко вычисляются в явном виде,

$$\mathbf{e}_{xy}\cdot\mathbf{e}_r = \sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \sin\theta,$$
$$\mathbf{e}_{xy}\cdot\mathbf{e}_\theta = \cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \cos\theta,$$
$$\mathbf{e}_{xy}\cdot\mathbf{e}_\phi = -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi = 0.$$

В итоге,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

■

Задача 60. Используя выражения для дифференциалов базисных векторов в (VI.2.58) и правило Лейбница дифференцирования произведения, проверьте, что

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\phi) = \frac{\partial}{\partial\phi}(\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\phi) = 0,$$

как это и должно быть для ортономированного базиса.

Распишем лапласиан в виде суммы скалярных произведений

$$\triangle = \nabla\cdot\nabla = \left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\right)\cdot\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\cdot\nabla + \mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}\cdot\nabla + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\cdot\nabla,$$

чтобы вычислить каждый член суммы почленно. Тогда, оставляя при дифференцировании в уме только

вклады с ненулевыми скалярными произведениями ортонормированных базисных векторов, найдем, что

$$\mathfrak{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\nabla = \mathfrak{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mathfrak{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathfrak{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\right\} = (\mathfrak{e}_r\cdot\mathfrak{e}_r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{r\partial\theta}\nabla &= \mathfrak{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{r\partial\theta}\left\{\mathfrak{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathfrak{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\right\} = \\ &= (\mathfrak{e}_\theta\cdot\mathfrak{e}_\theta)\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r\partial\theta^2}\right\} = \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_\phi \cdot \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\nabla &= \mathfrak{e}_\phi \cdot \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\left\{\mathfrak{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathfrak{e}_\phi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\right\} = \\ &= (\mathfrak{e}_\phi\cdot\mathfrak{e}_\phi)\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \frac{\partial^2}{r\sin\theta\partial\phi^2}\right\} = \\ &= \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{r^2\partial\theta} + \frac{\partial^2}{r^2\sin^2\theta\partial\phi^2},\end{aligned}$$

и в итоге,

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \tag{VI.2.59}$$

или

$$\triangle f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right\}. \tag{VI.2.60}$$

Задача 61. Используя графические построения для изменения базисных векторов в полярных координатах, вычислите оператор Лапласа на плоскости

$$\triangle_{2\mathrm{D}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Подсказка: для проверки результата в соотношениях (VI.2.58) зафиксируйте угол $\theta = \pi/2$, $\mathrm{d}\theta = 0$ и сравните с явными построениями в начертательной геометрии.

Вводят также оператор сдвига радиальной координаты, действующий на функции от сферических координат,

$$\hat{k}_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

для которого

$$\hat{k}_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

а также угловую часть оператора Лапласа (см. пункт, посвященный описанию орбитального момента вращения на стр. 169 в разделе **3.3 Представление с моментом вращения** j, **§3. Представления** $\mathfrak{su}(2)$ главы 3, и формулу (III.3.24))

$$\Delta_{\theta,\phi} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2},$$

так что

$$\triangle f = \hat{k}_r^2 f + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta,\phi} f. \tag{VI.2.61}$$

Оператор сдвига по радиусу определяется на функциях вида

$$\hat{k}_r\left\{\frac{1}{r}\,u(r)\right\} = \frac{1}{r}\,u'(r).$$

Поэтому, рассматривая экспоненту от оператора как ряд Тейлора по степеням оператора, найдем

$$\mathrm{e}^{\hat{k}_r a}\,\frac{1}{r}\,u(r) = \sum_n \frac{1}{n!}a^n\frac{1}{r}\,u^{(n)}(r) = \frac{1}{r}\,u(r+a).$$

В частности, функции

$$\Phi_k(r) = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$$

являются собственными для генератора сдвига по радиусу $\hat{p}_r = -i\hat{k}_r$:

$$\hat{p}_r\Phi_k(r) = k\,\Phi_k(r).$$

Если собственное значение вещественное, $k \in \mathbb{R}$, то собственная функция убывает на бесконечности.

Оператор Лапласа играет важную роль в квантовой механике: оператор импульса в пространстве амплитуд вероятности Ψ имеет вид $\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$, так что кинетическая энергия

$$\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}\,\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi,$$

и в уравнении Шрёдингера

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi(t,\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\Psi(t,\boldsymbol{r})$$

необходимо знать, как лапласиан действует на волновую функцию $\Psi(t,\boldsymbol{r})$.

Тем же способом записи действия оператора набла в базисе сферических координат можно вычислить

$$\operatorname{grad} r = \nabla r = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_r\frac{\partial r}{\partial r} = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \nabla\cdot(r\boldsymbol{\mathfrak{e}}_r) = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_r^2\frac{\partial r}{\partial r} + \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\theta^2\frac{1}{r}\,r + \boldsymbol{\mathfrak{e}}_\phi^2\frac{1}{r\sin\theta}\,r\sin\theta = 3,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{r} = \nabla\times(r\boldsymbol{\mathfrak{e}}_r) = \frac{\partial r}{\partial r}\,\boldsymbol{\mathfrak{e}}_r\times\boldsymbol{\mathfrak{e}}_r + \frac{1}{r}\,\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\theta\times(r\,\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\phi\times(r\sin\theta\,\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\phi) = 0.$$

Полезные упражнения по векторному анализу можно найти в сборнике задач по теоретический физике из заданий МФТИ [13].

Кроме того, здесь уместно заметить, что для более глубокого понимания векторного анализа следует ознакомиться с современным языком рассмотрения интегралов по контурам и поверхностям на языке дифференциальных форм (см. [6]).

§3. Проективные представления группы Ли

Фазовые множители, ассоциативность и тривиальные 2-коциклы, центральные заряды, гомотопические классы циклов.

Представление группы Ли $\mathfrak{G} \mapsto T(\mathfrak{G}) = G$ при действии G на состояния гильбертова пространства может включать в себя введение фазовых множителей $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$, которые зависят от групповых координат A элементов группы g_A, так что

$$g_A\cdot g_B \overset{T}{\mapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(A,B)}\,G_A\cdot G_B, \tag{VI.3.1}$$

Поскольку координаты определяются через перекрытия открытых областей многообразия в заданном атласе координатных карт, то фазы $\Phi(A,B)$, вообще говоря, зависят от последовательностей координатных областей, по которым были указаны пути перехода к групповым координатам элементов в атласе карт, если, например, отсчитывать эти координаты от координат единичного элемента (обычно координаты единичного элемента полагают равными нулю). Это значит, что фазовые множители зависят от путей, по которым были гладким образом достигнуты координаты элементов группы при перемещении от начала отсчета, отвечающего единице группы. Математики доказывают, что при наличии экспоненциального представления эти тонкости становятся элементарными: зависимости от путей нет, а фазовые множители сводятся к единицам.

Так как переход от группы к представлению является гомоморфизмом, введение фаз должно сохранять ассоциативность группового умножения, Следовательно,

$$(g_A\cdot g_B)\cdot g_C = g_A\cdot(g_B\cdot g_C) \overset{T}{\mapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(A,B)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(A*B,C)}\,G_A\cdot G_B\cdot G_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(B,C)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(A,B*C)}\,G_A\cdot G_B\cdot G_C,$$

где звездочкой мы обозначили координаты композиции элементов группы:

$$g_A\cdot g_B = g_{A*B}.$$

В итоге, фазовые множители в представлении группы с необходимостью удовлетворяют тождеству

$$\Phi(A,B)+\Phi(A*B,C)=\Phi(B,C)+\Phi(A,B*C). \tag{VI.3.2}$$

Эти соотношения для фаз, которые называют «два-коциклами», заведомо удовлетворяются в случае, если

$$\Phi(A,B)=\Phi_0(A*B)-\Phi_0(A)-\Phi_0(B), \tag{VI.3.3}$$

т. е., как говорят, в случае тривиального 2-коцикла. В самом деле, подстановка тривиального 2-коцикла (VI.3.3) в (VI.3.2) дает

$$\begin{aligned}\Phi_0(A*B)-\Phi_0(A)-\Phi_0(B)+\Phi_0(A*B*C)-\Phi_0(A*B)-\Phi_0(C)=\\ =\Phi_0(B*C)-\Phi_0(B)-\Phi_0(C)+\Phi_0(A*B*C)-\Phi_0(A)-\Phi_0(B*C)\quad\Rightarrow\\ \Phi_0(A*B*C)=\Phi_0(A*B*C),\end{aligned}$$

что верно, так как фаза $\Phi_0(A*B*C)$ в силу ассоциативности записана для одного и того же группового элемента.

В случае экспоненциального представления элементов компактной группы Ли в терминах групповых координат $\boldsymbol{a}$ тривиальный 2-коцикл — это скаляр, линейный по координатам: $\Phi_0(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{f}_0,\boldsymbol{a})$, где скалярное произведение вектора $\boldsymbol{f}_0$ на вектор групповой координаты определяется с помощью конформно евклидовой метрики Киллинга, и все фазовые множители обращаются в единицы.

В общем случае в пространстве групповых координат можно ввести классы эквивалентности 2-коциклов: одному классу принадлежат коциклы, которые отличаются на тривиальный. Наличие в группе Ли классов эквивалентности 2-коциклов, отличных от тривиального, указывает на то, что представление является существенно проективным. Если класс эквивалентности единственный и, следовательно, тривиальный, то представление изоморфно экспоненциальному и проективность тривиальна.

Рассмотрим установленные соотношения вблизи единичного элемента группы e, координаты которого положим равными нулю. Ясно, что $\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$, так как $(e\cdot e)\cdot e=e\cdot e$, откуда $\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})+\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})=\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Тогда из (VI.3.2) при $g_A=g_B=e$ следует, что

$$\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})+\Phi(\mathbf{0},\boldsymbol{c})=\Phi(\mathbf{0},\boldsymbol{c})+\Phi(\mathbf{0},\boldsymbol{c})\quad\Rightarrow\quad\Phi(\mathbf{0},\boldsymbol{c})\equiv 0,$$

а при $g_B=g_C=e$

$$\Phi(\boldsymbol{a},\mathbf{0})+\Phi(\boldsymbol{a},\mathbf{0})=\Phi(\mathbf{0},\mathbf{0})+\Phi(\boldsymbol{a},\mathbf{0})\quad\Rightarrow\quad\Phi(\boldsymbol{a},\mathbf{0})\equiv 0.$$

Поэтому в линейном приближении по каждому вектору групповых координат возле единичного элемента имеет место следующее выражение для фазы

$$\Phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\overset{\text{tangent}}{=}k_{\alpha\beta}\,a^\alpha b^\beta. \tag{VI.3.4}$$

Тогда из

$$g_{\boldsymbol{a}}\cdot g_{\boldsymbol{b}}\overset{\text{tangent}}{=}g_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\cdot g_{\boldsymbol{b}}\cdot g_{\boldsymbol{a}}$$

в проективном представлении (VI.3.1) в приближении линейной зависимости от векторов в касательном пространстве согласно

$$g_{\boldsymbol{a}}\cdot g_{\boldsymbol{b}}\overset{T}{\mapsto}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(A,B)}\,G_A\cdot G_B\overset{\text{tangent}}{=}(1+\mathrm{i}k_{\alpha\beta}\,a^\alpha b^\beta)(\mathbb{1}-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha-\mathrm{i}\Gamma_\beta b^\beta+\mathrm{i}^2\Gamma_\alpha\Gamma_\beta a^\alpha b^\beta)$$

и

$$g_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\cdot g_{\boldsymbol{b}}\cdot g_{\boldsymbol{a}}\overset{T}{\mapsto}G_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(B,A)}\,G_B\cdot G_A$$

найдем равенство

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i}k_{\alpha\beta}\,a^\alpha b^\beta)(\mathbb{1}-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha-\mathrm{i}\Gamma_\beta b^\beta+\mathrm{i}^2\Gamma_\alpha\Gamma_\beta a^\alpha b^\beta)\overset{\text{tangent}}{=}\\ \overset{\text{tangent}}{=}(\mathbb{1}-\mathrm{i}\Gamma_\gamma\,f^\gamma_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta)(1+\mathrm{i}k_{\beta\alpha}\,a^\alpha b^\beta)(\mathbb{1}-\mathrm{i}\Gamma_\alpha a^\alpha-\mathrm{i}\Gamma_\beta b^\beta+\mathrm{i}^2\Gamma_\beta\Gamma_\alpha a^\alpha b^\beta).\end{aligned}$$

После сокращения подобных членов устанавливаем коммутационные соотношения для генераторов в проективном представлении

$$[\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta]=\mathrm{i}f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma+\mathrm{i}z_{\alpha\beta}, \tag{VI.3.5}$$

где введены постоянные величины — центральные заряды

$$z_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}k_{\alpha\beta}-k_{\beta\alpha}=-z_{\beta\alpha}, \tag{VI.3.6}$$

которые антисимметричны относительно перестановки индексов и, как и всякие числа, коммутируют с матрицами генераторов,

$$[z_{\alpha\beta}, \Gamma_\gamma] = 0. \tag{VI.3.7}$$

Коммутационные соотношения в проективном представлении будут изоморфны алгебре группы Ли, если переопределить генераторы преобразованием сдвига на численный ковектор ϕ_α

$$\tilde{\Gamma}_\alpha \equiv \Gamma_\alpha + \phi_\alpha, \tag{VI.3.8}$$

откуда

$$[\tilde{\Gamma}_\alpha, \tilde{\Gamma}_\beta] = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma + \mathrm{i} z_{\alpha\beta} = \mathrm{i} f^\gamma_{\alpha\beta}\tilde{\Gamma}_\gamma + +\mathrm{i}(z_{\alpha\beta} - f^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma),$$

при условии

$$z_{\alpha\beta} = f^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma. \tag{VI.3.9}$$

В этом случае тождества Якоби для генераторов с тильдой выполняются.

Если центральные заряды не удовлетворяют условию преобразования алгебры проективного представления к алгебре исходной группы Ли согласно (VI.3.9), то проективное представление не имеет отношения к представлениям исходной группы Ли, а реализует представление группы с другой алгеброй, в которой центральные заряды отличны от нуля.

Важно подчеркнуть, что если 2-коциклы в многообразии группы тривиальны, то все фазы можно положить равными нулю. Именно такие точные представления групп мы и рассматриваем в основном тексте книги. Вместо точных необходимо рассматривать проективные представления, если множество классов эквивалентности 2-коциклов отлично от множества с единственным элементом, который является тривиальным 2-коциклом.

В математической литературе доказываются теоремы о существенно проективных представлениях групп Ли, а именно, критерии в виде отсутствия центральных зарядов и наличия нетривиальной фундаментальной группы π_1— группы гомотопических классов замкнутых контуров (циклов) в многообразии групповых координат.

Второе фундаментальное представление SU(3). При определении матриц корневых генераторов алгебры $\mathfrak{su}(3)$ в **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3 возникает вопрос о знаке матричных элементов понижающих операторов:

$$\langle\bar{d}|\big(\hat{U}_-|\bar{s}\rangle\big) = \pm 1, \quad \langle\bar{d}|\big(\hat{V}_-|\bar{u}\rangle\big) = \pm 1, \quad \langle\bar{u}|\big(\hat{U}_-|\bar{d}\rangle\big) = \pm 1,$$

по сравнению с выбором положительного знака для аналогичных матричных элементов в первом фундаментальном представлении, что задает явный вид матриц Гелл-Манна (III.4.28) в разделе **4.3 Матрицы Гелл-Манна** главы 3. При этом выбор знака «минус» во всех трех случаях, перечисленных выше, гарантирует, что коммутаторы матриц генераторов воспроизводят алгебру Ли группы SU(3). Вместе с тем, если задать проективное представление, в котором фаза, зависящая от групповых координат в экспоненциальном представлении групповых элементов, определяется выражением

$$\Phi_0 = \pi\,(\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{a})\,\frac{1}{|\boldsymbol{a}|},$$

где вектор $\boldsymbol{f}_0$ имеет нулевые компоненты вдоль групповых координат с номерами генераторов подалгебры Картана $\{3; 8\}$ и равные единице компоненты вдоль остальных шести координат с номерами $\{1; 2; 4; 5; 6; 7\}$, которые отвечают корневым генераторам:

$$\boldsymbol{f}_0 = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0),$$

то по любому из этих номеров корневые генераторы просто сменят знак, что также приведет к смене знака у рассматриваемых матричных элементов корневых генераторов. Поэтому смена знака этих матричных элементов задает проективное представление, но в силу тривиальности 2-коцикла, заданного фазой Φ_0, это проективное представление для группы SU(3), в которой в силу экспоненциального представления ее элементов нет нетривиальных 2-коциклов, эквивалентно второму фундаментальному представлению группы. А именно, структурные константы группы выражаются через корни и их скалярные произведения, а сами корни зависят от выбора системы групповых координат, и в разных координатах для одной и той же группы могут получиться разные структурные константы. Для двух разных представлений группы, например, для первого и второго фундаментальных представлений группы SU(3) можно так согласовать фазы, что групповые координаты и структурные константы будут одинаковыми. Это сделано в **§ 4. Представления** $\mathfrak{su}(3)$ главы 3.

Предметный указатель

Грассман Г., 53

Дирак П., 21, 23

Казимир Х., 29
Картан Э., 29
Кронекер Л., 308

Леви-Чивита Т., 311
Ли С., 6
Лоренц Х., 319

Минковский Г., 319

Паули В., 41

алгебра
— $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, 126
— $\mathfrak{so}(4)$, 279
— $\mathfrak{su}(2)$, 132
— $\mathfrak{su}(3)$, 135
— Вирасоро, 127
— Витта, 127
— Грассмана, 53
— Ли, 12, 15, 70
— — простая, компактная, 123
— абелева, 12, 162
— ассоциативная, 129
— генераторов, 15
— нильпотентная, 79, 161
— орбитального момента, 18
— разрешимая, 162
амплитуда вероятности, 56, 276, 294, 300
антикоммутатор, 42
антисимметрия
— скобки Ли, 69
антитриплет SU(3), 190, 228
античастица, 180, 190
аромат кварка, 177, 187
ассоциативность, 8, 56, 69
атлас многообразия, 57

базис, 23, 28, 55, 72, 76, 89, 304
— Картана–Вейля, 105
— векторный, 309
— глобальный, 306
— декартов, 28, 304
— квантовых состояний, 297, 300
— — совместный, 29, 300
— ковариантный, 319
— ковекторный, 308, 309
— контравариантный, 319
— неприводимого представления, 145, 147
— ортонормированный, 56, 91, 296, 306, 319
— собственных векторов, 28, 300
— собственных состояний
— — совместный, 298
— совместный, 28
— спиновый, 32
— стандартное представление, 26
барион, 187
барионное число, 174, 255
бинарная операция, 58
бозон, 54
— калибровочный, 252

вектор, 18, 23, 304
— Рунге–Ленца–Лапласа, 274
— базисный, 307
— бра-, 23, 27, 96, 97, 103, 295, 296
— весовой, 89, 102, 147, 159
— кет-, 23, 27, 96, 97, 102, 103, 178, 295, 296
— корневого луча, 117
— корневой, 94, 102, 149
— — SU(3), 140
— — положительный, 135
— младший, 26
— набла в сферических координатах, 169
— собственный, 23, 28, 70, 89, 97, 300
— — ортогональный, 24
— старшего веса, 150, 159
— старший, 26, 70, 171
— фундаментальный, 149, 150, 184
векторное произведение, 170, 311
векторный анализ, 304
вероятность, 294, 300
вес
— отрицательный, 90
— положительный, 90
— старший, 90
взаимодействие, 248, 292
— сильное, 180, 187
— слабое, 180
— электрослабое, 249
внешнее произведение, 314
внутреннее дифференцирование, 310
внутренний автоморфизм, 60
вырождение, 299, 302
— кратность, 299

гармонический осциллятор, 282
— SU(3)
— — неприводимое представление, 287
— вакуум, 288
— спектр, 288
— тензор Фрадкина, 284
генератор, 7, 8, 16, 71, 72, 81, 107
— базиса Шевалле, 125
— группы поворотов, 14, 30
— — тензорный, 183
— канонического преобразования, 277
— лестничный, 96, 101, 141, 148, 159
— поворотов
— — тензор, 279
— повышающий
— — SU(2), 167
— подалгебры Картана, 101
— спина
— — повышающий, 31
— — понижающий, 31
— трансляций, 9
— эрмитово самосопряженный, 76
гиперзаряд, 174, 180, 189
— слабый, 179
гиперон, 215, 271
гиперповерхность, 310

глюон, 252
гомеоморфизм, 8, 57
гомоморфизм, 59
гомотопический класс, 108
гомотопия, 108
градиент, 320
грассманова переменная, 53
группа, 7, 55, 319
— ISO(3), 16, 319
— O(3), 16, 319
— SL(2, $\mathbb{C}$), 127
— SO(3), 6, 319
— SO(3,1), 127
— SO(4), 183, 276, 279
— SO(N), 75, 124
— Sp(N), 124
— SU(2), 6, 44
— SU(3)
— — d-символ, 200
— — осциллятор 3D, 283
— — цвет, 217
— SU(N), 75, 124
— SU(n), 201
— Пуанкаре, 180
— абелева, 56
— исключительная, 123
— компактная, 77, 108, 123
— непрерывная, 55
— особая, 123, 161
— отражений Вейля, 157, 160, 186, 240
— поворотов, 6, 13, 15, 55
— полупростая, 60
— простая, 60, 123
— универсальная обертывающая, 129
групповая композиция, 56

действие, 292
декуплет
— SU(3), 209
— SU(5), 255
детерминант, 23, 312
диаграмма
— Дынкина, 115, 161
— — связная, 116, 123
— весовая, 201
дивергенция, 320
дикварк, 217
дисперсия, 300
дифференциал, 307
— детерминанта, 314
длина, 306
дублет, 32, 187
— SU(2), 258
— сопряженный, 180

закон преобразования
— векторов, 307
— ковекторов, 308
— тензорного оператора, 264
заряд, 174, 179, 189, 253, 269

идеал, 78, 162
иерархия пороговых энергий, 254
измерение спина, 28
изометрия, 317
изоморфизм, 60
изоспин, 138, 142, 174, 189, 203, 213, 253
— базис, 178
— слабый, 178
изотопическая инвариантность, 172, 187
инвариант, 30, 55, 66, 307
— Казимира, 91, 144
инвариантный подход, 308
инверсия
— базиса, 314
— зеркальная, 16, 314, 319
— — псевдовектора, 316
— — псевдоскаляра, 316
— координат, 314
— объема, 315
— тензора Леви-Чивиты, 316
индекс
— Дынкина, 87, 248
— верхний, 311
— ковариантный, 67
— контравариантный, 67
— немой, 104, 307
— нижний, 311
интеграл
— по траекториям, 295
— фейнмановский, 295
интерференция, 295

калибровочная теория, 180, 252
— великого объединения, 253
— электрослабая, 180
карта многообразия, 57
квадратичная форма, 306
квант, 33, 292, 295
квантование
— каноническое, 302
— спина, 30
квантовая хромодинамика, 252
квантовое число, 53, 92, 144, 249, 296
кварк, 174
— странный, 176, 187
кварковая модель, 257
квинтет
— SO(3), 39
ковектор, 304
— набла, 319
коммутатор, 12, 15, 18, 28, 71, 277, 298, 302
— генераторов, 72, 134
— — $\mathfrak{su}(3)$, 137
— генераторов группы поворотов, 30
— спина, 42
— тензорного оператора, 264
комплексное сопряжение, 296
компонента связности, 116
конфайнмент, 177
конформный фактор, 79, 134
координатная сетка, 56, 61
координатное представление, 169
координатный подход, 304, 308
координаты, 304
— декартовы, 305, 311, 320
— сферические, 169, 305, 320, 321
корень
— алгебры Ли, 95
— отрицательный, 96
— положительный, 95
— — простой, 95, 106, 109, 159
— старший, 159
корневое дополнение, 96, 161
— $\mathfrak{su}(3)$, 136
коцикл, 108, 325

коэффициенты Клебша–Гордана, 259
кратность вырождения, 158, 186
— в атоме водорода, 281
— весов представления SU(3), 207
критерий
— Картана, 77, 162
— вырождения, 301

лапласиан, 321, 323
лептон, 178
лептонное число, 179
линейная оболочка, 106
линейная функция, 306

магнетон, 269
магнитный момент, 268, 269
матрица
— Картана, 114
— генератора, 15
— обратная, 23, 313
— поворотов, 16, 19
— спина, 19
— — в терминах бра- и кет-состояний, 27
— — повышающая, 26, 34
— — понижающая, 26, 34
— эрмитово самосопряженная, 22, 28
матрица Картана, 125
матрицы
— Гелл-Манна, 190, 193, 215, 283
— — тождество Фирца, 200
— Паули, 41, 166
матричная экспонента, 42
матричное умножение, 318
мезон, 187
метрика, 53, 306, 310
— Киллинга, 76–78, 81, 93, 99, 103, 105, 138, 163
— — $\mathfrak{su}(2)$, 133
— — SU(N), 138
— диагональная, 306
— евклидова, 56, 57, 70, 79, 81, 183, 317
— конформно евклидова, 79, 105
— конформно плоская, 138
— обратная, 310
— спинорная, 46, 51
механика
— фейнмановская формулировка, 292, 302
минор матрицы, 313
многообразие, 55
модуль Верма, 77, 109, 151, 172
момент
— вращения, 19, 133, 257, 259
— импульса
— — орбитальный, 170
— количества движения, 92, 133, 176, 217, 257, 269
мультиплет, 55, 172, 187
мультиплетность, 32

наблюдаемая величина, 55, 292, 295
нейтрон, 172
неравенство треугольника, 306
норма, 295
— нулевая, 301
нуклон, 172

объем, 306
— ориентированный, 311
октет SU(3), 209
оператор, 55, 71, 294
— Казимира, 13, 83, 148, 276
— — высшей степени, 83
— — квадратичный, 16, 83, 133, 146
— — кубический SU(3), 200
— — подгруппы, 204
— импульса, 294, 302, 324
— линейный, 298
— набла, 319
— наблюдаемой величины, 295, 297
— неприводимый тензорный, 263, 264
— повышающий, 151
— понижающий, 148, 151
— сдвига, 323
— эрмитов, 170
— эрмитово самосопряженный, 70, 81, 132, 161, 297
— эрмитово сопряженный, 303
оператор наблюдаемой величины, 295
операция перестановок, 53
— фермионов, 53
опускание индекса, 311
орбита
— замкнутая, 274
— эллиптическая, 274
орбитальный момент, 17, 169
ориентированная площадь, 314
отражение Вейля, 153, 185
— группа, 157, 160, 186
— — SU(N), 240

параллельный перенос, 65, 67, 321
параметр преобразования, 55
пентакварк, 187
поворот на угол 2π, 43
подалгебра Картана, 13, 88, 215, 249
подгруппа
— абелева, 77
— инвариантная, 60, 77
— нормальная, 60
поднимание индекса, 311
подстановка вектора, 310
поле
— векторное, 18, 61
— гравитационное
— — свободное, 40
— локальное, 292, 295
— поперечное, 40
— скалярное, 16, 66, 304
— спина s, 32
— тензорнное, 33
— электромагнитное
— — свободное, 40
полнота базиса, 27, 297
полный набор наблюдаемых, 29, 30, 70, 83, 88, 91–94, 102, 104, 132, 144, 145, 158, 167, 203, 210, 215, 216, 248, 265, 280, 298, 301
последовательность корней, 112
постоянная
— Планка, 33, 294, 302
— тонкой структуры, 281
правила отбора, 267
представление алгебры, 72
— присоединенное, 73, 81
представление группы, 8, 56, 70
— неприводимое, 32, 85, 91, 134, 144, 159, 162, 187
— — SU(2), 167
— — SU(3), 201, 209
— — базис, 201
— — тензорное произведение, 237

— присоединенное, 72, 96
— — SU(3), 212
— — SU(N), 247
— проективное, 324
— точное, 70
— фундаментальное, 151, 221, 252
— — SU(2), 164
— — SU(3), 184
— — SU(5), 242, 253
— — SU(N), 201
— экспоненциальное, 107
преобразование
— групповое, 61
— инфинитезимальное, 7
— лестничное, 96
— линейное, 68, 72, 96
— обратное, 7
— ортогональное, 16, 318
— специальное, 16, 318
— спинора, 42
— тождественное, 7, 14
принцип
— Гюйгенса, 295
— запрета Паули, 53, 54, 215
проектор, 297
производная
— Ли, 67
— по направлению, 58, 64, 71
— скаляра по направлению, 320
— частная, 67
пространство
— векторное, 55, 295, 296, 305
— — ковариантное, 307, 308
— — контравариантное, 307
— гильбертово, 56, 70, 295
— евклидово, 6, 8, 23, 57, 304, 305, 311
— касательное, 63, 68, 71, 102, 305
— метрическое, 305
— — Римана, 306
— — изотропное, 306
— — однородное, 306
— представления, 102
— присоединенного представления, 76, 159
— размерность, 8
пространство-время, 319
протон, 172, 269
прямая сумма, 39
прямое произведение, 309

радиус-вектор, 323
разложение Фиттинга, 79, 161
размерность
— группы, 57
— присоединенного представления, 75
— пространства, 72
— пространства представления, 91
— спинового пространства, 32
разрешимость алгебры, 79
ранг
— группы SU(2), 164
— группы Ли, 88, 102, 106, 109
распад протона, 255
распределение вероятности, 294, 295
ротор, 320
ряд Тейлора, 9, 323

свертка тензоров Леви-Чивиты, 313
символ Кронекера, 36, 39, 308
симметрия, 55
— ароматов, 187, 210
— — мультиплет, 210
— иерархия масштабов, 254
— остаточная, 254
— спектров, 172, 188
синглет, 32, 216
— SO(3), 39
скаляр, 66, 304, 306
скалярное произведение, 76, 296, 306
скобка
— Ли, 12, 67
— Пуассона, 276, 277, 279, 302
след, 43
— генератора, 70, 81, 85, 93, 99, 162
— матрицы, 76, 77, 81, 93, 103, 199, 200, 242
— произведения генераторов, 87, 93, 162, 199
— тензора, 36, 233, 285, 287
сложение моментов, 260
смешанное произведение, 311
собственное значение, 23, 27, 54, 55, 81, 89, 161, 295, 298
— матрицы спина, 28
соотношение неопределенностей, 302
соотношения Серра, 125
сопряжение CP, 180
состояние
— базисное, 296
— квантовое, 55, 70, 89, 248, 295
— — составное, 252
— нулевое, 301
— представления, 89
— собственное, 55, 161, 295, 298–300
— старшего веса, 26, 145, 148, 185, 201, 221
— — SU(3), 229
— — SU(N), 247
спектр атома водорода, 281
спин, 6, 16, 19, 30, 55
— $s = 1/2$, 41
— $s = 1$, 20, 33
— $s = 2$, 34
— кварка, 268
— полуцелый, 53
— проекция на ось z, 32
— среднее значение, 27
— тензора, 19
спинор, 42, 43
— Паули, 42
— сопряженный, 51
среднее значение, 300
— матрицы спина, 28
— спина, 28
странность, 176, 188, 271
структурные константы, 55, 67, 68, 70, 72, 73, 75, 76, 78, 80, 81, 83, 84, 88, 94, 95, 101, 115, 128, 133, 136–138, 142, 143
— SU(3), 138, 143, 193
— группы поворотов, 79
суперпозиция, 55, 295
— амплитуд вероятности, 295
— квантовых состояний, 296, 300
— состояний, 27
сферическая гармоника, 25, 38, 171
схема Юнга, 218, 228
— SU(2), 257
— крюк, 235
— тензорное произведение, 237

тангенциальный подход, 63, 68

тензор, 304, 308
— Леви-Чивиты, 39, 311
— бесследовый, 37
— ранг, 308, 309
— симметричный, 36
тензор поворотов, 183
тензорное произведение, 39, 309
— двух векторов, 39
тензорные обозначения, 307
теорема Вигнера–Эккарта, 267
тетракварк, 187
тождественность физических систем, 53
тождество Якоби, 12, 70, 72
ток, 248
— SU(5), 253
— заряженный, 248
— нейтральный, 249
траектория, 292
— экстремальная, 292
трансляция, 7
транспонирование, 22, 296, 312, 318
триплет, 32
— SO(3), 39
— SU(2), 258
— SU(3), 190, 193
— пи-мезонов, 176, 213

угол поворота, 14
уравнение
— Шрёдингера, 294, 324
— на собственное значение, 23, 171, 295
— секулярное, 23
уравнения
— Гамильтона–Якоби, 294, 302
условие Хаусдорфа, 58

фермион, 43, 53, 54, 180, 215
— левый, 180
— правый, 180
флуктуация
— квантовая, 295

цвет кварка, 216, 253
центр алгебры, 84
— образующие, 84
центральный заряд, 127, 325
цикл, 108

частица, 292, 295
— нерелятивистская, 292
— тождественная, 53, 215, 268
четность
— пространственная, 315–317

эволюция
— интервал, 294
элемент
— длины, 169
— единичный, 8, 56
— обратный, 8, 14, 56, 68
эллипс, 274
— фокус, 274
эрмитово сопряжение, 22, 76, 96, 296, 297, 300, 303
— матриц, 299

ядро гомоморфизма, 46, 60

Литература

[1] В.В. Киселев. «Нерелятивистская механика частиц и полей*: векторный анализ и симметрии*» — М.: МЦНМО, 2026.
Электронный конспект: http to the web-site «NRMech» with a pdf-file of lecture notes.

[2] Дж. Эллиот, П. Добер. «Симметрия в физике» Т. 1, 2 — М.: Мир, 1983.

[3] М.И. Петрашень, Е.Д. Трифонов. «Применение теории групп в квантовой механике» — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] В.И. Арнольд. «Математические методы классической механики» — М.: Эдиториал УРСС, 2003.

[5] Б.Л. ван дер Варден. «Алгебра» — М.: Наука, 1979.

[6] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. «Современная геометрия» — М.: Наука, 1986.

[7] Ф. Уорнер. «Основы гладких многообразий и групп Ли» — М.: Мир, 1987.

[8] А.П. Исаев, В.А. Рубаков. «Теория групп и симметрий. *Книга 1: Конечные группы. Группы и алгебры Ли.*» — М.: URSS-Красанд, 2018;
А.П. Исаев, В.А. Рубаков. «Теория групп и симметрий. *Книга 2: Представления групп и алгебр Ли. Приложения.*» — М.: URSS-Красанд, 2020.

[9] С.П. Новиков, И.А.Тайманов. «Современные геометрические структуры и поля» — М.: МЦНМО, 2014.

[10] В.В. Киселев. «Квантовая механика» — М.: МЦНМО, 2023.

[11] П.А.М. Дирак. «Принципы квантовой механики» — М.: Наука, 1979.

[12] P. A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], «Review of Particle Physics», PTEP **2020** (2020) no.8, 083C01 doi:10.1093/ptep/ptaa104

[13] Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурмистров, А.И. Тернов. «Задачи по теоретической физике»— М.: МЦНМО, 2026.